

Burgers方程式の高次近似

横浜国大・工 河村 克之 (Katsuyuki KAWAMURA)
呉 興謹 (Heung-Geun OH)
石渡 信吾 (Shingo ISHIWATA)
渡辺 慎介 (Shinsuke WATANABE)

1. Introduction

格子は分散系であるため一般には非線形性があっても衝撃波は伝播しない。しかし系にある散逸があり、その散逸の大きさが分散効果よりも大きければ衝撃波の伝播は可能になる。ここでは一次元非線形格子で完全可積分である戸田格子の等価回路に散逸を加えた系を扱う。この回路の小振幅連続体近似からキャパシタにかかる電圧に対して Burgers 方程式を導くことができる。Burgers 方程式は衝撃波の定常解を持つが、この回路では Burgers 近似の適用できない様な大きな振幅においても衝撃波が定常的に伝播する。この衝撃波は振幅が大きい程、波面が急峻になり速度が速くなる等の Burgers 方程式と同様な性質を持つが、そのずれは振幅の増加に伴い大きくなっていく。そこで Burgers 方程式に対する高次近似の方程式を求める。この高次近似の方程式は K-dV 方程式の場合と比べて複雑で複数の永年項を持つが、繰り込みの方法を適用してそれらを消去することによって、波面の傾きや速度の高次効果によるずれを見積もることができる。

今回は、この回路の数値計算とその高次近似の方程式について報告する。

2. Basic equations and analysis

2-1. Model circuit and circuit equations

一次元非線形格子と等価なモデルとして知られている非線形 LC 梯子型回路において非線形キャパシタと直列に抵抗を挿入した図1の回路を考える。回路方程式は

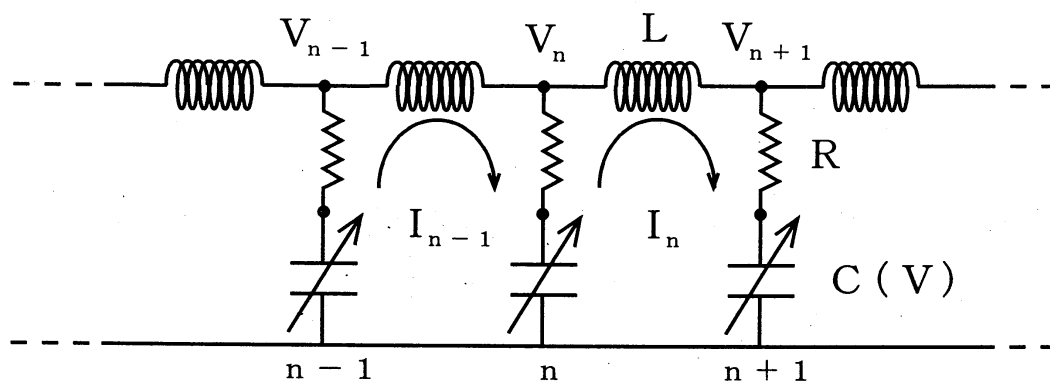


図1. 散逸のある非線形 LC 回路

$$\left\{ \begin{array}{l} L \frac{dI_n}{dt} = v_n - v_{n+1} \\ \frac{dq_n}{dt} = I_{n-1} - I_n \\ v_n = V_0 + V_n + R(I_{n-1} - I_n) \end{array} \right.$$

である。 V_0 はバイアス電圧を表す。戸田格子と等価な回路と同様に、キャパシタンスの電圧依存を

$$C(V) = \frac{Q(V_0)}{F(V_0) + V - V_0}$$

と仮定する。ここで $F(V_0)$ は特性電圧、 $Q(V_0)$ は特性電荷を表す。キャパシタに貯えられる電荷は

$$\begin{aligned} q_n &= \int_0^{V_0} C(V) dV + \int_{V_0}^{V_0+V_n} C(V) dV \\ &= q_0 + Q(V_0) \ln \left\{ 1 + \frac{V_n}{F(V_0)} \right\} \end{aligned}$$

によって与えられる。これらをまとめると、散逸のある戸田格子の方程式

$$\frac{d^2}{dt^2} \ln(1+u_n) = (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) + v \frac{d}{dt} \{ \ln(1+u_{n+1}) + \ln(1+u_{n-1}) - 2\ln(1+u_n) \}$$

が得られる。ただし、時間、電圧、抵抗は次のように規格化した。

$$t : \frac{t}{\sqrt{LC(V_0)}} \quad , \quad u_n : \frac{V_n}{F(V_0)} \quad , \quad v : \frac{R}{R_0} \quad R_0 = \sqrt{\frac{L}{C(V_0)}}$$

