

Numerical equivalence on Chow groups of local rings

蔵野 和彦 (明治大学理工学部)

この報告に書いてあることは、[6] に証明があります。もし興味を持っていただけたなら、詳しくはそれを見て下さいますようお願いします。

1 序

複素数体 $\mathbb{C}$ 上スムーズな射影曲面 X 上の二つの曲線 C_1, C_2 には、整数値の交点数 (C_1, C_2) が定まる。これによって、 X 上の二つのヴェイユ因子 D_1, D_2 に対して、整数値の交点数 (D_1, D_2) が定まる。すると、pairing

$$(1) \quad \text{Div}(X) \times \text{Div}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

が定まり、これにより

$$(2) \quad \text{Pic}(X) \times \text{Pic}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

が誘導される。通常は、 $\text{Pic}(X)$ は、非常に巨大な群である。実際

$$0 \rightarrow \text{Pic}^0(X) \rightarrow \text{Pic}(X) \rightarrow NS(X) \rightarrow 0$$

という完全列があり、Néron-Severi 群 $NS(X)$ は有限生成アーベル群であるが、Picard 多様体 $\text{Pic}^0(X)$ は $g(X)$ 次元のアーベル多様体である。この完全列により、 X の種数 $g(X)$ が正であれば、 $\text{Pic}(X)_{\mathbb{Q}}$ は連続濃度の基底を持つ $\mathbb{Q}$ -ベクトル空間であることがわかる。

ところで、 $\overline{D}_1 \in \text{Pic}^0(X)$ を満たす $D_1 \in \text{Div}(X)$ は、任意の $D_2 \in \text{Div}(X)$ に対して $(D_1, D_2) = 0$ を満たすことが知られている。よって、主に交点数 (D_1, D_2) に興味がある人は、この巨大な Picard 群 $\text{Pic}(X)$ をまともに扱う必要は無く、(2) から誘導される有限次元 $\mathbb{Q}$ -ベクトル空間 $NS(X)_{\mathbb{Q}}$ 上の pairing

$$NS(X)_{\mathbb{Q}} \times NS(X)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Q}$$

を扱えば十分である。

任意の非負整数 n, m に対して、 $n+m$ 次元のスムーズな複素射影代数多様体上の n 次元のサイクルと m 次元のサイクルとの交点数の pairing に対しても、上のような現象が起こる。(上の例は、 $n=m=1$ のものである。)

このような現象は、 X のある一点 t で交わる二つの閉部分多様体 Y, Z の点 t での交点数 $i_X(Y, Z; t)$ を計算する際にも起こるのである。そのことを見るのが、ここでの目標である。つまり、上で説明した現象の局所環上での類似として、

- 点 t の局所環上で、(1), (2) のような pairing が定義される (下の (4) と (5))
- この pairing によって、numerical 同値が定義できる (下の定義 2.2)
- numerical 同値で割れば、 $NS(X)$ のような有限生成な群ができる (下の定理 2.4)

をここで示したい。定理 2.4 によれば、各点の局所環上で $NS(X)$ のような有限生成アーベル群が定義できて、“局所的なピカル数”が定まることがわかる。

序章では、(1) に対応する局所環上での pairing (3) を定め、その幾何学的意味・交点理論との関連を見ることにする。正確な議論は、次章から始めることにする。

$S = \mathcal{O}_{X,t}$, $M = \mathcal{O}_{Y,t}$, $N = \mathcal{O}_{Z,t}$ とおく。 M , N は S -加群である。 X が正則スキームと仮定すると、 S は正則局所環になる。このとき Serre [10] により、 Y と Z の点 t での交点数は

$$i_X(Y, Z; t) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \ell_S(\mathrm{Tor}_n^S(M, N))$$

と定義されている。ここで、 Y と Z が t の近傍で一点で交わるための必要十分条件は $M \otimes_S N$ が、長さ有限であることである。こう仮定すると、加群 $\mathrm{Tor}_n^S(M, N)$ の長さ $\ell_S(\mathrm{Tor}_n^S(M, N))$ は有限であり、また $n \gg 0$ に対して $\mathrm{Tor}_n^S(M, N) = 0$ であるので、上の Tor の交代和は整数値を取ることがわかる。

$$\mathbb{G} : 0 \rightarrow G_m \rightarrow G_{m-1} \rightarrow \cdots \rightarrow G_0 \rightarrow 0$$

