

超伝導の量子ビットとその測定過程 (実験に基づく理論)

中ノ勇人

日本電信電話株式会社 NTT 物性科学基礎研究所 超伝導量子物理研究グループ
nakano@will.brl.ntt.co.jp; URL <http://www.brl.ntt.co.jp/people/nakano-q>

1 はじめに

従来の計算機では事実上不可能であった計算を可能とする超高速計算機、「量子コンピューター」の提案が注目されている。量子コンピューターは主として量子力学の重ね合わせの原理を利用した超並列計算によって高速化が図られているので、従来の計算機のメモリーやレジスターの基本単位である「ビット」に相当するものは、2つの状態の量子力学的な重ね合わせを保持したり制御したりできる素子でなければならない。このような量子2状態素子のことを「量子ビット」あるいは「qubit (キュービット quantum bit)」と呼ぶ。原理的には量子2状態系であれば量子ビットになり得るはずだが、量子ビットを実際に物理系で構成する際には、いろいろな実用上の制約から、有望な候補と考えられている物理系はそれほど多くはない。その中で、ここ1,2年の実験、理論の進展が目覚ましいものに、超伝導と Josephson 接合を使った量子ビットがある。超伝導微小回路で構成される超伝導量子ビットにはいくつかの種類があるが、私の所属するグループでは数年前から、超伝導ループに捕捉されている磁束の数の自由度を利用した「超伝導磁束量子ビット (superconducting flux-qubit)」の実験を行っており、私はグループの一員として理論の面から密接な議論と考察を重ねてきた。

この講義では

- 量子計算および量子コンピュータの簡単な説明を行なった後、
- (磁束量子ビット型に限らない) 超伝導を使った量子ビットの幾つかの種類について、その概念と基礎的理論を解説する。
- 現在までに報告のある実際の実験を、理論的解説を加えながら紹介する。特に、個々の実験で「量子ビットの状態読み出し」に用いている「測定方法」に注目して、その特徴を理論的に解説する。
- 我々のグループの実験で現れた一見奇妙な測定結果について、筆者らが「量子ビットと測定系の合成系の時間発展」の理論的計算を行なうことによって得た「解釈」を紹介する。

実験の紹介の目的はあくまで、個々の量子ビットと測定方法を理論的に解析するための基礎を与えることにあるので、実験方法と結果の詳細を紹介するつもりはない。実験そのものの解説は極端に省いてある。したがって、この講義ノートを読む際には、参考文献に挙げておいた実験の原論文の参照が必要になるだろうと思われる。

2 量子ビットの基礎知識

この講義ノートでは紙数の都合上、量子計算機 (quantum computer) がどんなものであるかは割愛して、量子ビットの話から始める。量子計算機と量子計算については、[1, 2, 3, 4] などを読んでほしい。

その量子計算機のもっとも基本的な単位 (部品) が量子ビット (quantum bit あるいは qubit) である。論理素子としては、たとえば、 $|0\rangle, |1\rangle$ という2つの状態の任意の量子力学的重ね合わせ状態を保持したり制御したりできるような素子である。

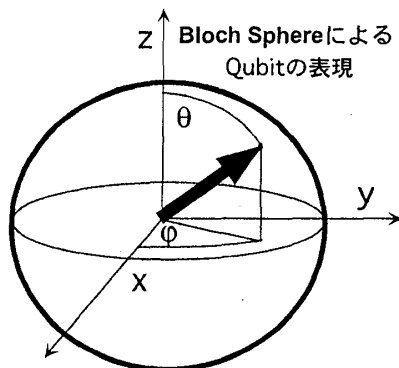


Figure 1: Bloch sphere による qubit の状態の表示

2.1 量子ビット (qubit) とは何か?

Answer: 「2 状態の量子系」である。

量子計算機は「量子状態の変換機」であるから、どんな状態 (波動関数) を入力、出力としても良いのだが、古典デジタル計算機とのアナロジーで考えたい、しかも 2 進法とのアナロジーで考えたいので、通常、以下のように設定する。

複数の「2 状態の量子系」を用意し、この「複数の量子系の合成系」の状態、を量子計算機の「状態」とする。

このとき、個々の「2 状態の量子系」というのが量子ビット (qubit) と呼ばれている。

1 つの「2 状態の量子系」について、その 2 つの状態を $|0\rangle, |1\rangle$ とする。ここで、

$$\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1, \quad (1)$$

$$\langle 0|1\rangle = 0, \quad (2)$$

と、直交および規格化を仮定しても一般性を失わない。この系の状態は、純粋状態であればどんな状態でも、必ず

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad (|a|^2 + |b|^2 = 1) \quad (3)$$

の形をしている。この状態はまた、

$$|\psi\rangle = \cos[\theta/2]|0\rangle + e^{i\varphi} \sin[\theta/2]|1\rangle, \quad (4)$$

と書くこともできる。このような表示を Bloch sphere による表示と呼ぶ (Fig. 1)。

この状態そのものが、ひとつの qubit がもっている情報である。したがって「qubit の情報を完全に保つ」ためには、 a および b という「連続的な係数」がまったく損なわれることなく保たれる、のでなければならない。

