

“非局所”から“非対称”へ

— 物理的相互作用場の構築について —

東理大・理工 池田 恵

(5月12日受理)

§ 1. 序

この小論では、論理的な発展過程の問題として、“非局所”と“非対称”の関係を論じてみたいと思う。一般的に、物性論に於ても、ある物性の生来せる源というものを考えてみると、それは、本質的には、二つの（あるいは、二つ以上の）相異なる性格をもつ自由度の張る場の相互作用場の出現に帰着される。つまり、特徴的にいえば、着目する物性というものは、物理的相互作用場を形成していることが主張される。 — もつとも、物理的“相互”作用とはいえ、“相互”でない場合が一般的であり、非可逆な場合が本質的であろうから、“相互”という言葉は適当でないかもしれないが —。

それでは、一体、その物理的相互作用場を解析し、構築していくための論理は、どうなっているのか。最近、特に、連続体力学的に考察するに際して、問題となつてきているのが、“非局所”と“非対称”の論理なのである。このような論理に基づく議論については、既に、「レオロジーの幾何学的研究」の中で、多少ともふれておいたところであるが、^{1) 2)}この論文では、一般的な連続体力学、あるいは、変形論の立場に基づいて、まず最初に“非局所”の物理的及び幾何学的意味を考え、次に“非局所”の論理から“非対称”の論理への移行を論じ、最後に、“非対称”の物理的及び幾何学的意味について考えることにしたい。

但し、ここでは、あくまでも「レオロジーの幾何学的研究」の線にそつた考え方で議論を進めていきたいので、“非局所”、“非対称”といつても、結局、一般的な連続体力学の範疇での概念構成にならざるを得ないことを、ことわつておく。

§ 2. “非局所”

“非局所”という概念は、何に由来するかといえば、例えば、原子（分子）間力として、最近接原子（分子）間の近接作用のみならず、第二、第三、……近接原子（分子）間の遠隔作用までとり入れて論ずる必要が生じてくる如く、着目する力の及ぶ範囲領域というものが、ある有限な領域にまで拡張されることに帰着させられる。従つて、物性を代表すべき物質係数などの量が、一点のみの函数ではなくなり、二点（あるいは、それ以上の点）の函数に拡張されなければならない。

このように、従来着目されていた基本領域が、広範囲な領域に拡張され、又従来一点のみの函数として扱われていたものが、二点以上の点の函数に拡張されることを、特徴的に、“非局所”化と言つており、この論理に基づく連続体力学を、“非局所”連続体力学（Non-local continuum mechanics）³⁾とよんでいる。

このことは、言葉をかえていえば、基本となる独立変数の数を増やすこと、つまり、各点の自由度の数を増やすことに対応してき、いわば、「各点が構造をもつ」という概念と同等であることがわかる。

これを幾何学的に表現するためには、点 (x^κ) の他に、ある種の独立変数、例えば、 $x^{(m)\kappa} (= \frac{d^m x^\kappa}{d t^m}; m=1, \dots, n; t$ はある種のパラメータ)を附随させて、全体として、 $(x^\kappa, x^{(1)\kappa}, \dots, x^{(n)\kappa})$ を独立変数として採用することが必要となる。要するに、よりミクロに洞察するという論理に対応して、いわゆる高次空間（Higher order space）⁴⁾が導入されなければならない。

一般的に、独立変数の数を増やして、形式的に拡張することは容易であるが、この“非局所”なる概念に於ての本質は、「各点が構造をもつ」ということであり、独立変数としては、点 (x^κ) の他に、その点の構造を本質的に反映すべき性格のものを採用することが肝要である。 — 例えば、方向特性であれば element of support $(x^\kappa, x^{(1)\kappa})$ で充分であり、Finsler 空間による考察に移行する。

連続体力学の範囲に於ては、multi-polar theory⁵⁾や、モーメント応

力の問題（いわゆる Cosserat 連続体力学）⁶⁾ などが盛んに論じられ、従来のものの拡張として考えられているが、「各点の構造」を考慮に入れることにより、これらはすべて、“非局所”連続体力学の範疇に入るべき問題となる。又、今までのべてきたものは、大体において、“空間的”に非局所化する試みのものであるが、これに対して、“時間的”に非局所化することも考えられ、それは、時間依存体系としてのレオロジーの中に、容易に見出される。例えば、余効効果とか、記憶効果とかの現象は、すべて、“時間的”に非局所化されたものとみなすことができる。

さて、このように、各点及びその点の構造を同時に考慮する立場は、本質的には、度々のべてきた「動標構の方法」^{1) 2)} によつて把握されることは明らかであり、しかも、その構造が、前節でのべた意味での物理的相互作用の結果、生起するものであると考えるならば、着目せる物理的相互作用場というものが、element of support (x^k, ϵ_k) （但し、 ϵ_k は各点に附随する動標構）によつて、構築されることがわかる。前述の高次空間の概念も「動標構の方法」⁴⁾ によつて記述されることを考え併せれば、この論理こそ、“非局所”場の構築の論理に他ならないといえる。

