

ソリトンと inverse scattering problem

東大 光研 戸田盛和

§1 序

非線型の波動現象が量子力学的な散乱の問題と関係づけられる場合が発見され、この現象の特長、解法などについての新しい観点が出現しようとしている。この文は等々はまだ不明確な点もあるし、すべての非線型方程式に有効であるとも考えられないが、Korteweg-de Vries 方程式、nonlinear Schrödinger 方程式、そしておそらくは modified KdV 方程式などに対して有効である。

この方法の歴史をふり返ってみると、いくつかの分野の国もろろの数学者、物理学者が、ある場合にはたがいに関係なく、前後して似た仕事を現在次ぎつぎとつづり合められてあるように思われる。現在でも知られずに進行している仕事があるかも知れない。これからたがいに統一されて確固たる観点が立てられる日が近いことを思わせる。

発見のいくつかはプリンストン大学ポフズ研究所を中心とするグループの一連の仕事の中にある。すなわち、KdV 方程式

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1)$$

に対し¹⁾ Miura et al.¹⁾ は associated eigenvalue problem

$$\psi_{xx} - (u - \lambda)\psi = 0 \quad (2)$$

を考え、固有値 λ がパラメータ t としての時間によらないことを証明した。

この計算過程に着目して、Gardner et al.²⁾ は $|x| \rightarrow \infty$ に対する $\psi(x, t)$ の漸近形から u を求める解法を考えた。これは散乱の逆問題である。 $\psi(x)$ の漸近形から u を求める逆問題はすでに Gel'fand-Levitan³⁾ および Marchenko が論じているところであり、Kay-Morse⁴⁾ も Gel'fand-Levitan の方程式を研究し、特別な場合に対する解法を考えた。この特別な場合は、反射波のない、すなわち完全透過のポテンシャル $u(x)$ であって、これはソリトンの集まりの解を与えることを Gardner は述べている²⁾。しかしその具体的な形、解の性質の吟味は与えられていない。

P. D. Lax⁵⁾ は Gardner の取扱いを数学的に整理

1.

している。

最近 Zakharov と Shabat⁶⁾ が nonlinear Schrödinger 方程式に対し、散乱の逆問題の方法を適用して成功を収めた。これは Lax と Gardner の方法を折衷拡張したものである。

この方法は疑点があるが、これらの方程式の解法などに極めて有力なものであると思われるので、Lax, Gardner や Zakharov の扱いを参考にし、簡単な場合、すなわち KdV 方程式の場合に手とめてみようと思う。

§2. 非線型方程式

$u(t)$ を含む演算子 $L = L[u(t)]$ を考え、固有値方程式

$$L\psi = \lambda\psi \quad (3)$$

に注目する。⁵⁾ パラメータ t について微分すると

$$L_t \psi + L \psi_t = \lambda_t \psi + \lambda \psi_t \quad (4)$$

よって ψ の時間変化を

$$i \psi_t = A \psi \quad (5)$$

とすると $i \lambda \psi_t = A \lambda \psi = A L \psi$ であるから

$$L_t \psi = i [L, A] \psi + \lambda_t \psi \quad (6)$$

したがって $[L, A] = LA - AL$ を得る。

さて、波動方程式

$$u_t = S[u] \quad (7)$$

が問題の非線型波動方程式であるとし、与えられた $S[u]$ の形に対して、この方程式が $u_t = S[u]$ が

$$L_t = i[L, A] \quad (8)$$

と同じであるような L と A を選べるとする。そうすると、そのような L に対し

$$\lambda_t = 0 \quad (9)$$

すなわち L の固有値は時間がかっても変わらない。

KdV 方程式の場合は

$$\left. \begin{aligned} L &= -\frac{d^2}{dx^2} + u, \\ A &= -4i\frac{d^3}{dx^3} + 3i\left(u\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}u\right) + C \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