この観点からすると、qubit は連続的な情報を記録されているアナログメモリである。アナログであるという性質は、何も操作を行なわないで情報を保持しているだけ、という状況では常に正しい。しかし「測定」という過程まで考えると、離散的な状態へのジャンプが入ってくる。この部分はむしろデジタルである。^{1 2}

¹ しかし、 n 個の qubit を使って k -qubit ぶんの情報 ($n > k$) を表現して信頼度を高める、などのことを考えるときには、多次元 Hilbert 空間での状態ベクトルの直交性、という離散的な性質が議論に入ってくる。「量子誤り訂正符号」などはこの離散性を使っている。この観点はある意味でデジタルと云えないこともない。

² 非常に重要なことをここでコメントしておく、qubit とは、物理的な量子系の構成単位なのであって「情報量の単位」

2.2 qubit と spin の関係

Eq. (3) の形で表される 2 状態量子系に作用するエルミート演算子は全て、

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

という 3 つの演算子の線形結合で表される。

上の 3 つの演算子は spin の Pauli 行列と同じだから、2 状態の量子系は「算数の上」で、spin と同じに扱えることがわかる。この性質を用いて、qubit を spin に準えるアナロジーが可能となるが、あくまで「算数の上」で同じなのであって、物理まで同じとは限らない。特に、超伝導磁束 qubit の議論では「磁束」が出てくるので、算数としての spin、と物理的なリング電流による磁場、とを混同しないように注意しなければならない。

2.3 量子ビットのエネルギー

通常、「qubit をつくる」というのは、何か 2 つの量子状態の間に量子的な遷移を設けることであるから、イメージとしては、Double-well Potential の問題、と見立てることができるので、この観点から簡単に整理しておく。

2 つのポテンシャルに局在した状態を $|L\rangle, |R\rangle$ とし、各々のエネルギーを $\varepsilon_0, -\varepsilon_0$ とする。言うまでもなく、

$$\langle L|R\rangle = 0 \quad (6)$$

である。($2\varepsilon_0$ が、 $|L\rangle, |R\rangle$ の状態のもとのエネルギー差、である。) ポテンシャルが実際には何なのかはここでは忘れる。この 2 つの状態の間に、エネルギー $-\Delta$ の遷移を許す。 $|L\rangle, |R\rangle$ を、spin 演算子 σ_z の固有状態とすると、spin 表示した Hamiltonian は

$$H = \varepsilon_0 \sigma_z - \Delta \sigma_x \quad (7)$$

となる。

エネルギー固有状態は、

$$|\psi_B\rangle = \frac{1}{\sqrt{D}} \left((\varepsilon_0 + \sqrt{\varepsilon_0^2 + \Delta^2})|L\rangle + \Delta|R\rangle \right) \quad (8)$$

$$|\psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{D}} \left(\Delta|L\rangle + (\varepsilon_0 - \sqrt{\varepsilon_0^2 + \Delta^2})|R\rangle \right) \quad (9)$$

となり、各々のエネルギーは、

$$\varepsilon_{A(B)} = \mp \sqrt{\varepsilon_0^2 + \Delta^2} \quad (10)$$

である。ここで、

$$D = \Delta^2 + \left(\varepsilon_0 + \sqrt{\varepsilon_0^2 + \Delta^2} \right)^2 \quad (11)$$

とした。

多くの場合、量子ビットの ε_0, Δ は人為的にある程度制御可能である。Figure 2 に、 Δ は固定して ε_0 を変化させたときのエネルギー固有値を表示した。 $\varepsilon_0 = 0$ のところには 2Δ のエネルギー Gap が現れる。 $|L\rangle$ と $|R\rangle$ の量子的な重ね合わせが出来ていることの一つの状況証拠である。 $\varepsilon_0 = 0$ では、エネルギー固有状態は $|L\rangle, |R\rangle$ の bonding 状態および anti-bonding 状態

$$|B(A)\rangle = (|L\rangle \pm |R\rangle)/\sqrt{2} \quad (12)$$

ではない。古典的な情報では、bit という「物理的な単位」が同時に「情報量の単位」でもあった。つまり、2 つの物理的な bit を用意すると、それは 1 つのときの 2 倍の情報を表現することが出来た。qubit はそうではない。量子情報はまだその「量」を計る明確な単位がない。仮に、1 つの qubit がもつことの出来る情報の量が何らかの単位で a だったとしても、では 2 つの qubit では $2a$ かというと、そんなことははっきりしない。

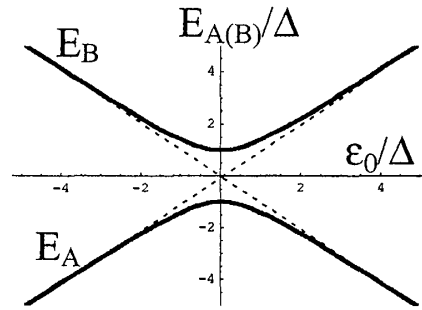


Figure 2: 量子ビットのエネルギーバンド図

であり、 $\epsilon_0 = 0$ から離れるに従って、 $\epsilon_0 < 0$ では上の状態が純粋な $|L\rangle$ へ、下の状態が純粋な $|R\rangle$ へとになっていく。 $\epsilon_0 > 0$ ではその逆である。

