

サイン・ヒルベルト方程式の多重キンク解の線形安定性

山口大工学部 松野好雅 (Yoshimasa Matsuno)

I. 概要

次のサイン・ヒルベルト (s H) 方程式 [1] を考える :

$$H\theta_t = -\sin \theta \quad (1.1a)$$

ここで演算子 H は

$$H\theta(x, t) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(y, t)}{y - x} dy \quad (1.1b)$$

で定義されるヒルベルト変換である。この方程式は空間変数 x に関しては微分を含まず、積分変換のみを含む点が見られず、従来の非線形方程式には見られない著しい性質である。s H 方程式は可積分方程式であるが、通常のソリトン方程式とは異なり線形化可能である。ここでは s H 方程式の特殊解である多重キンク解の線形安定性解析を行う。具体的には s H 方程式を多重キンク解のまわりで線形化した方程式の初期値問題を陽に解く。解の長時間での振る舞いから、多重キンク解が微小攪乱に対して安定であるという結論を得た。以下では解析結果の概要のみを記す。詳細に関しては参考文献 [2] を参照されたい。

II. 多重キンク解の性質

最初に多重キンク解の性質 [3-7] を要約しておく。

A. 線形化

次の従属変数変換を導入する :

$$\theta(x, t) = i \ln \frac{f^*(x, t)}{f(x, t)} \quad f(x, t) = \prod_{j=1}^N [x - x_j(t)] \quad (2.1)$$

ここで $x_j(t)$ は t の複素関数でその虚部は正と仮定する。(2.1) を (1.1) へ代入すると f と f^* に関する双線形方程式が得られる :

$$(f^* f)_t = \frac{1}{2i}(f^{*2} - f^2) \quad (2.2)$$

この方程式は次の線形方程式が成り立てば自動的に満足されることが容易にわかる。

$$f_t = \frac{1}{2i}(f - f^*) \quad (2.3)$$

(2.1) から f は

$$f(x, t) = \sum_{j=0}^N (-1)^j s_j x^{N-j} \quad s_0 = 1 \quad s_j = s_j(t) \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (2.4)$$

のように x のべきで展開できる。ここで s_j は

$$s_1 = \sum_{j=1}^N x_j \quad s_2 = \sum_{j < k}^N x_j x_k \quad \dots \quad s_N = \prod_{j=1}^N x_j \quad (2.5)$$

で定義される $x_1, x_2, \dots, x_N$ の基本対称関数である。(2.4) を (2.3) へ代入し両辺の x^{N-j} の係数を比較すると s_j に関するつぎの方程式系が得られる :

$$\frac{ds_j}{dt} = \frac{1}{2i}(s_j - s_j^*) \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (2.6)$$

この方程式の解は a_j, b_j を定数として

$$s_j = a_j t + b_j + i a_j \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (2.7)$$

のように書ける。

B. キンク解

(2.1)、(2.4)、(2.7) を用いると 1-キンク解、およびその空間微分は

$$\theta = -2 \tan^{-1} \left(\frac{a_1}{x - a_1 t - b_1} \right) \quad (a_1 > 0) \quad (2.8)$$

$$\theta_x = \frac{2a_1}{(x - a_1 t - b_1)^2 + a_1^2} \quad (2.9)$$

と表せる。さらに一般の N キンク解は

$$\theta = -2 \tan^{-1} \left[\frac{a_1 \prod_{j=1}^{N-1} (x - \alpha_j)}{\prod_{j=1}^N (x - \beta_j)} \right] \quad (2.10)$$

と書ける。ここで $\alpha_j (j = 1, 2, \dots, N-1)$ 、 $\beta_j (j = 1, 2, \dots, N)$ は代数方程式

$$\sum_{j=1}^N (-1)^j a_j x^{N-j} = 0 \quad (2.11a)$$

$$\sum_{j=0}^N (-1)^j (a_j t + b_j) x^{N-j} = 0 \quad (a_0 = 0, b_0 = 1) \quad (2.11b)$$