§ 3. “非局所”と“非対称”の関係

前節でのべた如く、“非局所”という概念の中には、二通りの考え方がある；まず第一は、相互作用力の及ぶ範囲が広域になり、その意味で点よりも広い領域に着目しなければならないことをもつて、“非局所”とする考え方であり、高次線素を独立変数とする高次空間の概念が導入されるに至る。第二のものは、「点自身が構造をもつ」という表現で代表されたるもので、よりミクロにほりさげていこうとする立場であるが、これも、実は、点に新たに多くの物理的自由度を添加させる考え方に他ならず、高次空間概念をも含むことになる。従つて、結局のところ、物理—幾何学的観点からは、第二の考え方が、より本質的かつ有効であることが主張される。

ところで、その「点の構造」を表わすためには、「動標構の方法」が本質的であることをのべたが、この動標構のもつ性格が重要なわけである。つまり、特徴的にいえば、まず、外部からの力の作用について、純幾何学的自由度の場が

変形場として把握され、次に純物理的自由度の場が作用して、物理的相互作用が惹起され、現実の一つの現象として把握されると考えられる故、着目されるのは、その物理的相互作用場に他ならないといえる。

このことを幾何学的に表現すると、純幾何学的場の動標構を $\{\mathfrak{e}_\kappa\}$ ($\kappa = 1, 2, \dots, m$) とし、純物理的場のそれを $\{\mathfrak{e}_\sigma\}$ ($\sigma = m+1, \dots, n$) とすると、両者の関係

$$\mathfrak{e}_\sigma = \lambda_\sigma^\kappa \mathfrak{e}_\kappa \text{ あるいは } \mathfrak{e}_\kappa = \lambda_\kappa^\sigma \mathfrak{e}_\sigma$$

が、物理的相互作用そのものを表わし、物理的相互作用場は、element of support $(x^\kappa, \lambda_\sigma^\kappa)$ を独立変数とすることになる。この λ_σ^κ は、相互作用の非ホロノーム性、即ち、非可逆・非線型性を代表するから、一般に非対称であり、ここに非対称場が出現する。

従つて、“非局所”の物理的要因を、かくの如く、動標構の性格によつて分析し、記述していく、より一般的な立場に立つことにより、“非局所”は“非対称”に吸収されることとなる。

この考え方により、変形論に於ても、計量（即ち歪）の非対称化が図られ、それに双対な量である応力の非対称化が論じられることとなる。^{5) 6)} つまり、純変形のみから導入される従来の計量は、明らかに対称であるが、この純幾何学的場の段階に、ある種の物理的場が作用した時は、その相互作用場の計量は非対称でなければならない。又、逆に、非対称な計量場は、純幾何学的場以外に物理的自由度をもつ何ものかを含んでいなければならないことになり、 $(x^\kappa, \lambda_\sigma^\kappa)$ 一場が対応してくることとなる。そして、明らかに、 $(x^\kappa, \lambda_\sigma^\kappa)$ 一場は、それ自体、“非局所”化されていることに注意すべきである。

§ 4. “非対称”

かくして、 $(x^\kappa, \lambda_\sigma^\kappa)$ 一場の構築こそ、本質的に物理的相互作用場を洞察するための論理であることがわかつた。そして、“非対称”の本質は、相異なる性格をもつ二つの（あるいは、それ以上の）場の相互作用に由来することがわかつた。

従来の変形論が、二点間の距離の変化の概念のみを対象とし、そこに働いて

いる物理的効果そのものを含んでいないこと，反对称成分を取入れて非対称化する試みは，以前にも計量以外の段階で便宜的に行なわれてはいるが，方法論的に統一性がないこと，“非局所”の要因をよりミクロに洞察し，系統的に考察していくことが必要であること，等の理由から，「連続体力学基礎論」とでも名付けるべきものの範疇で，“非対称”場の構築を試みなければならないわけである。

λ^κ_σ の性格を考えてみると，これは，とりもなおさず，着目する基底空間（あるいは場）からの“はみだし”量を与えることがいえる。この“はみだし”は，相互作用に依存し，新しい自由度の添加に相当し，「点の構造」だとか，micro-structure, inner-rotation, 等^{5), 6)} の概念を代表するものと考えられる。従つて，従来の Cosserat 連続体力学，“非局所”連続体力学も，すべて $(x^\kappa, \lambda^\kappa_\sigma)$ 一場の構築に含まれることとなる。又，“はみだし”を強調すれば，たとえば降伏などの臨界現象に関係してくることもわかる。⁷⁾ ついで⁸⁾ に言うならば，この相互作用場の非対称性は，一般相対性理論における統一場の概念とも関係し，一般的な非対称場の構築と，そこに出現する λ^κ_σ と新しい物理的自由度（例えば，spin, spin-angular-momentum, etc.）との対応関係が問題となるところである。