$\epsilon_0 = 0$ のとき、初期状態 $|\psi(0)\rangle = |L\rangle$ を用意することができると、これはエネルギー固有状態ではないから

$$|\psi(t)\rangle = \cos[\Delta t]|L\rangle + i \sin[\Delta t]|R\rangle \quad (13)$$

の時間発展 ($|L\rangle \leftrightarrow |R\rangle$ の振動) をする。これを時間領域で観測するのがもっとも確からしい重ね合わせ状態の確認になる。

3 超伝導量子ビット

3.1 qubit を実現する量子系に求められるもの

量子ビット (qubit) をつくるには、原理的にはどんな量子系を用いても構わない。1 qubit あたり最低 2 状態あれば良い。

しかし、現実には現在の技術で実際に qubit が実現している、あるいは、実現出来そうな物理系は極めて限られている。それは何故か。

量子計算を行なうためには、実現した qubit の集団を望む初期状態にセットし、プログラム実行のプロセス、すなわち時間発展をさせなければならない。他の点でどんなに有利な qubit が構成できても、初期状態を人為的に用意できない qubit は計算には使えない。Input/Output の相関こそが「計算」であるから、Output が得られてもそのときの Input がまったくわからなければ何の情報も得られない。

「プログラム」の実行は、qubit の集団という量子系の時間発展である。望みの計算をさせるためには、望みの時間発展を与えられなければならない。時間発展は、系自身のもつ Hamiltonian と、時間発展の最中に外部から加えられる操作 (外場) によって与えられる。

現在、実験的に最も成功しているのは、原子核の spin を qubit として用いている NMR (核磁気共鳴) の量子計算機である。他に、Photon、ion などがあるが、将来的に多数 qubit の量子計算機を実現するという観点からは、Solid State での量子計算機をつくるべきだ、という見方が大勢である。それは、

- 現在のコンピュータを支えている基本技術が、トランジスタとその集積回路であるから、将来の高速化、集積化、を実現できるのは、Solid State の量子計算機であろう、との期待

による。NMR で現在、すでに複数 qubit の量子計算が実現出来ているが、これでは 10 qubit ぐらいが限界で、本当の多数 qubit の実現は不可能ではないか、という懸念がある。

その懸念の正否はここでは考えないで、話を Solid State、それも電子系で qubit をつくることに限る。

3.2 超伝導量子ビットを学ぶための「超伝導入門」

3.2.1 金属の電子状態と半導体量子 Dot

ここに縦横高さが $0.1\mu\text{m}$ の金属の固まりがあったとする。これが普通の金属ならこの中の (伝導) 電子の数は約 10^8 個。これを伝導帯に詰めていくと、電子は Fermion なので同じ状態には (spin の up/down も考えて) 2 個しか入れないから、全部詰めた段階でエネルギーは 1eV 程度。これを Fermi energy という。このときの電子の波長は 0.1 nm 程度だから、金属の固まりのサイズを考えると、電子のエネルギー準位の間隔は極めて狭く、準位が離散的であることは観測できない。事実上、電子の状態密度は連続的につながっていることになる。絶対零度のとき、電子を詰め終わった Fermi energy E_F の上下では、電子の占有確率が $1/0$ と不連続に変化する。この状況を運動量空間で描くとちょうど $\text{energy}=E_F$ のところが面をなし、Fermi 面と呼ばれる。Fermi 面のところでも電子の準位の離散性は見えないから、事実上この付近では電子状態が縮退しているようなものである。このように Fermi 面の近傍に連続的に状態があるから、基底状態にどんなにわずかなエネルギーを与えても電子を励起することができる。励起された電子状態は、フォノンや電子のつくりだす電磁場と弱い相互作用をして遠からず緩和する。励起状態の量子性はこの緩和時間で壊れてしまう。だから普通の金属電子の状態はそのままでは量子ビット (ひいては量子計算機) をつくるのには利用できない。

金属のサイズが大きいために電子状態の準位の離散性が見えなかったのであるから、系のサイズをうんと小さくすれば、電子の波長をずっと長くすれば離散的な準位ができて、量子ビットに使えるだろう。この発想が、半導体量子 Dot である。有効質量の小さなバンドをもつ半導体では電子の波長が $0.01\mu\text{m}$ 程度に長くなり、現在の技術の限界に近い加工でこの程度の大きさの領域に電子を閉じ込めることができる。こうして達成された離散的な電子の準位を使って 2 状態量子系としたものが半導体 Dot 量子ビットである。半導体量子ビットの実験も進められており、現在では 2 状態の実現とその混成によるバンド分裂、さらには時間領域での振動まで見えている [5, 6]。

では、金属の固まりのサイズが (最初に考えたように) サブミクロンであったなら、量子ビットは作れないかという、そうではない。普通の電子状態では上で述べたように不可能だが、超伝導という極低温で実現する特異な電子状態になっていると可能となる。

