

Hardy 空間の関数による Interpolation Problem について (Interpolation Problems By Functions In Hardy Spaces)

北大大学院・理学研究科
(Hokkaido University)

中路 貴彦
(Takahiko Nakazi)

Abstract. Let $\{z_n\}$ be a sequence in the open unit disc and $\rho_n = \prod_{m \neq n} |(z_n - z_m)/(1 - \bar{z}_m z_n)| > 0$. Suppose $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq s \leq \infty$, $\phi(t) > 0$ on $\{t > 0\}$ and $\rho_n > 0$ ($n \geq 1$). $\ell^p(\phi) = \{\{w_n\}; \{w_n/\phi(\rho_n)\} \in \ell^p\}$ where ℓ^p is a sequence Banach space. We consider three problems about interpolations for $\ell^p(\phi)$ by the Hardy space H^s . If $\phi(t) \equiv 1$ then $\ell^p(\phi) = \ell^p$. Mainly we study when $\phi(t) \equiv 1$ or $\phi(t) = t$.

1 章 定義と歴史と問題

D を $\mathbb{C}$ の open unit disc, H^p ($1 \leq p \leq \infty$) を D 上の普通の Hardy 空間とする。 $\{z_j\} \subset D$ かつ $z_i \neq z_j$ ($i \neq j$) とする。 $\{z_j\}$ は $\sum_{j=1}^{\infty} (1 - |z_j|) < \infty$ のとき、Blaschke sequence と呼ばれる。 $\rho_k = \prod_{j \neq k}^{\infty} \left| \frac{z_k - z_j}{1 - \bar{z}_j z_k} \right|$ とするとき、 $\inf_k \rho_k > 0$ ならば、 $\{z_j\}$ は uniformly separated sequence と呼ばれる。この講演では、Hardy 空間に属する正則関数による補間についての三つの問題について考える。

問題 1 $1 \leq p \leq \infty$ のとき、 $\{f(z_j); f \in H^p\} \supset \ell^{\infty}$ となる $\{z_j\}$ を決定せよ。

この問題については、 $p = \infty$ のときには、1958 年に Carleson [1] によって完全に解かれた。すなわち $\{f(z_j); f \in H^{\infty}\} \supset \ell^{\infty}$ となる必要十分条件は $\{z_j\}$ が uniformly separated sequence であることを示した。これは非常に良く知られた基本的な結果である。1971 年に Snyder [8] は $p = 2$ のときには、この Carleson の定理が成立しないことを示した。すなわち $\{f(z_j); f \in H^2\} \supset \ell^{\infty}$ でも必ずしも $\{z_j\}$ は uniformly separated sequence ではないことを示した。1972 年に Duren-Shapiro [2] は Snyder の定理は $1 \leq p < \infty$ に対しても成立することを示した。よって自然な問題として、 $p \neq \infty$ のときに、 $\{f(z_j); f \in H^p\} \supset \ell^{\infty}$ となる $\{z_j\}$ はどのような条件を満足するかがある。

問題 2 $1 \leq p \leq \infty$, $\phi(t) > 0$ ($t > 0$) かつ $\rho_n > 0$ ($n \geq 1$) とする。 $\ell^p(\phi) = \{\{w_n\}; \{w_n/\phi(\rho_n)\} \in \ell^p\}$ とする。

(1) 与えられた ϕ について、 $\{f(z_j); f \in H^p\} \supset \ell^p(\phi)$ となる $\{z_j\}$ を決定せよ。

(2) 与えられた Blaschke sequence $\{z_j\}$ に対して、常に $\{f(z_j); f \in H^p\} \supset \ell^p(\phi)$ が成立する ϕ を決定せよ。

この問題の (2) については、 $p = \infty$ のとき Carleson は Earl [2] の Carleson の定理の証明は、 $\phi(t) = t^2$ かつ $\{z_j\}$ が Blaschke sequence ならば $\{f(z_j); f \in H^\infty\} \supset \ell^\infty(\phi)$ が常に成立することを示していると指摘した。1977 年に Garnett [3] は $\phi(t) = t(1 + \log 1/t)^{-2}$ かつ $\{z_j\}$ が Blaschke sequence ならば $\{f(z_j); f \in H^\infty\} \supset \ell^\infty(\phi)$ が常に成立することを示した。更に $\phi(t) = t(1 + \log 1/t)^{-1}$ のとき $\{f(z_j); f \in H^\infty\} \not\supset \ell^\infty(\phi)$ となる Blaschke sequence $\{z_j\}$ が存在することを示した。問題の (1) については、 $p = \infty$ のとき、1988 年に Nakazi [6] は $\phi(t) = t$ のとき、 $\{f(z_j); f \in H^\infty\} \supset \ell^\infty(\phi)$ となる $\{z_j\}$ についての必要十分条件は uniformly separated sequence の有限和となることを示した。よって自然な問題として、 $1 \leq p < \infty$, $\phi(t) = t$ のとき、 $p = \infty$ と同じ結果が成立かがある。