R_0 は回路の特性インピーダンスである。これに連続体近似

$$u_{n\pm 1} = u \pm \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pm \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \pm \dots$$

と対数の展開

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \dots$$

を用いると、次の非線形偏微分方程式を得る。

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} \right) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) - v \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} \right) = 0$$

2-2. Burgers equation and higher order equation

微小パラメータ ε を用いて従属変数 u を

$$u = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \dots$$

と展開し、独立変数 x と t を

$$\begin{cases} \xi = \varepsilon(x-t) \\ \tau = \varepsilon^2 t \end{cases}$$

と変換する。境界条件は $u=0$ ($\xi \rightarrow +\infty$), $u=A$ ($\xi \rightarrow -\infty$) であるとする。ただし、散逸係数 v は 1 のオーダーと仮定する。 ε の 4 次のオーダーから Burgers 方程式

$$L_0 u_1 = 0$$

$$L_0 = 2 \frac{\partial}{\partial \tau} + u_1 \frac{\partial}{\partial \xi} - v \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$$

ε の 5 次のオーダーから高次の方程式

$$L_1 u_2 = \frac{3}{4} \frac{\partial u_1^2}{\partial \tau} + \frac{1}{3} \frac{\partial u_1^3}{\partial \xi} - \frac{v}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau \partial \xi} - \frac{v}{2} \frac{\partial^2 u_1^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{12} \frac{\partial^3 u_1}{\partial \xi^3}$$

$$L_1 = 2 \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} u_1 - v \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$$

が得られる。

2-3. Shock wave solution

Burgers 方程式を境界条件を考慮して解くと、次の衝撃波解が得られる。

$$u_1 = \frac{A}{2} \{1 - T(\eta)\}$$

ここで

$$T(\eta) = \tanh \eta, \quad \eta = \frac{A}{4v} \left(\xi - \frac{A}{4} \tau \right)$$

である。最低次の解が無限遠での境界条件を満足しているから、高次の解は無限遠でゼロにならなければならない。つまり $\xi \rightarrow \pm \infty$ で $u_2 = 0$ になる。 u_1 を高次の方程式に代入すると

$$L_1 u_2 = \frac{1}{128} \frac{A^4}{v} \left\{ \left(-1 + \frac{1}{3v^2} \right) S(\eta)^2 - \left(2 + \frac{1}{2v^2} \right) S(\eta)^4 + 2S(\eta)^2 T(\eta) \right\}$$

となる。ただし

$$S(\eta) = \operatorname{sech} \eta$$

である。高次方程式は u_2 についての線形非同次方程式であるが、この方程式の同次方程式

$$L_1 u_2 = 0$$

を考える。Burgers 方程式を ξ で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} (L_0 u_1) &= 0 \\ L_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} &= 0 \end{aligned}$$

故に同次方程式の解は

$$u_2 \propto \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \propto S(\eta)^2$$

となるが、解くべき高次方程式の右辺を見ると、この同次方程式の解が非同次項に含まれている。このような項は時間 τ と共に振幅が増大する永年項をつくり出す。
実際

$$L_1 u_2 = \alpha S(\eta)^2 \quad \alpha : \text{arbitrary constant}$$

のような方程式を考えると解は

$$u_2 = \frac{\alpha}{2} \tau S(\eta)^2$$

となる。一方

$$L_1 u_2 = \beta \{S(\eta)^2 + S(\eta)^2 T(\eta)\} \quad \beta : \text{arbitrary constant}$$

のような方程式を考えると解は

$$u_2 = \frac{2\beta}{A} \xi S(\eta)^2$$

となりこれも永年項となる。そこでこれらの項を除いた

$$L_1 u_2 = \gamma S(\eta)^4 \quad \gamma : \text{arbitrary constant}$$

のような方程式を考えると解は

$$u_2 = -\frac{16v\gamma}{3A^2} \{S(\eta)^2 \ln C(\eta) + T(\eta)^2\}$$

となる。ここで

$$C(\eta) = \cosh \eta$$

である。しかし、これは高次解 u_2 の $\xi \rightarrow \pm\infty$ での境界条件を満足しない。そこでこの解の境界条件を満足する部分を解とすると

$$L_1 S(\eta)^2 \ln C(\eta) = \frac{A^2}{16\nu} \{2S(\eta)^2 - 3S(\eta)^4\}$$

となり高次の方程式を満足せず新たな永年項をつくり出す。そこで繰り込みの方法とこの解を組み合わせるにより高次の方程式を満足することを考える。

2-4. Renormalization

新たな変数

$$\begin{cases} \tilde{\xi} = (1 + \varepsilon \delta_1) \xi - \varepsilon \delta_2 \tau \\ \tilde{\tau} = \tau \end{cases}$$