この条件を実験的に満たした電子系の量子ビットは、今のところ超伝導を使った量子ビットだけである。後に述べるように、超伝導を使った量子ビットは、大別して超伝導磁束量子ビット (superconducting flux qubit) と超伝導電荷量子ビット (superconducting charge qubit) との 2 種類がある。

3.2.2 超伝導転移

先程の金属の固まりの中の電子どうしの間に弱い引力相互作用があると、その金属は、ある温度以下に冷やされたとき「超伝導」という特異な状態に相転移する。たとえば金属が Al のとき、その転移温度は 1K 程度である。引力相互作用のために、運動量がほぼ逆向きをもつ spin の異なる 2 つの電子が対になって、すべての対が同じ量子状態に落ち込んで凝縮したほうが系全体のエネルギーが小さくなる。その差を $\Delta E = E_{\text{super}} - E_{\text{normal}}$ としよう。ここで添字 _{normal}、_{super} はそれぞれ、普通の金属状態 (常伝導状態)、超伝導状態を意味する。それでも温度 T の高いときは、自由エネルギー

$$F_{\text{super}} = E_{\text{super}} - S_{\text{super}}T \quad (14)$$

$$F_{\text{normal}} = E_{\text{normal}} - S_{\text{normal}}T \quad (15)$$

を比べたとき、 ST の効果で自由エネルギーの小さい常伝導状態をとる。なぜなら、電子が各々異なる状態にある常伝導状態のエントロピー S_{normal} のほうが、すべての電子対が同じ状態に落ち込んだ超伝導状態のエントロピー S_{super} よりはるかに大きいからである。

転移温度 T_c 以下では内部エネルギーの差 $\Delta E = E_{\text{super}} - E_{\text{normal}}$ が効いて、電子は Cooper-pair と呼ばれる対をつくり全て同じ状態に凝縮する。これが超伝導状態である。

3.2.3 巨視的波動関数

超伝導状態では、基底状態の近傍にはもはや励起状態はない。個々の電子の状態の違いを反映したものが金属の Fermi 面近傍の励起状態だったが、超伝導状態では Fermi 面近傍にいた電子はすべて基底状態に落ち込んで、個々の自由度がなくなっているからである。こうして Fermi エネルギーの上下 Δ_S のエネルギー範囲の状態密度が消失する。これを超伝導ギャップと呼ぶ。このギャップエネルギーを越える励起をしない限り、すべての電子 (Cooper-pair) は一斉に同じ運動をするから、個々の電子の自由度は見えない。このとき、この Cooper-pair の集団 (超伝導状態) に対するひとつの波動関数のようなもの Ψ が定義できて、秩序パラメータ (order parameter)、あるいは巨視的波動関数 (macroscopic wave-function) と呼ばれる。通常この波動関数の振幅は超伝導ギャップ Δ_S に比例する。

$$\Psi(r, t) \propto \Delta_S(r, t) \quad (16)$$

ここで、波動関数が場所 r と時刻 t の関数であり得ることを考慮して $\Psi(r, t)$ と書いた。

巨視的波動関数は、普通の波動関数と同じように「干渉」の性質をもつ。しかも、この状態をつくっているのが圧倒的多数の Cooper-pair (電子) であって、そのすべてが同じ状態にあるため、この波動関数の性質は多少の外乱では壊れない。それゆえ、巨視的な大きさの超伝導体の全体がひとつの波動関数によって表せるという特異な量子状態である。

大雑把にいうと、超伝導状態の coherence が壊れにくいのは、強磁性金属に発生している磁性が簡単には壊れないと同様の理由による。強磁性金属では、巨視的な数の spin が相互作用によってすべて同じ向きを向いて、全体として安定な状態になっている。この磁性の向きを変えるためには、巨視的な数の spin の向きを一斉に変える必要があるから、強磁性状態は安定して存在する。

3.2.4 小さな領域に閉じ込められた超伝導

十分小さな領域にかつちりと Cooper-pair を閉じ込めることができたならば、超伝導状態の金属の固まりには、Cooper-pair の動かないただひとつの基底状態しかない。Cooper-pair が運動をしようとするすると巨視的波動関数に空間微分を発生しなければならないが、Cooper-pair の間には電荷による斥力が働いているため、このような状況を運動が阻止されるからである。このとき、超伝導金属の固まりは、「1 状態の量子系」である。それでも、この超伝導の小さな固まりに Cooper-pair を一個付け加えたり奪い去ったりする自由度は残る。ところが、Cooper-pair が 1 つ増減しても超伝導にとってはそれも基底状態である。ただし、増減に伴う帯電エネルギーが発生するときは、「異なる帯電数」でラベルづけされる異なる状態となる。実はこの自由度が超伝導電荷量子ビットの原理と関係している。