の実根である。図 1 に $N = 2$ の場合のキンクの相互作用を示した。ここでは θ の x 微分を図示した。

III. 線形化 s H 方程式の固有関数

s H 方程式を N -キンク解のまわりで線形化した次の方程式を考える：

$$H\phi_t = -\cos \theta \phi \quad \phi = \phi(x, t) \quad (3.1)$$

以下では 2 種類の境界条件 (i) $\phi^\pm \sim e^{\pm i(\lambda x + t)}$ 、 $|x| \rightarrow \infty$ 、(ii) $\phi \rightarrow 0$ 、 $|x| \rightarrow \infty$ に対して (3.1) の解を陽に求める。

A. 固有関数の構成

1. 連続スペクトルに対する固有関数

方程式 (3.1) の解を上半平面で解析的な関数 ϕ^+ と下半平面で解析的な関数 ϕ^- の和として

$$\phi(x, t) = \phi^+(x, t) + \phi^-(x, t) \quad (3.2)$$

のように表す。以下に示す $\phi^\pm$ は (3.1) を満たすことが直接計算により確かめられる。

$$\phi^+(x, t, \lambda) = e^{i(\lambda x + t)} \frac{f(x, t)}{f^*(x, t)} \quad (3.3a)$$

$$\phi^-(x, t, \lambda) = e^{-i(\lambda x + t)} \frac{f^*(x, t)}{f(x, t)} \quad (3.3b)$$

2. 離散スペクトルに対する固有関数

N -キンク解は $2N$ 個のパラメータ $a_j, b_j (j = 1, 2, \dots, N)$ を含む。これらのパラメータで s H 方程式を微分すると

$$H \left(\frac{\partial \theta}{\partial a_j} \right)_t = -\cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial a_j} \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (3.4a)$$

$$H \left(\frac{\partial \theta}{\partial b_j} \right)_t = -\cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial b_j} \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (3.4b)$$

従って、

$$f_j \equiv (-1)^j \frac{\partial \theta}{\partial a_j} = 2 \frac{\operatorname{Re} f}{f^* f} x^{N-j} - 2t \frac{\operatorname{Im} f}{f^* f} x^{N-j} \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (3.5a)$$

$$g_j \equiv (-1)^j \frac{\partial \theta}{\partial b_j} = -2 \frac{\operatorname{Im} f}{f^* f} x^{N-j} \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (3.5b)$$

は (3.1) の解となる。

B. 直交関係式

上で求めた固有関数は 2 つの関数 f, g の内積を

$$\langle f(x, t) | g(x, t) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) g(x, t) dx \quad (3.6)$$

で定義すると以下の直交関係式を満たす：

$$\langle \phi^+(x, \lambda) | \phi^-(x, \mu) \rangle = 2\pi \delta(\lambda - \mu) \quad (3.7a)$$

$$\langle \phi^+(x, \lambda) | \phi^+(x, \mu) \rangle = \langle \phi^-(x, \lambda) | \phi^-(x, \mu) \rangle = 0 \quad (3.7b)$$

$$\langle \phi^\pm(x, \lambda) | f_j(x) \rangle = \langle \phi^\pm(x, \lambda) | g_j(x) \rangle = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (3.7c)$$

$$\langle f_j(x) | f_k(x) \rangle = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2N-j-k}}{f^* f} dx \equiv a_{jk} \quad (j, k = 1, 2, \dots, N) \quad (3.7d)$$

$$\langle g_j(x) | g_k(x) \rangle = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2N-j-k}}{f^* f} dx \equiv b_{jk} \quad (j, k = 1, 2, \dots, N) \quad (3.7e)$$

$$\langle f_j(x) | g_k(x) \rangle = 0 \quad (j, k = 1, 2, \dots, N) \quad (3.7f)$$