を M の有限自由分解としよう。このとき、 $\mathrm{Tor}_n^S(M, N) = H_n(\mathbb{G} \otimes_S N)$ である。 I は S のイデアルで、 $IN = 0$ かつ $\ell_S(M/IM) < \infty$ を満たすものとしよう。 $(M \otimes_S N$ は長さ有限であるので、例えば、 $I = \mathrm{ann}_S N$ とおけばこれを満たす。) すると、 N は S/I -加群であり、

$$\mathbb{G} \otimes_S N = \mathbb{G} \otimes_S (S/I \otimes_S N) = (\mathbb{G} \otimes_S S/I) \otimes_{S/I} N$$

である。ここで、 $R = S/I$ とおくと、 $\mathbb{F} = \mathbb{G} \otimes_S R$ は R 上の有界な有限自由複体である。また、 $\ell_S(M/IM) < \infty$ であるから、 $\mathbb{F}$ の全てのホモロジーの長さは有限になる。よって、任意の R -加群 N に対して $\mathbb{F} \otimes_R N$ のホモロジーの長さは有限であり、

$$i_X(Y, Z; t) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \ell_S(\mathrm{Tor}_n^S(M, N)) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \ell_R(H_n(\mathbb{F} \otimes_R N))$$

である。次章以降で、(1) に対応する局所環上の pairing として、

$$(3) \quad (\mathbb{F}, N) \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \ell_R(H_n(\mathbb{F} \otimes_R N))$$

を考えたい。

上の議論でわかったことは、「ネーター局所環 R 上で (たとえ S が正則局所環としても、 $R = S/I$ は正則とは仮定できないことに注意)、全てのホモロジーが長さ有限である R -加群の有界な有限自由複体 $\mathbb{F}$ と R -加群 N に対して定まる (3) の pairing は、交点数 $i_X(Y, Z; t)$ の計算と深い関係がある」ということである。

次章以下で詳しく述べるが、上の pairing (正確には、(4) と (5)) を使って、複体のグロタンディエック群や有限生成 R -加群のグロタンディエック群、チャウ群に numerical 同値を導入することができる (定義 2.2 参照)。主定理 (定理 2.4) は、これらを numerical 同値で割ると、同じ階数の有限生成自由アーベル群になるということを主張している。

以下の章で、正確な定義・主定理・具体例・代数幾何の numerical 同値との関係を述べる。

2 定義と主定理

このノートで出てくる局所環はすべて正則局所環の像であるとする。 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ整数環、有理数体、複素数体とする。

$(R, \mathfrak{m})$ は、 d 次元ネーター局所環としよう。 $C^{\mathfrak{m}}(R)$ は、有限生成 R -自由加群の有界な複体ですべてのホモロジー群が長さ有限であるものからなるカテゴリーとする。(もちろん、複体のバウンダリー射は R -線型写像であり、複体の間の射は R -線型写像のチェインマップと仮定する。)

例 2.1 $\mathbb{K}$ は、局所環 R のパラメーター系 $\underline{a}$ に関するコスズル複体であるとする。このとき、 $\mathbb{K} \in C^{\mathfrak{m}}(R)$ であることがわかる。実際、有限生成 R -加群 M に対して、

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \ell_R(H_n(\mathbb{K} \otimes_R M))$$

は、 M の $(\underline{a})$ に関する重複度と一致する [10]。

$\mathbb{K}$ は、 $C^{\mathfrak{m}}(R)$ の中ではかなり性質のよい複体である。 $C^{\mathfrak{m}}(R)$ の中にはもっと悪い(?) 性質を持つものがたくさんある [6]。

$\mathcal{M}(R)$ は有限生成 R -加群と R -線型写像のカテゴリーとする。このとき、 $\mathbb{F} \in C^{\mathfrak{m}}(R)$ と $N \in \mathcal{M}(R)$ に対して、

$$\chi_{\mathbb{F}}(N) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \ell_R(H_n(\mathbb{F} \otimes_R N)) \in \mathbb{Z}$$

を考えたい。ここで、 $\mathbb{F} \in C^{\mathfrak{m}}(R)$ であるので、 $\ell_R(H_n(\mathbb{F} \otimes_R N))$ は有限な数であることに注意。