問題 3 $1 \leq p < \infty$, $\phi(t) > 0$ ($t > 0$) かつ $\rho_n > 0$ ($n \geq 1$) とする。 $\{(1 - |z_j|^2)^{1/p} f(z_j); f \in H^p\} \supset \ell^p(\phi)$ となる $\{z_j\}$ を決定せよ。

$\phi(t) = 1$ のとき、 $1 \leq p < \infty$ に対して、1961 年に Shapiro-Shields [7] はこの問題を完全に解いた。すなわち $\{(1 - |z_j|^2)^{1/p} f(z_j); f \in H^p\} \supset \ell^p(\phi)$ となる必要十分条件は $\{z_j\}$ が uniformly separated sequence となることを示した。これは Carleson [1] の定理の一般化と考えることができる。 $\phi(t) = t$ のときはどうなるだろうかという自然な問題がある。これは Nakazi [6] の結果の一般化と考えることができる。

2 章 問題 1 について

この章では $p \neq \infty$ のときに、 $\{f(z_j); f \in H^p\} \supset \ell^\infty$ となる $\{z_j\}$ の満足する条件について考察する。

$\{z_j\}$ が Blaschke sequence のとき、 $B(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\bar{z}_j}{|z_j|} \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z}$ (Blaschke product) とすると $B \in H^\infty$ 。

$$\rho_{k,n} = \prod_{j=1, j \neq k}^{\infty} \left| \frac{z_k - z_j}{1 - \bar{z}_j z_k} \right|, \quad 1 \leq k \leq n$$

とすると $\rho_{k,n} \geq \rho_{k,n+1}$ かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{k,n} = \rho_k$ ($\forall k \geq 1$)。 $f_n(z) = \sum_{j=1}^n b_{nj}^{-1} w_j B_{nj}(z)$ ($n = 1, 2, \dots$)

とおくと、 $f_n \in H^\infty$ かつ $f_n(z_j) = w_j$ ($1 \leq j \leq n$) となる。次の (i) ~ (iii) が同値であることは、Carleson [1] と McDonald-Sundberg [5] による。

(i) $\sum_{j=1}^{\infty} (1 - |z_j|^2) |g(z_j)|^p \leq \gamma \|g\|_p^p$ ($g \in H^p$) となる $\gamma > 0$ が存在する。(ii) $\mu = \sum_{j=1}^{\infty} (1 - |z_j|^2) \delta_{z_j}$ とすると、 $S = \{z = re^{i\theta}; 1 - h \leq r < 1, \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + h\}$ となる任意の S について $\mu(S) \leq \gamma_1 h$ を満たす $\gamma_1 > 0$ が存在する。(iii) $\{z_j\}$ は uniformly separated sequence の有限和である。

系 1 の (1) $\Leftrightarrow$ (3) は Carleson [1] による。

補題 1 $1 \leq p \leq \infty$, $1/p + 1/q = 1$ かつ $w_j \in \mathcal{C}$ ($j = 1, 2, \dots$) とする。
 $f(z_j) = w_j$ ($j = 1, 2, \dots$) となる $f \in H^p$ が存在する必要十分条件は

$$\left| \sum_{j=1}^n \frac{w_j}{b_{nj}} (1 - |z_j|^2) g(z_j) \right| \leq \gamma \|g\|_q \quad (n \geq 1, g \in H^q)$$

となる $\gamma > 0$ が存在することである。

定理 1 $1 \leq p \leq \infty$, $1/p + 1/q = 1$ とする。 $\{f(z_j); f \in H^p\} \subset \ell^\infty$ である必要十分条件は

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_j} (1 - |z_j|^2) |g(z_j)| \leq \gamma \|g\|_q \quad (g \in H^q)$$

となる $\gamma > 0$ が存在することである。

系 1 次の (1) ~ (3) は同値である。

(1) $\{f(z_j); f \in H^\infty\} \subset \ell^\infty$

(2) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_j} (1 - |z_j|^2) |g(z_j)| \leq \gamma \|g\|_1$ ($g \in H^1$) となる $\gamma > 0$ が存在する。

(3) $\inf_j \rho_j > 0$

系 2 $\{f(z_j); f \in H^1\} \subset \ell^\infty$ となる必要十分条件は $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_j} (1 - |z_j|^2) < \infty$ である。

$\sum_{j=1}^{\infty} (1 - |z_j|^2) |g(z_j)| \leq \gamma \|g\|_1$ ($g \in H^1$) となる $\gamma > 0$ が存在する必要十分条件は $\{z_j\}$ が uniformly separated sequence の有限和であることは McDonald-Sundberg の結果である。一方系2は $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_j} (1 - |z_j|^2) |g(z_j)| \leq \gamma \|g\|_1$ ($g \in H^1$) となる $\gamma > 0$ が存在する必要十分条件は $\{z_j\}$ が uniformly separated sequence であることを示している。

3章 問題 2 について

$\phi(t) = 1$ のとき $\ell^p(\phi) = \ell^p$ であるが、 $\phi(t) = t$ のとき $\ell^p(\phi) = \{\{w_n\}; \sum_{n=1}^{\infty} |w_n/\rho_n|^p < \infty\}$ である。だから、 $\inf_n \rho_n > 0$ のときは $\ell^p(\phi) = \ell^p$ である。系3は Nakazi [6] による。