3.2.5 超伝導電流

端のない長い超伝導体であれば、Cooper-pair がすべて一定速度で並進運動している状態をとることができる。そのときの巨視的波動関数は

$$\Psi(x, y, z) \propto e^{iax} \quad (17)$$

という位相に均一な勾配のついた状態になっている。並進運動の方向を x 軸とした。勾配 a が並進運動の速さに比例する係数である。Cooper-pair がこのような並進運動をしているときはその速さ v_0 とすると、 $I_S = 2en_s v_0 S$ の超伝導電流が流れている。ここで n_s は Cooper-pair の密度、 S は試料の断面積である。

面白いことに、位相の勾配さえ保持できればこの超伝導電流が流れている状態は緩和しない。これが通常の電気伝導と全く異なるところである。通常の電気伝導は、電場による力を加えられた電子が、加速しては散乱されて減速し、という散逸的な (dissipative) な過程で運ばれる電流であるのに対し、超伝導電流は静的な位相差が与えられれば、熱平衡状態で Cooper-pair が並進運動をするから散逸のない電流となっている。

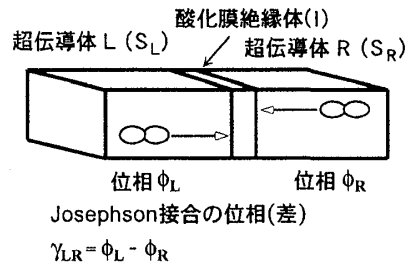


Figure 3: Josephson 接合 (S/I/S)

3.2.6 超伝導リングと磁束の量子化

では、超伝導体でリングをつくとどうなるだろうか。リングの直径を d とすると、一周すれば波動関数は出発のときと同じものに戻っている必要があるから、

$$\Psi(x = \pi d) = \Psi(x = 0)e^{2i\pi n} \quad (18)$$

でなければならない。 n は整数である。このリングの面に垂直に磁場 B をかけているために位相の空間変化が現れている場合を考える。リングの中を磁束 Φ が貫いているとき、リングに沿う波動関数の位相変化は一周すると $2\pi\Phi/\Phi_0$ である。ここで $\Phi_0 = h/(2e)$ は磁束量子である。この位相変化が Eq. (18) を満たすためには、

$$\Phi/\Phi_0 = n \quad (19)$$

すなわち、リングを貫く磁束は磁束量子のきっちり整数倍でなければならない。これを超伝導リングにおける「磁束の量子化 (flux quantization)」と呼ぶ。

現実には外から半端な磁束に相当する磁場を印加することができるが、そのときは、リングが貫く磁束は磁場 $\times$ リングの囲む面積ではなくて、量子化された磁束がリングを貫き、半端な磁束はリングの外を通るよう磁力線が曲げられる。

外から印可された磁場がちょうど

$$\Phi_{\text{ex}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \Phi_0 \quad (20)$$

だったらどうなるのか。磁束の量子化が $\Phi = n\Phi_0$ となるのかそれとも $\Phi = (n+1)\Phi_0$ となるのか、どっちに行ってもよいような非常に両義的な状態であることがわかるだろう。この状況が、超伝導磁束量子ビットの原理と関係している。

3.3 Josephson 接合

低温において超伝導状態へと相転移した超伝導物質では、超伝導 gap energy Δ_S より小さいエネルギーですべての電子は Cooper-pair となって基底状態に落ち込んでおり、しかもその基底状態はすべての Cooper-pair がただひとつの状態にあって個々の区別のつかない巨視的状态である。

したがって、ひとつ超伝導電極をもってきたときそれは 1 状態の量子系である。ゆえに、qubit すなわち 2 状態の量子系をつくるには、もうひとつの自由度を何らかのかたちで導入しなければならない。そのために現在、実験および提案されているものは、2 つの超伝導電極を酸化膜などの障壁を介して接触させた Josephson 接合を使っている (Fig. 3)。

Josephson 接合は、超伝導を弱くした部分、というイメージをもっておくと良い。障壁がなければ、電子 (Cooper-pair) の通行は十分に行なわれるから、その場所の Cooper-pair も混じりあって全体に拡がった超伝導が現れるのだが、Josephson 接合では、酸化膜でできたトンネル障壁によっ

て、障壁の片側から他方への電子 (Cooper-pair) の出入りが制限されるため、十分な混じり合いをすることができないため疎遠になって超伝導のつながりが弱められてしまうのだ。

障壁のない超伝導体の超伝導状態を壊すには、超伝導ギャップほどのエネルギーが必要となるが、Josephson 接合の部分だけ超伝導を壊すのなら、ギャップよりずっと小さな Josephson 結合エネルギー程度で可能となる。³ Josephson 結合エネルギーとは、両側の Cooper-pair の障壁を通した弱い結合のエネルギーであって、Josephson 接合の最大超伝導電流を決める。

Josephson 接合においても超伝導電流 I_S は巨視的波動関数の空間的勾配 (微分) によって流れる。接合の両側の超伝導電極の位相差が γ_{LR} であったなら (トンネル接合の場合)

$$I_S = I_0 \sin[\gamma_{LR}] \quad (21)$$

という関係がある。 I_0 がこの接合の最大超伝導電流である。

量子ビットに用いるのは、微小な接合であり、重要なパラメータは、

- Josephson 結合エネルギー $E_J = \left(\frac{\hbar}{2e}\right) I_0$
- 帯電エネルギー $E_C = \frac{2e^2}{C}$