有限生成 R -加群のグロタンディエック群 $G_0(R)$ を次のように定義する。

$$G_0(R) = \bigoplus_{M \in \mathcal{M}(R)} \mathbb{Z} \cdot [M] \Big/ Q$$

ここで、 Q は次の集合で生成された部分群とする。

$$\{[M] - [L] - [N] \mid 0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0 \text{ は } \mathcal{M}(R) \text{ 中の完全列}\}$$

$[M]$ は有限生成 R -加群 M を含む同型類に対応した生成元とする。

次に、複体のグロタンディエック群 $K_0^m(R)$ を次のように定義する。

$$K_0^m(R) = \bigoplus_{F \in C^m(R)} \mathbb{Z} \cdot [F.] \Big/ P$$

ただし、 $[F.]$ はカテゴリー $C^m(R)$ に含まれる複体

$$F. : \cdots \rightarrow F_n \rightarrow F_{n-1} \rightarrow \cdots$$

の同型類に対応した生成元であるとする。ここで、 P は次の二つの集合で生成された部分群であるとする。

$$\{[G.] - [F.] - [H.] \mid 0 \rightarrow F. \rightarrow G. \rightarrow H. \rightarrow 0 \text{ は } C^m(R) \text{ 中の完全列} \}$$

$$\{[F.] - [G.] \mid F. \rightarrow G. \text{ は } C^m(R) \text{ 内の射で quasi-isomorphism} \}$$

$\mathcal{M}(R)$ の完全列 $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ があれば、任意の $F. \in C^m(R)$ に対して $\chi_{F.}(M) = \chi_{F.}(L) + \chi_{F.}(N)$ が成立する。また、 $C^m(R)$ 内の完全列 $0 \rightarrow F. \rightarrow G. \rightarrow H. \rightarrow 0$ があれば、任意の $M \in \mathcal{M}(R)$ に対して $\chi_{G.}(M) = \chi_{F.}(M) + \chi_{H.}(M)$ が成立する。 $C^m(R)$ 内の quasi-isomorphism $F. \rightarrow G.$ があれば、任意の $M \in \mathcal{M}(R)$ に対して $\chi_{F.}(M) = \chi_{G.}(M)$ が成立する。よって、 $e([F.] \otimes [M]) = \chi_{F.}(M)$ と定めることにより、

$$(4) \quad e : K_0^m(R) \otimes_{\mathbb{Z}} G_0(R) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

が誘導される。

また、アフィン・スキーム $\text{Spec}(R)$ に対して、そのチャウ群 $A_*(R) = \bigoplus_{i=0}^d A_i(R)$ を

$$A_i(R) = \bigoplus \mathbb{Z} \cdot [\text{Spec}(R/\mathfrak{p})] \Big/ \text{Rat}_i(R),$$

によって定義する。ただし、上の直和は $\dim R/\mathfrak{p} = i$ を満たす R のすべての素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して和をとったものである。 $[\text{Spec}(R/\mathfrak{p})]$ は素イデアル $\mathfrak{p}$ に対応する生成元であり、 $\text{Rat}_i(R)$ は有理同値によって生成された部分群とする ([1] の Chapter 1 参照)。

$F. \in C^m(R)$ に対して、

$$\text{ch}(F.) : A_*(R) \rightarrow A_*(R/\mathfrak{m})_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cdot [\text{Spec}(R/\mathfrak{m})] = \mathbb{Q}$$

は、複体 $F. \in C^m(R)$ のローカライズド・チャーン・キャラクターとする。このとき、 $v([F.] \otimes \gamma) = \text{ch}(F.)(\gamma)$ と定めることにより、pairing

$$(5) \quad v : K_0^m(R) \otimes_{\mathbb{Z}} A_*(R) \longrightarrow \mathbb{Q}$$