を導入し、演算子を新たに

$$\begin{cases} \tilde{L}_0 \equiv 2 \frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}} + u_1 \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} - \nu \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\xi}^2} \\ \tilde{L}_1 \equiv 2 \frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} u_1 - \nu \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\xi}^2} \end{cases}$$

と定義すると、Burgers 方程式は

$$L_0 u_1 = \tilde{L}_0 u_1 + \varepsilon \left(\delta_1 u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{\xi}} - 2 \delta_2 \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{\xi}} - 2 \nu \delta_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tilde{\xi}^2} \right) - \varepsilon^2 \delta_1^2 \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tilde{\xi}^2}$$

となり ε の項は次のオーダーへ移す。このとき最低次の方程式は

$$\tilde{L}_0 u_1 = 0$$

となりその解は

$$u_1 = \frac{A}{2} \{1 - T(\bar{\eta})\}$$

$$\bar{\eta} = \frac{A}{4v} \left(\bar{\xi} - \frac{A}{4} \tau \right)$$

となる。次のオーダーの方程式は

$$\bar{L}_1 u_2 + \delta_1 u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \bar{\xi}} - 2\delta_2 \frac{\partial u_1}{\partial \bar{\xi}} - 2v\delta_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \bar{\xi}^2} = \frac{3}{4} \frac{\partial u_1^2}{\partial \tau} + \frac{1}{3} \frac{\partial u_1^3}{\partial \bar{\xi}} - \frac{v}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau \partial \bar{\xi}} - \frac{v}{2} \frac{\partial^2 u_1^2}{\partial \bar{\xi}^2} - \frac{1}{12} \frac{\partial^3 u_1}{\partial \bar{\xi}^3}$$

となる。境界条件を考慮して高次解を

$$u_2 = \delta_3 S(\bar{\eta})^2 \ln C(\bar{\eta})$$

と仮定して Burgers 方程式の解 u_1 を用いると高次方程式は

$$\frac{1}{128} \frac{A^4}{v} \left[\left(-1 + \frac{1}{3v^2} \right) - \left(\frac{32\delta_2}{A^2} - \frac{8\delta_1}{A} \right) - \frac{16\delta_3}{A^2} \right] S(\bar{\eta})^2 -$$

$$\left\{ \left(2 + \frac{1}{2v^2} \right) - \frac{24\delta_3}{A^2} \right\} S(\bar{\eta})^4 + \left(2 + \frac{8\delta_1}{A} \right) S(\bar{\eta})^2 T(\bar{\eta}) = 0$$

となり、繰り込み定数と高次解の振幅は

$$\delta_1 = -\frac{1}{4}A, \quad \delta_2 = -\frac{13}{96}A^2, \quad \delta_3 = \frac{A^2}{12} \left(1 + \frac{1}{4v^2} \right)$$

と決定できる。 u 、 x 、 t は εA を新たに A とおくと

$$u = \frac{A}{2} \{1 - T(\bar{\eta})\} + \frac{A^2}{12} \left(1 + \frac{1}{4v^2} \right) S(\bar{\eta})^2 \ln C(\bar{\eta})$$

$$\bar{\eta} = \frac{A}{4v} \left\{ \left(1 - \frac{A}{4} \right) x - \left(1 - \frac{13}{96}A^2 \right) t \right\}$$

と書け、衝撃波に高次の補正項が加わった形になる。高次効果により衝撃波の速度

や傾きなどが補正される。波面の時間的な傾きを

$$Gradient = \frac{\partial u}{\partial t} \bigg|_{\eta=0}$$

として定義すると衝撃波の速度と傾きは

$$Gradient = \frac{A}{2} \frac{A}{4v} \left(1 - \frac{13}{96} A^2\right)$$

$$Velocity = \frac{1 - \frac{13}{96} A^2}{1 - \frac{1}{4} A^2}$$

のようになる。

3. Simulation

散逸のある回路の回路方程式を直接数値積分した。

回路のパラメータは、インダクタンス $L=1.0$ 、特性電圧 $F(V_0)=1.0$ 、特性電荷 $Q(V_0)=1.0$ 、バイアス電圧 $V_0=0$ とした。つまり特性インピーダンス $R_0=1.0$ である。

初期条件は $t=0$ で $V_n=I_n=0$ とした。回路の初端 V_1 にステップ型に時間変化させた電圧を加えてその伝播を見た。回路の終端は回路の特性インピーダンスと同じ大きさの抵抗を取り付けて終わらせた。