と与えられる。 (C は x に依存しないものとする。このとき

$$L_t = i[L, A] \rightarrow u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (11)$$

$$L\psi = \lambda\psi \rightarrow \psi_{xx} - (u - \lambda)\psi = 0 \quad (12)$$

$$i\psi_t = A\psi \rightarrow \psi_t = -4\psi_{xxx} + 6u\psi_x + 3u_x\psi + C\psi \quad (13)$$

$$\text{よって (12) から } \psi_{xxx} - u\psi_x - u_x\psi + \lambda\psi_x = 0 \quad (12')$$

これに (13) を代入して (12) から (13) まで

$$\psi_t + \psi_{xxx} - 3(u + \lambda)\psi_x = C\psi \quad (14)$$

1

と分る。²⁾ $|x| \rightarrow \infty$ では $u \rightarrow 0$ とする。

負の固有値 $\lambda_n = -\kappa_n^2$ に対して, $|x| \rightarrow \infty$ で ψ は指数関数的に 0 になり,

$$\psi_n \approx c_n(t) \exp(+\kappa_n x), \quad x \rightarrow -\infty \quad (15)$$

であるが, ここで規格化 $\int \psi_n^2 dx = 1$ を用いて求めよう。
 立ってゐるとする。このとき $C \equiv 0$ であることがわかる。よって (14) に ψ を挿入し各項を積分 (たとえば $\psi = \psi_n$ に対して)

$$\int \psi \psi_t dx = \frac{\partial}{\partial t} \int \psi^2 dx = 0,$$

$$\int \psi \psi_{xxx} dx = - \int \psi_x \psi_{xx} dx = - \frac{1}{2} \int \frac{\partial}{\partial x} (\psi^2) dx = 0,$$

また $\psi_{xx} - (u - \lambda)\psi = 0$ により

$$\int \psi u \psi_x dx = \int \psi_x (\psi_{xx} + \lambda \psi) dx = 0$$

となり, 左辺は 0 になるが右辺は $C \int \psi^2 dx = C$ と分るからである。したがって $C \equiv 0$ であり, $x \rightarrow -\infty$ に対して

$$(14) \text{ は } \psi_t + \psi_{xxx} + 3\kappa_n^2 \psi_x = 0. \quad \text{これを (15) を代入すると}$$

$$\frac{dc_n}{dt} + 4\kappa_n^3 = 0$$

これから²⁾

$$c_n(t) = c_n(0) e^{-4\kappa_n^3 t}. \quad (16)$$

正の固有値 $\lambda = k^2 > 0$ に対しては, $|x| \rightarrow \infty$ のとき, ψ は $e^{\pm i k x}$ の線形結合で与えられる。そこで, x

の正の側から入射する波の反射係数を b , 透過係数を a とし,

$$\left. \begin{aligned} \psi &\approx e^{+ikx} + b e^{-ikx}, & x \rightarrow -\infty \\ \psi &\approx a e^{+ikx}, & x \rightarrow +\infty \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

とする. これらを (14) に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{db}{dt} e^{-ikx} - 4ik^3 e^{+ikx} + 4ik^3 b e^{-ikx} \\ = C e^{+ikx} + C b e^{-ikx}, \quad x \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

$$\frac{da}{dt} e^{+ikx} - 4ik^3 a e^{+ikx} = C a e^{+ikx}, \quad x \rightarrow +\infty$$

$e^{\pm ikx}$ の係数を等しくおき,

$$C = -4ik^3, \quad \frac{db}{dt} = -8ik^3 b,$$

$$\frac{da}{dt} = 0.$$

$$\left. \begin{aligned} \text{したがって } b(k, t) &= b(k, 0) e^{-8ik^3 t} \\ a(k, t) &= b(k, 0) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

束縛状態 (15) の漸近形の係数 C_n の時間変化は (16) で与えられる, 連続固有値に対する漸近形 (17) の係数の変化は (18) で与えられる。

§3. 散乱の逆問題

束縛状態の κ_n と C_n , 反射係数 $b(k)$ が与えられると

き, これから $u(x)$ を求めるのが散乱の逆問題である。

◎ 方程式は

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \{\lambda - u(x)\} \psi = 0 \quad (19)$$