C. 直交基底

(3.7) の関係式からわかるように、 f_j と g_j は直交するが f_j の各要素、および g_j の各要素は直交しない。しかしこれらが互いに線形独立であることを考慮するとグラム・シュミット法により直交基底を構成できる。実際 2 つの列ベクトル $\mathbf{f} = {}^t(f_1, f_2, \dots, f_N)$ 、 $\hat{\mathbf{f}} = {}^t(\hat{f}_1, \hat{f}_2, \dots, \hat{f}_N)$ に対して $\mathbf{f} = P\hat{\mathbf{f}}$ とおく。ここで正則行列 P は成分 a_{jk} をもつ行列 A により $A = P^t P$ と表せる。このとき $\hat{f}_j$ は直交基底をなすことがわかる。すなわち

$$\langle \hat{f}_j(x) | \hat{f}_k(x) \rangle = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, 2, \dots, N) \quad (3.8)$$

g_j にたいして同じ操作を行うと

$$\mathbf{g} = P\hat{\mathbf{g}} \quad (3.9)$$

$$\langle \hat{g}_j(x) | \hat{g}_k(x) \rangle = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, 2, \dots, N) \quad (3.10)$$

が得られる。

IV. 完全性関係式と安定性解析

A. 完全性関係式

III 章で構成した固有関数系は次の完全性関係式を満たす：

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty [\phi^+(x, \lambda)\phi^-(y, \lambda) + \phi^-(x, \lambda)\phi^+(y, \lambda)] d\lambda \\ & + 2\pi \sum_{j=1}^N \{\hat{f}_j(x)\hat{f}_j(y) + \hat{g}_j(x)\hat{g}_j(y)\} = 2\pi\delta(x-y) \end{aligned} \quad (4.1)$$

この式の証明は幾分長いが直接計算により行うことができる。その際、Bezout 行列の理論が有用になる。

B. 安定性解析

(4.1) を用いると線形化 s H 方程式 (3.1) の初期値問題を陽に解くことができる。実際、 ϕ の初期値を ϕ_0 として解は以下のように書ける：

$$\phi(x, t) = \int_0^\infty [\hat{\phi}^-(\lambda)\phi^+(x, t, \lambda) + \hat{\phi}^+(\lambda)\phi^-(x, t, \lambda)] d\lambda + \sum_{j=1}^N [\hat{\phi}_j\hat{f}_j(x, t) + \hat{\psi}_j\hat{g}_j(x, t)] \quad (4.2a)$$

$$\hat{f}_j(x, t) = \sum_{k=1}^N (P^{-1})_{jk} f_k(x, t) \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (4.2b)$$

$$\hat{g}_j(x, t) = \sum_{k=1}^N (P^{-1})_{jk} g_k(x, t) \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (4.2c)$$

ここで展開係数は初期値により決まり以下のように表せる：

$$\hat{\phi}^{\pm}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \langle \phi^{\pm}(x, 0, \lambda) | \phi_0(x) \rangle \quad (4.3a)$$

$$\hat{\phi}_j = \langle \hat{f}_j(x, 0) | \phi_0(x) \rangle \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (4.3b)$$

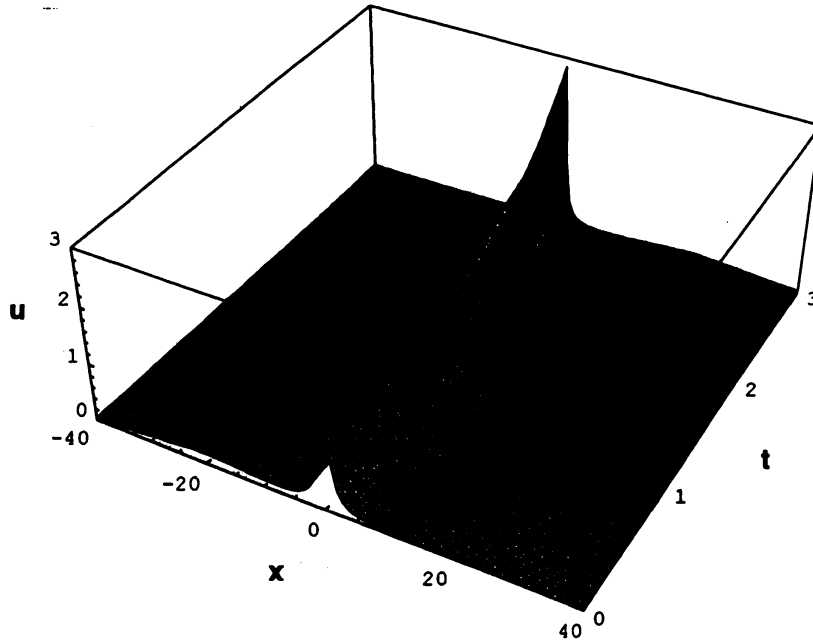
$$\hat{\psi}_j = \langle \hat{g}_j(x, 0) | \phi_0(x) \rangle \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (4.3c)$$