4. Results and Discussions

散逸の大きさを変えた場合の伝播を見た。その波形を図2に示す。縦軸は電圧、横軸は時間である。回路の段数はいずれも $N=900$ である。上段は $R=0.01$ の場合である。この場合は散逸が非常に小さくソリトンの列が現れたような振動が見られる。中段は $R=0.1$ の場合である。この場合も散逸が十分に大きいとは言えず、波面には振動が見られる。下段は $R=1.0$ の場合である。この場合は散逸が十分大きく振動を伴わない波面になっている。これを見ると、散逸が小さくなるほど波面の振動が激しくなるのが分かる。 $R=0$ で、この回路は戸田格子と等価な回路になる。戸田格子と等価な回路にステップ電圧を加えると次々にソリトンが現れてくる。このような波は、散逸が無視できるという意味で、無衝突衝撃波と呼ばれる。 $R=0.01$ の場合は散逸が非常に小さいので戸田格子に近い振る舞いをすると考えられる。また、ここでは述べないが散逸が小さい場合その大きさをオーダリングすることに

よって、この系から K-dV-Burgers 方程式を導くことができる。 $R=0.1$ の場合、散逸は小さいが無視できず K-dV-Burgers 方程式における波の振る舞いに似ている。 $R=1.0$ の場合はもはや振動は現れず、散逸効果が分散効果よりも大きくなり衝撃波の伝播が可能になったものと考えられる。Burgers 方程式を導くとき散逸係数 ν は 1 のオーダーと仮定したが、その仮定と矛盾しない。

図 2 の下段の場合における伝播の様子を図 3 に示す。図 2 と同じく縦軸は電圧、横軸は時間である。 $N=100$ から 100 段おきに回路の段数をずらして波形を見た。この波形は回路の段数を変えても位相がずれるだけで波面の形は空間的に変化せず、定常的に伝播していると言える。

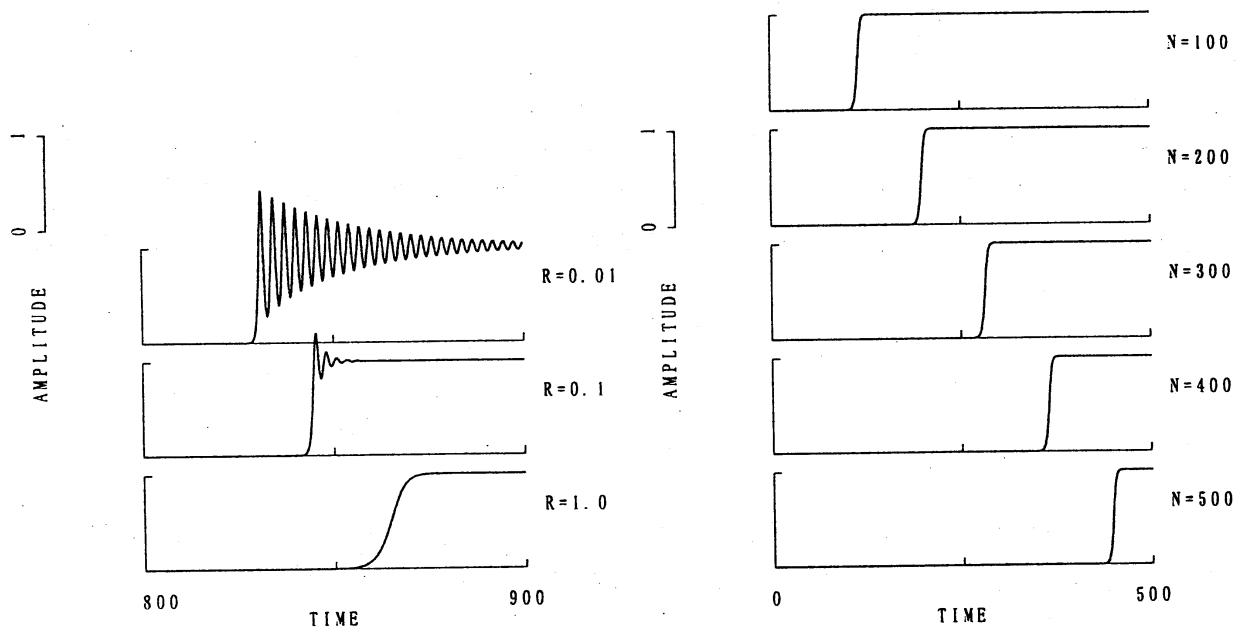


図 2. 散逸の大きさを変えた波形

図 3. 伝播波形

入力波の振幅を変化させて伝播を見た。そこで得られた定常波の傾きを数値的に測定して 2. Basic equations and analysis で定義した波面の傾きと比較した。図 4 にその比較を示す。縦軸は波面の傾きで、横軸は衝撃波の振幅である。また、同様に速度を測定した場合の比較を図 5 に示す。縦軸は速度、横軸は衝撃波の振幅である。図 4, 5 で、薄い曲線は Burgers 近似から予測される波面の傾き、速度で、濃い曲線は高次近似から予測される波面の傾き、速度である。図 4, 5 を見ると、入力振幅を変えた場合の波面の傾きや速度は振幅の増加に伴い Burgers 近似からは