が得られる。この v と e が、(2) の役割を果たす局所環上での pairing である。

ここで、局所環上での numerical 同値を次のように定義する。

定義 2.2 次によって定義された部分群の各元を、0 に numerical 同値ということにする。

$$\begin{aligned} NK_0^m(R) &= \{\alpha \in K_0^m(R) \mid e(\alpha \otimes \beta) = 0 \text{ for any } \beta \in G_0(R)\} \\ NG_0(R) &= \{\beta \in G_0(R) \mid e(\alpha \otimes \beta) = 0 \text{ for any } \alpha \in K_0^m(R)\} \\ NA_i(R) &= \{\gamma \in A_i(R) \mid v(\alpha \otimes \gamma) = 0 \text{ for any } \alpha \in K_0^m(R)\} \end{aligned}$$

ただし $i = 0, \dots, d_0$.

numerical 同値で割った群を

$$\begin{aligned} \overline{K_0^m(R)} &= K_0^m(R) / NK_0^m(R) \\ \overline{G_0(R)} &= G_0(R) / NG_0(R) \\ \overline{A_i(R)} &= A_i(R) / NA_i(R) \end{aligned}$$

とおく。ただし $i = 0, \dots, d_0$.

定義より直ちに、 e は $\bar{e}(\bar{\alpha} \otimes \bar{\beta}) = e(\alpha \otimes \beta)$ を満たす写像

$$\bar{e} : \overline{K_0^m(R)} \otimes \overline{G_0(R)} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

を誘導する。ただし、 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ は、それぞれ α, β の像であるとする。同様に、 v は $\bar{v}(\bar{\alpha} \otimes \bar{\gamma}) = v(\alpha \otimes \gamma)$ を満たす写像

$$\bar{v} : \overline{K_0^m(R)} \otimes \overline{A_*(R)} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

を誘導する。

R は正則局所環 S の像であると仮定する。すると、 $\text{Spec}(S)$ を base regular scheme と考えて特異リーマン・ロッホ公式 ([1] の 18.2 と 20.1 参照) を使うと、 $\mathbb{Q}$ -ベクトル空間の同型

$$\tau_{R/S} : G_0(R)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow A_*(R)_{\mathbb{Q}}$$

が存在する。(この写像は、 R だけでなく S を用いて構成されるので、 $\tau_{R/S}$ と書くことにする。) このとき、任意の $\mathbb{F} \in C^m(R)$ に対して図式

$$\begin{array}{ccc} G_0(R)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\tau_{R/S}} & A_*(R)_{\mathbb{Q}} \\ \text{xf.} \downarrow & & \text{ch}(\mathbb{F}.) \downarrow \\ \mathbb{Q} & = & \mathbb{Q} \end{array}$$

は可換である ([1] の Example 18.3.12) ので、

$$NK_0^m(R) = \{\alpha \in K_0^m(R) \mid v(\alpha \otimes \gamma) = 0 \text{ for any } \gamma \in A_*(R)\}$$

としてもよい。(ここで、アーベル群 A に対して、 $A_{\mathbb{Q}} = A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ とおく。)

次の命題により、 $\overline{G_0(R)}_{\mathbb{Q}}$ と $\bigoplus_i \overline{A_i(R)}_{\mathbb{Q}}$ との同型 $\bar{\tau}_{R/S}$ が構成できる。

命題 2.3 以上の状況で、

$$\tau_{R/S}(N G_0(R)_{\mathbb{Q}}) = \bigoplus_{i=0}^d N A_i(R)_{\mathbb{Q}}$$

が成立する。

証明のキーは、Gillet-Soulé による Adams 作用素 [2] とローカライズド・チャーン・キャラクターとの関係を与えるある公式 [7] を使うことである。詳しくは [6] 参照。

$\overline{A_{\bullet}(R)}_{\mathbb{Q}} = \bigoplus_i \overline{A_i(R)}_{\mathbb{Q}}$ と定義する。すると、前命題により図式

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} G_0(R)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\tau_{R/S}} & A_{\bullet}(R)_{\mathbb{Q}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{G_0(R)}_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\overline{\tau_{R/S}}} & \overline{A_{\bullet}(R)}_{\mathbb{Q}} = \bigoplus_{i=0}^d \overline{A_i(R)}_{\mathbb{Q}} \end{array}$$

を可換にする写像 $\overline{\tau_{R/S}}$ が誘導される。

写像 $\tau_{R/S}$ は R だけでなく S を用いて定義される。(しかし、実際に写像 $\tau_{R/S}$ が S のとり方に依る例は知られていない。) ところが、この写像 $\overline{\tau_{R/S}}$ は S のとり方には依らないことが証明される [6]。