定理 2 $1 \leq p \leq \infty$, $1/p + 1/q = 1$ かつ $\phi(t) = t$ とする。このとき、
 $\{f(z_j); f \in H^p\} \subset \ell^\infty(\phi)$ となる必要十分条件は

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1 - |z_j|^2) |g(z_j)| \leq \gamma \|g\|_q \quad (g \in H^q)$$

となる $\gamma > 0$ が存在する。

系 3 $\phi(t) = t$ とする。

(1) $\{f(z_j); f \in H^\infty\} \subset \ell^\infty(\phi)$ となる必要十分条件は $\{z_j\}$ が uniformly separated sequence の有限和となることである。

(2) $\sum_{j=1}^{\infty} (1 - |z_j|) < \infty$ ならば $\{f(z_j); f \in H^1\} \subset \ell^\infty(\phi)$ である。

系 4 $1 < p < \infty$ かつ $\phi(t) = t$ とする。

(1) $\{f(z_j); f \in H^p\} \subset \ell^\infty(\phi)$ であるが $\{z_j\}$ は uniformly separated sequence の有限和でない $\{z_j\}$ が存在する。

(2) $\sum_{j=1}^{\infty} (1 - |z_j|)^{1/p} < \infty$ ならば $\{f(z_j); f \in H^p\} \subset \ell^\infty(\phi)$ である。

4 章 問題 3 について

Carleson [1] の定理は Shapiro-Shields [7] によって weighted interpolation の場合に、 $H^p(p \neq \infty)$ へ一般化された。この章では Nakazi [6] の結果 … この講演の 2 章の系 3 の (1) … を weighted interpolation の場合に $H^p(p \neq \infty)$ へ一般化する。

補題 2 $1 \leq p \leq \infty, 1/p + 1/q = 1$ かつ $w_j \in \mathcal{C} (j = 1, 2, \dots)$ とする。このとき、 $(1 - |z_j|^2)^{1/p} f(z_j) = w_j (j = 1, 2, \dots)$ となる $f \in H^p$ が存在する必要十分条件は任意の $n \geq 1$ に対して

$$\left| \sum_{j=1}^n \frac{w_j}{b_{nj}} (1 - |z_j|^2)^{1/q} g(z_j) \right| \leq \gamma \|g\|_q \quad (g \in H^q)$$

となる $\gamma > 0$ が存在する。

定理 3 $1 < p \leq \infty, 1/p + 1/q = 1$ かつ $\phi(t) = t$ とする。このとき、 $\{(1 - |z_j|^2)^{1/p} f(z_j); f \in H^p\} \subset \ell^p(\phi)$ となる必要十分条件は

$$\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} (1 - |z_j|^2) |g(z_j)|^q \right\}^{1/q} \leq \gamma \|g\|_q \quad (g \in H^q)$$

となる $\gamma > 0$ が存在する。

系 5 $\phi(t) = t$ とする。

(1) $1 < p \leq \infty, 1/p + 1/q = 1$ のとき、 $\{(1 - |z_j|^2)^{1/p} f(z_j); f \in H^p\} \subset \ell^p(\phi)$ である必要十分条件は $\{z_j\}$ が uniformly separated sequence の有限和であることである。

(2) もし $\sum_{j=1}^{\infty} (1 - |z_j|) < \infty$ ならば、 $\{(1 - |z_j|^2)f(z_j) ; f \in H^1\} \supset \ell^1(\phi)$ が成立する。

参考文献

1. L.Carleson, An interpolation problem for bounded analytic functions, Amer.J.Math. 80(1958), 921-930.
2. J.P.Earl, On the interpolation of bounded sequences by bounded functions, J.London Math.Soc. 2(1970), 544-548.
3. J.Garnett, Two remarks on interpolation by bounded analytic functions, Banach Spaces of Analytic Functions (Baker et al., eds.) (Lecture Notes in Math.Vol.604), Springer-Verlag, Berlin.
4. P.L.Duren and H.S.Shapiro, Interpolation in H^p spaces, Proc.Amer.Math.Soc. 31(1972), 162-164.
5. S.McDonald and C.Sundberg, Toeplitz operators on the disc, Indiana Univ.Math. J. 28(1979), 595-611.
6. T.Nakazi, Notes on interpolation by bounded analytic functions, Canad.Math.Bull. 31(1988), 404-408.
7. H.S.Shapiro and A.L.Shields, On some interpolation problems for analytic function, Amer.J.Math 83(1961), 513-532.
8. A.K.Snyder, Sequence spaces and interpolation problems for analytic functions, Studia Math. 39(1971), 137-153.

講演したときに定理 1 は完全ではなかったが、講演のあとで完全な形で証明できた。しかし定理 1 はもっと一般的に B.A.Taylor と D.L.Williams [Interpolation of ℓ^q sequences by H^p functions, Proc.A.M.S. 34(1972), 181-186] によって証明されている事を最近発見した。