ところで，この $(x^\kappa, \lambda^\kappa_\sigma)$ 一場を構築するに当つては，幾何学量による議論が望ましいわけで，今の場合，本質的には，非対称計量

$$g_{\lambda\sigma} = \lambda^\kappa_\sigma a_{\lambda\kappa} ; \quad a_{\lambda\kappa} \equiv A_\lambda^j A_\kappa^i \delta_{ji}$$

と，接続係数

$$\Gamma_{\mu\sigma}^\kappa = \lambda^\lambda_\sigma r_{\mu\lambda}^\kappa + \partial_\mu \lambda^\kappa_\sigma ; \quad r_{\mu\lambda}^\kappa \equiv A_1^\kappa \partial_\mu A_\lambda^1$$

によつて代表される。但し， A_1^κ は純幾何学的変形， $a_{\lambda\kappa}$ は，それによる変形場の計量，そして $r_{\mu\lambda}^\kappa$ は，その変形場の接続を与えるものとする。^{1) 2)} つまり，基本量 $(g_{\lambda\sigma}, \Gamma_{\mu\sigma}^\kappa)$ を独立変数とする相互作用場の構築がなされなければならない。そして，相互作用場の特徴は，非ホロノーム対象

$$\Omega_{\mu\lambda}^\kappa = -\lambda^\kappa_\sigma \partial_{[\mu} \lambda_{\lambda]}^\sigma \quad ([\] \text{ は交代記号})$$

池田 恵

によつて代表され、これが、いつさいの非可逆・非線型性を代表することとなる。これらの幾何学的取扱いは、既に度々のべた如く、「非ホロノーム部分空間分解論」^{1), 2), 9)}が代表することになる。

一般相対性理論に限らず、「場」の理論として非対称化を図つていくことの物理的意味は、非局所場を構成する新しい自由度の添加によつて代表され、「相互作用場」として本質的に把握されることになるが、“物理”の論理的な本質は、非ホロノーム性の抽出に帰着され、そこにすべての“物理”が集約されてくることになる。この点を強調すれば、 $\lambda_{\sigma}^{\kappa}$ に対応する実例としては、前述のものの他にも多数考えられることとなり、例えば、レオロジーに於ける粘弾性、粘塑性などの非線型性、液晶問題、誘電分極、磁歪等の方向特性と非等方性などが考えられるに至る。

§ 5. 討 論

“非局性”連続体力学について、“非局所”とは何かを考えるところからはじまつたが、そこに於ける方法論的展開により、“非対称”(相互作用)場の構築という重要な概念に到達するに至つた。「点が構造をもつ」ことの認識過程が本質的であり、それは、高次空間概念による、よりミクロへの洞察という考え方も含むことがわかつた。この線に沿つて、よりミクロへミクロへとつき進んでいくことが可能になるが、一方、この階層構造での各階層での本質的な“物理”は、性格の異なる二つの場の相互作用の出現ということであり、この点が強調されて、「動標構の方向」に基づく「非ホロノーム部分空間分解論」が系統的な方法論として、提唱されるに至つた。それ故、“非対称”が、より本質的なものとして主張され、 $(x^{\kappa}, \lambda_{\sigma}^{\kappa})$ 一場、あるいは、 $(g_{\lambda\sigma}, \Gamma_{\mu\sigma}^{\kappa})$ 一場の構築が、とりもなおさず、物理的相互作用場の構築に他ならないこととなつた。そこで、筆者の将来計画としては、この相互作用として、典型的であると考えられるところの「一般的電磁-弾塑性論」を論ずることが考えられている。読者諸氏の有益な討論を期待してやまない。

§ 6. 参考文献

- 1) 池田 恵, 物性研究, 12-2 (1969), 117

2) 池田 恵, 物性研究, 12-6 (1969), 365

3) 例えば

E.Kröner und B.K.Datta, Z.Physik, 196 (1966), 203

U.Dehlinger und E.Kröner, Z.Metallkunde, 51 (1960),
457

E.Grafarend, RAAG Research Notes, Third Series,
No. 141 (1969)

4) 例えば

A.Kawaguchi; Tensor, 1 (1938), 13

“ 2 (1939), 39

“ 3 (1940), 68

“ 4 (1941), 66

M.Kawaguchi, RAAG Memoirs, 3 (1962), 718

5) 例えば

A.E.Green and R.S.Rivlin, Proc. Roy. Soc., A284
(1965), 303

A.E.Green and R.S.Rivlin, ZAMP, 18 (1967), 208

6) 例えば

W.Günther, Abh. Braunsch. Wiss. Gesell., X (1958),
195

J.L.Ericksen and C.Truesdell, Arch. Ratn'l. Mech.
Anal., 17 (1964), 85

7) K.Kondo, Memoirs, 1, D-V (1955), 522

8) A.Einstein, The Meaning of Relativity. Princeton Univ.
Press, 1955

9) K.Yano and E.T.Davies, Annali di Matematica,
37 (1954), 1