の 2 つである。

C は接合の capacitance である。

この 2 つのエネルギーの大小関係によって、Josephson 接合の振る舞いは大きく異なる。これを簡便な Hamiltonian を使って考えてみる。Hamiltonian は近似的に

$$H = \sum_n E_C (n - n_g)^2 |n\rangle \langle n| - \sum_n \frac{E_J}{2} (e^{i\gamma_{LR}} |n\rangle \langle n+1| + e^{-i\gamma_{LR}} |n+1\rangle \langle n|) \quad (22)$$

で与えられる。ここで、 $|n\rangle$ は 2 つの超伝導電極の中にある Cooper-pair の数の差 $n = n_L - n_R$ が n 個である状態、 γ_{LR} は 2 つの超伝導電極の巨視的な位相の差、 $\gamma_{LR} = \phi_L - \phi_R$ を示している。 n_g はゲートによって誘起された電荷 (Cooper-pair) の数であり連続的な値 ($0 \leq n_g < 1/2$) をとる。以下では、 n のことを「接合の Cooper-pair の数」と呼ぶが本当の意味はここで定義したように接合を介した分極電荷を担う Cooper-pair の数である。

3.4 超伝導電荷量子ビット

まず $E_C \gg E_J$ のときは、Eq. (22) の右辺第 1 項 (帯電エネルギー) が大きくて、 $-1 < n - n_g \leq 1$ の n の状態以外はすべて高いエネルギーとなって現象に関与しないので、Eq. (22) は

$$\begin{aligned} H &= \sum_{n=0,1} E_C (n - n_g)^2 |n\rangle \langle n| - \sum_{n=0,1} \frac{E_J}{2} (e^{i\gamma_{LR}} |n\rangle \langle n+1| + e^{-i\gamma_{LR}} |n+1\rangle \langle n|) \\ &= E_C (n_g^2 |0\rangle \langle 0| + (1 - n_g)^2 |1\rangle \langle 1|) - \frac{E_J}{2} (e^{i\gamma_{LR}} |0\rangle \langle 1| + e^{-i\gamma_{LR}} |1\rangle \langle 0|) \end{aligned} \quad (23)$$

となる。この式をみれば、on site エネルギーが n_g^2 および $(1 - n_g)^2$ の 2 つのサイトの間に、エネルギー $\frac{E_J}{2}$ の遷移が許された 2 状態量子系であることがわかるだろう。特に、 $n_g = 1/2$ では 2 つのサイトのエネルギーは等しくなる。これを 1 個の qubit とするのが「超伝導電荷量子ビット」の基本的なアイデアである。

2 つの site とは今の場合、Cooper-pair 1 個ぶんの電荷が接合の左右のどちらの電極にいるか、という自由度と対応している。Josephson 接合エネルギー E_J が、その 2 つの状態の間の量子的な遷移の特徴的なエネルギーになっている。

これを 2.2 節で述べたように spin 演算子で表現すると、Hamiltonian は

$$H = \frac{E_C}{2} (1 - 2n_g) \sigma_z + \frac{E_J}{2} \sigma_x \quad (24)$$

³ 大きな超伝導体についてのこの記述は必ずしも正しくない。実際には他の要因によって超伝導が壊れることもある。ここでは簡単ため、そういうことは考えていない。

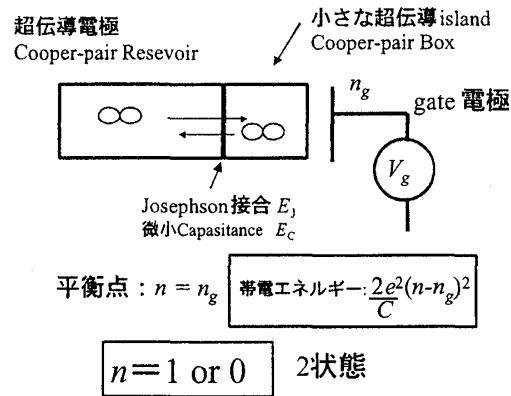


Figure 4: 超伝導電荷量子ビット (superconducting charge qubit)

となる。 σ_z の固有状態は云うまでもなく、「Cooper-pair 1 個が island 内にある状態 $|1\rangle$ 」と「island の外にある状態 $|0\rangle$ 」である。 $n_g \sim 1/2$ において、電荷量子ビットの状態 $|\psi\rangle$ は

$$|\psi\rangle \sim (|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2} \quad (25)$$

のような量子的重ね合わせ状態になる。

3.5 超伝導磁束量子ビット

一方、 $E_C \ll E_J$ のときには、Eq. (22) の右辺第 2 項 (Josephson energy) が大きくて、 $\sum_n \rightarrow \int dn$, $|n| \gg n_g$ の近似が成立して Eq. (22) は

$$H = \frac{C}{2} \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 \left(\frac{\partial \gamma_{LR}}{\partial t} \right)^2 - E_J \cos[\gamma_{LR}] \quad (26)$$