次が主定理である。

定理 2.4 $(R, \mathfrak{m})$ はエクセレント・ネーター局所環で次のどちらかをみたすとする。(i) R は $\mathbb{Q}$ を含む。(ii) R は、体、整数環 $\mathbb{Z}$ または完備離散付値環上本質的有限型。

このとき、 $\overline{K_0^{\mathfrak{m}}(R)}$, $\overline{G_0(R)}$, $\overline{A_{\bullet}(R)}$ は、同じ階数の有限生成自由アーベル群である。

次章で主定理の証明の概略を述べる。

3 主定理の証明の概略

簡単な議論により、

$$\dim \overline{K_0^{\mathfrak{m}}(R)}_{\mathbb{Q}} = \dim \overline{G_0(R)}_{\mathbb{Q}} = \dim \overline{A_{\bullet}(R)}_{\mathbb{Q}} < \infty$$

が証明できれば定理 2.4 が従うことがわかる。

よって、以下では、すべて $\mathbb{Q}$ 上で考えることにする。

図式 (6) の射 $\overline{\tau_{R/S}}$ は同型であるので、 $\dim \overline{G_0(R)}_{\mathbb{Q}} = \dim \overline{A_{\bullet}(R)}_{\mathbb{Q}}$ が成立する。また pairing $\bar{e}: \overline{K_0^{\mathfrak{m}}(R)}_{\mathbb{Q}} \otimes \overline{G_0(R)}_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Q}$ は perfect であるので、もし $\dim \overline{G_0(R)}_{\mathbb{Q}} < \infty$ であれば $\dim \overline{K_0^{\mathfrak{m}}(R)}_{\mathbb{Q}} = \dim \overline{G_0(R)}_{\mathbb{Q}}$ が直ちに従う。

よって、定理を証明するには $\dim \overline{A_{\bullet}(R)}_{\mathbb{Q}} < \infty$ を示せば十分である。

それを示すために、まず R が整域の場合に帰着させる。(これは、局所環の射が proper 射になるときに、誘導されるチャウ群の射の様子を見ることにより可能になる。)

以下、 R は整域であるとしよう。定理の仮定により、射影的な正則オルタレーション $\pi: Z \rightarrow \text{Spec}(R)$ が存在する (広中 [3] と de Jong [4] 参照)。つまり、 π は generically finite

な projective surjection で Z は正則スキームである。さらに、 $\pi^{-1}(\mathfrak{m})_{\text{red}}$ は simple normal crossing divisor と仮定してよい。

$$\pi^{-1}(\mathfrak{m})_{\text{red}} = E_1 \cup \cdots \cup E_t$$

を既約分解としよう。仮定により、各 E_l は $R/\mathfrak{m}$ 上の正則な射影多様体であり、 $\text{codim}_Z E_l = 1$ ($l = 1, \dots, t$) である。

$\text{CH}_{\text{num}}^*(E_l)_{\mathbb{Q}}$ は、 E_l の numerical 同値で割った有理係数のチャウ環 ([1] の Chapter 19 参照) とする。このとき、[1] の Example 19.1.4 により、すべての l に対して $\dim \text{CH}_{\text{num}}^*(E_l)_{\mathbb{Q}}$ は有限次元 $\mathbb{Q}$ -ベクトル空間になる。

よって、次を証明することにより、主定理は証明される。

主張 3.1 ここで、 $\overline{A_*(R)_{\mathbb{Q}}}$ は $\bigoplus_{l=1}^t \text{CH}_{\text{num}}^*(E_l)_{\mathbb{Q}}$ の subquotient である。

以下、簡単に証明のアウトラインを述べる。

$\pi_* : A_*(Z)_{\mathbb{Q}} \rightarrow A_*(R)_{\mathbb{Q}}$ は全射であるので、 $\mathbb{Q}$ -ベクトル空間の射 $s : A_*(R)_{\mathbb{Q}} \rightarrow A_*(Z)_{\mathbb{Q}}$ で $\pi_* \circ s = 1$ を満たすものがある。

$j_l : E_l \rightarrow Z$ は、閉じた埋め込みとする ($l = 1, \dots, t$)。次の合成射を φ とおく。

$$A_*(R)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{s} A_*(Z)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sum j_l^*} \bigoplus_l A_*(E_l)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \bigoplus_l \text{CH}_{\text{num}}^*(E_l)_{\mathbb{Q}}$$