であり, $x \rightarrow -\infty$ で $\psi \rightarrow e^{-ikx}$,

$$\psi(x) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x K(x, s) e^{-iks} ds \quad (20)$$

とあくと

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + k^2 \psi - u \psi &= \left\{ 2 \frac{\partial K(x, x)}{\partial x} - u \right\} e^{-ikx} \\ &+ \int_{-\infty}^x \left[K_{xx}(x, s) - K_{ss}(x, s) - u(x) K(x, s) \right] x \\ &\quad \times e^{-iks} ds \end{aligned}$$

しかし $K_{xx}(x, s) = \partial^2 K(x, s) / \partial x^2$ 等, と得る。したがって

$$\left. \begin{aligned} u(x) &= 2 \frac{\partial K(x, x)}{\partial x}, \\ \Delta(x, s) \equiv K_{xx}(x, s) - K_{ss}(x, s) - u(x) K(x, s) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

ならば (19) は満足される。

◎ $R(\{ \})$ を任意の関数として (2) 次式を証明される:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - u(x) \right] \left\{ K(x, y) + R(x+y) + \int_{-\infty}^x K(x, z) R(y+z) dz \right\} \\ = \Delta(x, y) + \left\{ 2 \frac{\partial K(x, x)}{\partial x} - u(x) \right\} + \int_{-\infty}^x \Delta(x, z) R(y+z) dz \end{aligned}$$

したがって方程式

$$K(x, y) + R(x+y) + \int_{-\infty}^x K(x, z) R(y+z) dz = 0 \quad (22)$$

は, (21) により満足される. この方程式は Gel'fand-Levitan の方程式 (Marchenko 方程式) と呼ばれている.

これらのことを念頭において逆問題にとりかかろう.

3-1. $\psi(x, k) \rightarrow e^{-ikx}$ ($x \rightarrow -\infty$) であるから, これを

$$\psi(x, k): \quad e^{-ikx} \longleftarrow \left| \begin{array}{c} u \end{array} \right| \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array}$$

で表わそう. すると

$$\psi^*(x, k) = \psi(x, -k): \quad e^{ikx} \longrightarrow \left| \begin{array}{c} u \end{array} \right| \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array}$$

これらは (19) の独立な二つの解である:

3-2 散乱を表わす波を

$$\varphi(x, k): \quad \begin{array}{c} e^{ikx} \xrightarrow{\text{入射}} \\ b(k)e^{-ikx} \xleftarrow{\text{散乱}} \end{array} \left| \begin{array}{c} u \end{array} \right| \xrightarrow{\text{透過}} a(k)e^{ikx}$$

とし, これを $\psi(x, k)$ と $\psi^*(x, k)$ とで表わし

$$\varphi(x, k) = \psi^*(x, k) + b(k)\psi(x, k) \quad (23)$$

$$= a(k) \tilde{\psi}(x, k) \quad (24)$$

と書くことができる. ここに

$$\tilde{\psi}(x, k): \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} \left| \begin{array}{c} u \end{array} \right| \longrightarrow e^{ikx}$$

3-3 (23) を用い 2 次方程式を作ります:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, k) e^{-ik y} dk = \int_{-\infty}^{\infty} [\psi^*(x, k) + b(k) \psi(x, k)] e^{-ik y} dk \quad (25)$$

この式の右辺と左辺を別々に考えよう。

右辺に (20) を用いると $x > y$ のとき

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= 2\pi K(x, y) + \int_{-\infty}^{\infty} b(k) e^{-ik(x+y)} dk \\ &\quad + \int_{-\infty}^x K(x, s) ds \int_{-\infty}^{\infty} b(k) e^{-ik(s+y)} dk \end{aligned} \quad (26)$$

を得る。左辺に $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y)} dk = 0$ ($x > y$) を用いる。