となる。ここで

$$\hbar \left(\frac{\partial \gamma_{LR}}{\partial t} \right) = 2eV = \frac{4e^2 n}{C} \quad (27)$$

の関係を使った。 V は Josephson 接合にかかっている電圧である。Eq. (26) を見れば、 γ_{LR} が 1 次元の cosine potential の中で運動する質量 C の粒子のような運動をすることがわかるだろう。この段階ではまだ 2 状態系になっていないことに注意。

3.5.1 超伝導リングの磁束量子化

ここで、この 1 個の Josephson 接合を含む超伝導リングをつくる。⁴ 超伝導リングに垂直な方向に静磁場を加えたとき、超伝導の波動関数 (秩序パラメータ, order parameter) の一価性から、リングを貫く磁束は磁束量子 $\Phi_0 = h/(2e)$ の整数倍しか許されない。このためリングには超伝導電流が流れて自己磁場を発生し磁束の帳尻を合わせる。これを「磁束の量子化」と呼ぶことは既に述べた。

⁴ Josephson 接合 1 個を含むリングのことを一般に rf-SQUID (ラジオ波超伝導量子干渉系) と呼ぶがここではそれには触れない。

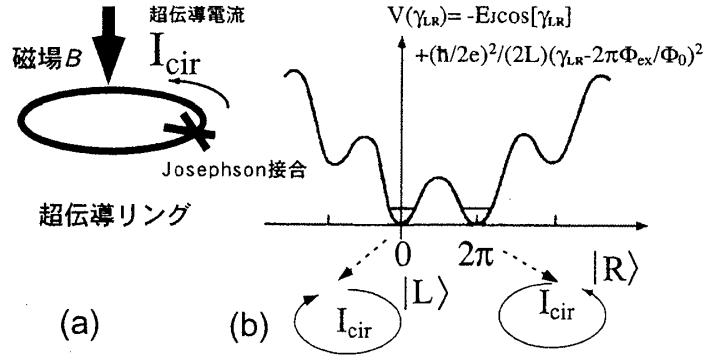


Figure 5: (a) 超伝導リング (b) 超伝導リングの位相に対するポテンシャルエネルギー

超伝導リングの一点に Josephson 接合が入れられていても基本的な原理は変わらない。ただし、この時は、磁場による位相の変化はリングの場所によらず一定にはなっておらず、Josephson 接合のところで一番大きく変化している。Josephson 接合というのは、いわば弱くなった超伝導部分であるから、位相はここで変化するのがエネルギー的に安定となるからである。

Josephson 接合の巨視的位相差 γ_{LR} も勘定に入れると超伝導リングでは

$$\gamma_{\text{LR}} - \frac{2\pi\Phi_{\text{ex}}}{\Phi_0} + \frac{2\pi LI_s}{\Phi_0} = 2m\pi, \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (28)$$

となるように、位相差 γ_{LR} とリングを流れる超伝導電流 I_s が定まる。 L はリングの inductance である。ここで、超伝導電流 I_s は Josephson 接合の性質から

$$I_s = I_c \sin[\gamma_{\text{LR}}] \quad (29)$$

で与えられることを考慮に入れれば

$$\gamma_{\text{LR}} = \frac{2\pi\Phi_{\text{ex}}}{\Phi_0} - \frac{2\pi LI_c}{\Phi_0} \sin[\gamma_{\text{LR}}] \quad (30)$$

となる。sine の周期性から $2m\pi$ を落とした。この関係 (Eq. (30)) を γ_{LR} の運動に対する potential energy で表せば

$$V(\gamma_{\text{LR}}) = -E_J \cos[\gamma_{\text{LR}}] + \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 \frac{1}{2L} \left(\gamma_{\text{LR}} - 2\pi \frac{\Phi_{\text{ex}}}{\Phi_0}\right)^2 \quad (31)$$

である。 $0 \leq \Phi_{\text{ex}}/\Phi_0 < 1/2$, $LI_c > \Phi_0$ のとき、この Eq. (31) は $\gamma_{\text{LR}} = 0, 2\pi$ の近傍に極小点をもつ Double-well potential の形をしている。特に、 $\Phi_{\text{ex}} = \Phi_0/2$ では 2 つの極小点での Potential energy は等しくなる。

ひとまずまとめると、Josephson 接合 1 つを含む超伝導リングは、 $E_C \ll E_J$ では

$$H = \frac{C}{2} \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 \left(\frac{\partial \gamma_{\text{LR}}}{\partial t}\right)^2 + V(\gamma_{\text{LR}}) \quad (32)$$

なる Hamiltonian に従う γ_{LR} をもつ量子系であることがわかる。

3.5.2 超伝導リングの 2 状態化

個々の well の極小点 (すなわち、Eq. (30) の解) の近傍では、Potential は $\frac{E_J}{2}\gamma^2$ の形の放物ポテンシャルであるから、各 well 中の量子状態は、おおまかに云って

$$\hbar\omega_p \equiv \sqrt{E_C E_J} = \sqrt{\frac{2eI_c \hbar}{C}} \quad (33)$$