上の最後の射は自然な射影、 j_l^* は Cartier divisor E_l との intersection をとる射 (Chapter 2 [1]) とする。

主張 3.1 を示すには、 φ の核が、 $\bigoplus_l N A_i(R)_{\mathbb{Q}}$ に含まれていることを示せばよい。 $\gamma \in A_*(R)_{\mathbb{Q}}$ が $\varphi(\gamma) = 0$ を満たすとする。このときに、任意の $F_l \in C^m(R)$ に対して、 $\text{ch}(F_l)(\gamma) = 0$ を示したい。 $\varphi(\gamma) = 0$ であれば、 $l = 1, \dots, t$ に対して

$$j_l^* \cdot s(\gamma) = 0 \quad \text{in } \text{CH}_{\text{num}}^*(E_l)_{\mathbb{Q}}$$

が成立する。このことを使って $\gamma \in \bigoplus_l N A_i(R)_{\mathbb{Q}}$ を示すのである。詳しくは、[6] 参照。

q.e.d.

$\dim \overline{G_0(R)_{\mathbb{Q}}}$ について、基本的な事実を以下に列挙する。

- 1) $\mathbb{K}$ は、局所環 R のパラメーター系 $\underline{a}$ に関するコスズル複体であるとする。このとき、 $\chi_{\mathbb{K}}(R) = e(\underline{a}, R) > 0$ であるので、 $[R] \notin N G_0(R)_{\mathbb{Q}}$ である。よって、 $\dim \overline{G_0(R)_{\mathbb{Q}}} > 0$ である。
- 2) R は、正則局所環であるとする。このとき、 $G_0(R)_{\mathbb{Q}} = \overline{G_0(R)_{\mathbb{Q}}} = \mathbb{Q}$ である。
- 3) 非常に多くの場合、 $\dim G_0(R)_{\mathbb{Q}} = \infty$ である。定理 2.4 により $\dim \overline{G_0(R)_{\mathbb{Q}}} < \infty$ であるので、この場合 $N G_0(R)_{\mathbb{Q}} \neq 0$ となっている。

X は、 $\mathbb{C}$ 上スムーズな射影多様体であるとする。 R は、 X のアフィン・コーンの原点での局所環であるとする。このとき、 $\dim G_0(R)_{\mathbb{Q}} \geq \dim \text{Pic}(X)_{\mathbb{Q}}$ が示される [5]。 X の種数が正であれば、 $\dim \text{Pic}(X)_{\mathbb{Q}} = \infty$ であることに注意。よって、 X の種数が正であれば、 $\dim G_0(R)_{\mathbb{Q}} = \infty$ となる。

- 4) X は、 n 次元射影空間 $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ の互いに異なる r 点での blow-up であるとする。ここで、 $n \geq 2$ であると仮定する。 R を、 X のあるアフィン・コーンの原点での局所環であるとする。このとき、 $G_0(R)_{\mathbb{Q}} = \overline{G_0(R)}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^{r+1}$ である [6]。よって、 R の次元 $n+1$ (≥ 3) を固定しても、 $\dim G_0(R)_{\mathbb{Q}}$ には上限が無いことがわかる。
- 5) R が、2 次元以下の局所整域であるとする。このとき、Roberts の定理 [8] により $\overline{G_0(R)}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$ であることが示される [6]。

4 代数幾何の numerical 同値との関係

この章では、体上スムーズな射影多様体のアフィン・コーンを扱う。Roberts-Srinivas [9] の手法と結果を使いながら、局所環の numerical 同値で割ったチャウ群の様子を調べる。

k は代数閉体とし、 $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ はネーター次数環で $A_0 = k$, $A = k[A_1]$ を満たすものとする。 $X = \text{Proj}(A)$ は k 上スムーズであると仮定しよう。 $A_+ = \bigoplus_{n > 0} A_n$, $R = A_{A_+}$, $\mathfrak{m} = A_+ R$ とおく。 $\pi: Z \rightarrow \text{Spec}(R)$ は $\mathfrak{m}$ でのブロー・アップとする。このとき、 $\pi^{-1}(\mathfrak{m})$ は自然に X と一致する。よって、 X は Z の閉部分スキームと思える。 h は埋め込み $X = \text{Proj}(A)$ に対応した X 上の very ample divisor とする。