左辺における $\varphi(x, k)$ と (24) を用いる。 $u(x)$ による束縛状態は純虚数 $k = i\kappa$ によって表わされるが、

$$\psi(x, i\kappa) \rightarrow e^{-\kappa x} \quad (x \rightarrow \infty)$$

である。この束縛状態は $x \rightarrow -\infty$ でも $e^{+\kappa x}$ の形で収束するはずである。 $\tilde{\psi}(x, k) = \beta \psi^*(x, k) + \alpha \psi(x, k)$ と展開 (左とすると $x \rightarrow -\infty$ で $e^{+\kappa x}$ ($k = i\kappa$) になる) したがって $\psi(x, k)$ であるから、 $k = i\kappa$ のとき、 α をある係数として

$$\tilde{\psi}(x, i\kappa) = \alpha \psi(x, i\kappa)$$

になければならない。 Faddeev はこれを証明 (24) した。

束縛状態は $\varphi(x, k)$ の pole になっているわけであり、この pole は透過率 $\alpha(k)$ の pole ($k = i\kappa$) にはあてはまらない。^{*} したがって (25) の左辺は

$$(\text{左辺}) = \alpha 2\pi i \operatorname{Res} a(k) \Big|_{k=ix} \psi(x, ik) e^{xy} \quad (27)$$

とたす。 $2\pi m(k) = -\alpha 2\pi i \operatorname{Res} a(k) \Big|_{k=ik} \quad (28)$

とあす (20) を用いると, (27) は

$$(\text{左辺}) = -2\pi \left\{ \sum_n m(k_n) e^{k_n(x+y)} + \sum_n m(k_n) \int_{-\infty}^x K(x, s) e^{k_n(s+y)} ds \right\} \quad (29)$$

とたす。これに pole は決まると $k = k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ である。これ。

これらと (25) の両方に代入すると Gelfand-Levitan の式

$$K(x, y) + R(x+y) + \int_{-\infty}^x K(x, s) R(s+y) ds = 0 \quad (30)$$

が得られる。ここに

$$R(x+y) = \sum_n m(k_n) e^{k_n(x+y)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(k) e^{-ik(x+y)} dk \quad (30')$$

これは素数状態, k_n および $m(k_n)$, 散乱の係数 $b(k)$ を与えたとき, $R(x+y)$ が与えられるから, G-L の方程式を解いて, $K(x, y)$ を求め, したがって $u(x) = 2K_x(x, x)$ によって $u(x)$ が得られる方程式を与える。

3-4 $m(k_n)$ は §2 で $C_n(t)$ と書かれたもの。時間 t をパラメータとして含み, 3-3 で得られた $u(x, t)$ は KdV 方程式の解になっている。

文献

- 1) R.M. Miura, C.S. Gardner, M.D. Kruskal: J. Math. Phys. 9 (1968) 1204
 - 2) C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, R.M. Miura :
Phys. Rev. Lett. 9 (1967) 1095.
 - 3) I.M. Gelfand, B.M. Levitan : Amer. Math. Soc. Translations,
Ser. 2. vol 1 (1955) 253.
 - 4) I. Kay, H.E. Moses : Nuovo Cimento 3 (1956) 276 ,
J. Appl. Phys. 27 (1956) 1503.
 - 5) P.D. Lax : Comm. Pure and Appl. Math. 21 (1968) 467
 - 6) V.E. Zakharov, A.B. Shabat : Soviet Phys. JETP 34 (1972) 62
 - 7) L.D. Faddeev : Amer. Math. Soc. Translations Ser. 2 vol. 65 (1968) 139.
 - ★) Faddeev が示しているように $\psi(x, k)$ は複素 k 平面において, 上半面 ($\text{Im } k > 0$) で解析的である.
- ψ, ψ^* の記号は Zakharov-Shabat にならった. 24
は Faddeev の $f_1(x, k), f_2(x, k)$ などと対称に 2 次や
3 になる.

$$\psi(x, k) \leftrightarrow f_2(x, k)$$

$$\psi^*(x, k) \leftrightarrow f_2(x, -k)$$

$$\tilde{\psi}(x, k) \leftrightarrow f_1(x, k)$$

$$\varphi(x, k) \leftrightarrow \psi_1(x, k)$$

また, $a(k) \leftrightarrow S_{11}, \quad b(k) \leftrightarrow S_{12}.$