N -キंक解の安定性は解 (4.2) の長時間での振る舞いを調べることにより判定される。実際、連続スペクトルからの寄与は振動波列に発展し、その時間発展は安定であることがわかる。他方、離散スペクトルからの寄与は $\hat{f}_j$ ($j = 1, 2, \dots, N$) から時間 t に比例する発散項が現れるが ((3.5a) 参照)、これは単に N -キंक解の位相 b_j をずらすことにより消去できる。従って、離散スペクトルからの寄与の時間発展も安定である。以上により N -キंक解は微小攪乱に対して安定であると結論できる。

V. 参考文献

- [1] A. Degasperis and P.M. Santini, Phys. Lett. **98A**, 240 (1983).
- [2] Y. Matsuno, J. Math. Phys. **41**, 7061 (1999).
- [3] Y. Matsuno, Phys. Lett. **119A**, 229 (1986).
- [4] Y. Matsuno, J. Phys. A: Math. Gen. **20**, 3587 (1987).
- [5] Y. Matsuno, in *Finite Dimensional Integrable Dynamical Systems*, edited by P.G.L. Leach and W.-H. Steeb (World Scientific, Singapore, 1988), p. 205.
- [6] Y. Matsuno, Phys. Lett. **120A**, 187 (1987).
- [7] Y. Matsuno, Int. J. Mod. Phys. **B9**, 1985 (1995).

(a)



(b)

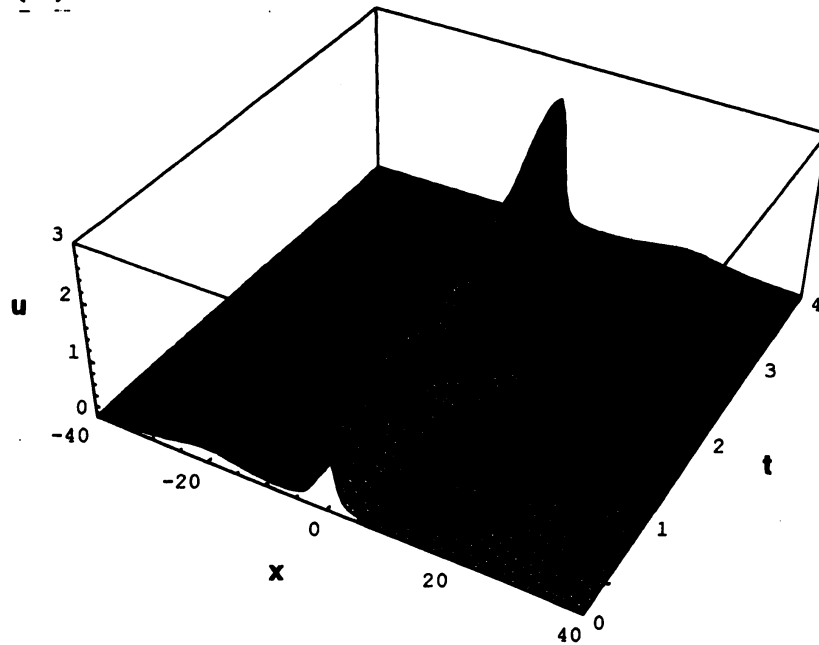


図1: 2つの異なる初期条件に対する s H 方程式の 2-キंक解の相互作用。ここでは $u \equiv \theta_x$ を図示してある。(a) 解は衝突の瞬間 ($t=1.30$) に 1 つの極大値を有する。(b) 解は衝突の瞬間 ($t=1.73$) に 2 つの極大値を有する。