Thomason-Trobaugh [11] の localization sequences を用いて、

$$(7) \quad K_0^{\mathfrak{m}}(R)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\varphi} \text{CH}^*(X)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{h} \text{CH}^*(X)_{\mathbb{Q}}$$

は、完全列であることが証明できる。を得る。ここで、 φ は、次の合成射である。

$$K_0^{\mathfrak{m}}(R)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\pi^*} K_0^X(Z)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\chi} G_0(X)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\tau_{X/Z}} \text{CH}^*(X)_{\mathbb{Q}}$$

ただし、 π^* は [2] の 1.5 で定義されている射、 χ はホモロジーの交代和をとる射、 $\tau_{X/Z}$ は正則スキーム Z を base regular scheme とした X のリーマン・ロッホ写像 ([1] の 18.2 と 20.1 参照) である。

ここで、

$$\begin{aligned} K &= \text{Ker}(\text{CH}^*(X)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{h} \text{CH}^*(X)_{\mathbb{Q}}) \\ L &= \text{Ker}(\text{CH}_{\text{num}}^*(X)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{h} \text{CH}_{\text{num}}^*(X)_{\mathbb{Q}}) \\ M &= \text{CH}_{\text{num}}^*(X)_{\mathbb{Q}} / h \cdot \text{CH}_{\text{num}}^*(X)_{\mathbb{Q}} \end{aligned}$$

とおく。ただし、 $\text{CH}_{\text{num}}^*(X)_{\mathbb{Q}}$ は numerical 同値で割った X の有理係数のチャウ環とする。このとき、次の可換図式がある。

$$\begin{array}{ccccccc} & K_0^{\mathfrak{m}}(R)_{\mathbb{Q}} & & & & & \\ & \varphi \downarrow & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & \text{CH}^*(X)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{h} & \text{CH}^*(X)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\xi} A_*(R)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & \text{CH}_{\text{num}}^*(X)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{h} & \text{CH}_{\text{num}}^*(X)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow M \longrightarrow 0 \end{array}$$

上の図式は、横には完全列である (例えば、[5] 参照)。\$\xi\$ は \$A\$ の斉次素イデアル \$P\$ (ただし、\$P \neq A_+\$) に対して \$\xi([\text{Proj}(A/P)]) = [\text{Spec}(R/PR)]\$ によって定まる写像である。(7) の完全性により、\$\varphi: K_0^m(R)_{\mathbb{Q}} \rightarrow K\$ は全射である。写像 \$K \rightarrow L\$ の像を \$W\$ とおく。これから自然に誘導される全射 \$\phi: K_0^m(R)_{\mathbb{Q}} \rightarrow W\$ を見よう。Roberts-Srinivas [9] で行われている議論によって、次のことが証明できる。

1) \$W = \overline{K_0^m(R)}_{\mathbb{Q}}\$ が成立する。すなわち、\$0 \rightarrow NK_0^m(R)_{\mathbb{Q}} \rightarrow K_0^m(R)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\phi} W \rightarrow 0\$ は完全である。

2) 次の図式を可換にする写像 \$\bar{\xi}: CH_{\text{num}}(X)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \overline{A_*(R)}_{\mathbb{Q}}\$ がある。

$$\begin{array}{ccc} CH(X)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\xi} & A_*(R)_{\mathbb{Q}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ CH_{\text{num}}(X)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\bar{\xi}} & \overline{A_*(R)}_{\mathbb{Q}} \end{array}$$

このとき、自然な全射 \$M \rightarrow \overline{A_*(R)}_{\mathbb{Q}}\$ が誘導される。今、\$\dim CH_{\text{num}}(X)_{\mathbb{Q}} < \infty\$ であることにより \$\dim L = \dim M\$ が成立する。定理 2.4 により \$\dim W = \dim \overline{A_*(R)}_{\mathbb{Q}}\$ であるので、

$$\begin{array}{ccc} \dim W & \leq & \dim L \\ \parallel & & \parallel \\ \dim \overline{A_*(R)}_{\mathbb{Q}} & \leq & \dim M \end{array}$$