外れてくるが、高次効果を考慮に入れると衝撃波の振幅が 0.4 位まで両方ともそれぞれの値が良く合致している。

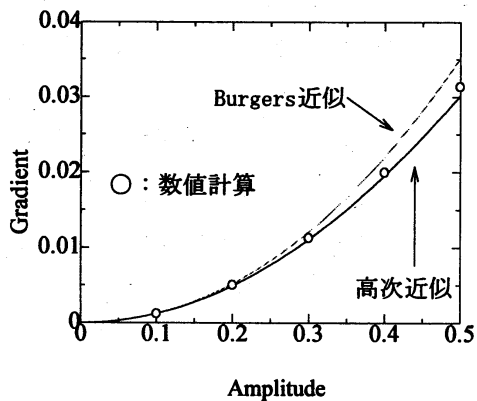


図 4. 傾き対振幅

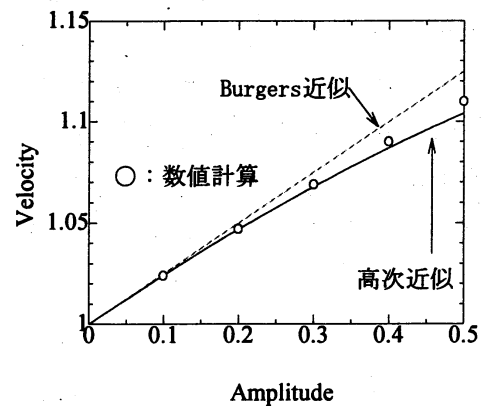


図 5. 速度対振幅

振幅 $A=0.2$ のときに数値計算によって得られた波形から、位相を合わせて u_1 を減じたものを図 6 に示す。縦軸は電圧、横軸は時間である。これにより高次解 u_2 を見積もった。ただし、複数の場所で得られた波形を重ねて描いてある。薄い線は高次の解析解で

$$u_2 = \frac{A^2}{12} \left(1 + \frac{1}{4v^2}\right) \operatorname{sech}^2\left\{\frac{A}{4v} \left(1 - \frac{13}{96}A^2\right)t\right\} \ln \cosh\left\{\frac{A}{4v} \left(1 - \frac{13}{96}A^2\right)t\right\}$$

である。数値計算で得られた波形は解析と違い非対称になっている。これは数値計算で得られた波形の波面の傾きと解析の解析での波面の傾きとのずれがあるためであると考えられる。

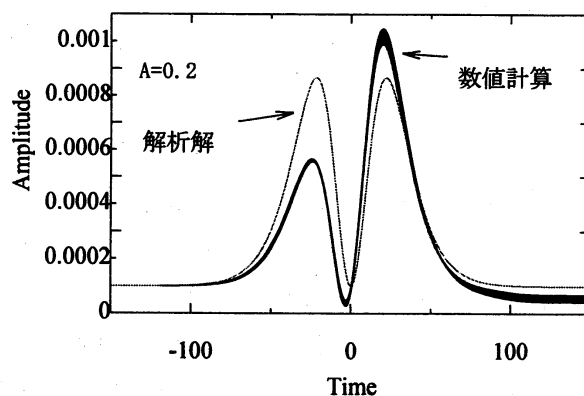


図 6. 高次解の波形

5. Conclusion

散逸のある戸田格子を伝播する衝撃波を確認することができた。この衝撃波は近似の成り立たないような大きな振幅においても伝播した。

また、この回路から Burgers 方程式とその高次方程式を導き、繰り込みの方法を適用させ高次解を求めた。衝撃波の傾きや速度は高次効果により修正された。

6. References

- 1) J. Hietarinta, T. Kuusela, B. Malomed, J. Phys. A. **28** (1995) 3015
- 2) S. Watanabe, S. Ishiwata, K. Kawamura, H. G. Oh, J. Phys. Soc. Jpn., **66**, 4 (1997), to appear
- 3) 河村克之, 石渡信吾, 渡辺慎介, 日本物理学会分科会4aL13 (1996年10月山口大)