が成立する。よって、次の三条件は同値であることがわかる。

- a) \$W = L\$、
 - b) 自然な射 \$K \rightarrow L\$ は全射である、
 - c) 自然な射 \$CH_{\text{num}}(X)_{\mathbb{Q}}/h \cdot CH_{\text{num}}(X)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \overline{A_*(R)}_{\mathbb{Q}}\$ は同型である。
- このことから、直ちに次の定理がわかる。

定理 4.1 自然な射 \$CH(X)_{\mathbb{Q}} \rightarrow CH_{\text{num}}(X)_{\mathbb{Q}}\$ が同型であるとき、\$A_*(R)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \overline{A_*(R)}_{\mathbb{Q}}\$ も同型である。

Roberts-Srinivas [9] では、次のことが示されている。

- 1) \$k = \mathbb{C}\$ とする。このとき、\$W \neq L\$ なる例がある。
- 2) \$k = \overline{\mathbb{Q}}\$ または \$\overline{\mathbb{F}_p}\$ としよう。もし、スタンダード予想などの予想が正しければ、\$W = L\$ が成立する。

注意 4.2 \$\mathbb{C}\$ 上のスムーズな射影多様体 \$X\$ のある斉次座標環 \$A\$ の斉次極大イデアルでの局所化を \$R\$ としよう。ここで、自然な射

$$(8) \quad CH_{\text{hom}}(X)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow CH_{\text{num}}(X)_{\mathbb{Q}}$$

は同型であると仮定しよう。ただし、\$CH_{\text{hom}}(X)_{\mathbb{Q}}\$ は、homological 同値で割った有理係数のチャウ環 ([1] の Chapter 19 を見よ) とする。この仮定の下で、「\$j \leq \dim R/2\$ に対し

て、 $\overline{A_j(R)}_{\mathbb{Q}} = 0$ 」であることが証明できる。このことを環論の言葉に翻訳すると、「任意の $\mathbb{F} \in C^m(R)$ と $\dim M \leq \dim R/2$ を満たす任意の $M \in \mathcal{M}(R)$ に対して、

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \ell_R(H_n(\mathbb{F} \otimes_R M)) = 0$$

が成立する」となる。

上の写像 (8) は、次のどれかが満たされれば同型になる ([1] の Example 19.3.2 を見よ)。
(i) $\dim X \leq 3$. (ii) X はアーベル多様体, (iii) スタンダード予想が正しい。

参考文献

- [1] W. FULTON, *Intersection Theory*, 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1997.
- [2] H. GILLET AND C. SOULÉ, *Intersection theory using Adams operation*, Invent. Math. **90** (1987), 243–277.
- [3] H. HIRONAKA, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*, Ann. Math. **79** (1964), 109–326.
- [4] A. J. DE JONG, *Smoothness, semi-stability and alterations*, Publ. Math. IHES **83** (1996), 51–93.
- [5] K. KURANO, *A remark on the Riemann-Roch formula for affine schemes associated with Noetherian local rings*, Tohoku Math. J. **48** (1996), 121–138.
- [6] K. KURANO, *Numerical equivalence defined on Chow groups of Noetherian local rings*, preprint (<http://www.math.meiji.ac.jp/~kurano/>).
- [7] K. KURANO AND P. C. ROBERTS, *Adams operations, localized Chern characters, and the positivity of Dutta multiplicity in characteristic 0*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 3103–3116.
- [8] P. C. ROBERTS, *MacRae invariant and the first local chern character*, Trans. Amer. Math. Soc., **300** (1987), 583–591.
- [9] P. C. ROBERTS AND V. SRINIVAS, *Modules of finite length and finite projective dimension*, to appear in Invent. Math., **151** (2003), 1–27.
- [10] J.-P. SERRE, *Algèbre locale, Multiplicités*, Lecture Notes in Math. **11**, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1965.
- [11] R. W. THOMASON AND T. TROBAUGH, *Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories*. "The Grothendieck Festschrift", Vol. III, 247–435, Progr. Math., **88**, Birkhauser Boston, Boston, MA, 1990.

明治大学理工学部数学科

214-8571 川崎市多摩区東三田 1-1-1

kurano@math.meiji.ac.jp

<http://www.math.meiji.ac.jp/~kurano>