の間隔のエネルギー準位をもつ調和振動子に近い。

一方、2つの well を隔てるバリアの高さは $2E_J$ 程度である。普通の Josephson 接合では $\hbar\omega_p \ll E_J$ であるから、準位はほぼ連続的に存在して、準位の量子化は見えない。

しかし、微小な Josephson 接合では、Josephson 接合の接合面積を小さくすると capacitance C と I_c は面積に比例して小さくなる。すなわち $\hbar\omega_p$ 一定のまま E_J が小さくなっていくので、やがて

$$\hbar\omega_p \sim E_J \quad (34)$$

という領域に入る。つまり、準位間隔が well を隔てるバリアの高さと同程度になる。このようなパラメータでは、各 well の最低準位のみが well に局在しており励起状態は2つの well の間を自由に行き来できる広がった状態となっている。この局在した2つの状態のみを使って2状態量子系をつくらうというのが、超伝導磁束量子ビットの基本的なアイデアである。Figure 5(b) に描いたように、隣り合う2つの well の各々の最低準位状態を $|L\rangle$, $|R\rangle$ と呼ぶことにする。これらの状態の特徴は、超伝導リングに流れている環状電流の方向が逆であり、その環状電流によって誘起される磁束も逆向きだということである。

Eq. (32) の第1項、すなわち γ_{LR} の運動エネルギーの効果で2つの well の最低準位の間の量子的な遷移が可能となる。

その遷移に特徴的なエネルギーは WKB 法で略々評価できて $(\hbar\omega_p/2\pi)e^{-\eta\sqrt{E_J/E_c}}$ 程度となる。ここで η は1程度の数因子である。

ここまで来てやっと超伝導リングは2状態量子系になり、超伝導磁束量子ビット実現のモデルとして成立する。

4 超伝導量子ビットからの情報の読み取り (readout)

さて上で、超伝導磁束量子ビット (superconducting flux-qubit) と超伝導電荷量子ビット (superconducting charge-qubit) の原理を説明したが、孤立した量子ビットが出来ても入出力がなければ意味がない。特に、出力 (読み出し read-out) は、作成した量子ビットが量子ビットとしてちゃんと動作しているか、を確認するためにも必要だから、「量子ビット」の実験ですぐ必要になる技術である。

超伝導量子ビットがちゃんと出来ているかどうかの実験的確認は以下のような段階で進むのが標準的である。

1. 熱平衡状態におけるバンド分裂を、マイクロ波照射による spectroscopy で観測する。
2. マイクロ波に駆動された Rabi 振動を時間領域で観測する。
3. マイクロ波は使わずに、量子ビットをエネルギー固有状態でない初期状態にセットすることで、その後の時間発展 (振動) を時間領域で観測する。

これは「何を測るか」である。どうやって測るかについては今から紹介する。

4.1 超伝導電荷 qubit からの情報の読み取り

4.1.1 Single Electron Transistor による微小電荷の測定

例えば、超伝導電荷量子ビットについて測定をしようとするとき、まず最初に思いつくのは、微小超伝導 island にある Cooper-pair の数の変化を検出する、すなわち、微小 island からの静電場の変化を測定すればよい、というやり方である。ここで検出しなければならないのは Cooper-pair たった1個の差であるから、極めて高感度の電荷計 electrometer が必要となる。量子ビットが微小接合を用いているという関係もあって、超伝導量子ビットでの微小電荷測定には単電子トランジスタ (Single Electron Transistor- SET) が用いられている。

SET とは、微小接合の帯電エネルギーが大きいことによる Coulomb Blockade という現象を利用した微小電荷測定器である [7, 8, 9]。Figure 6 に典型的な SET の構造を示す。対角線の引かれ

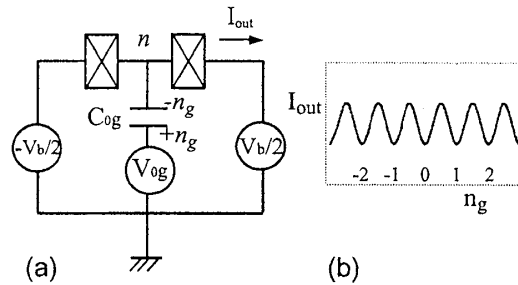


Figure 6: (a) Single Electron Transistor. (b) SET 振動

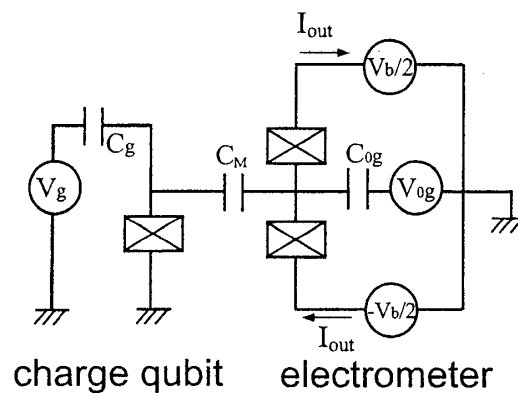


Figure 7: SET による超伝導電荷量子ビットの読み出し。

た長方形が Josephson 接合を表す。今の場合、接合はサブミクロンサイズの微小なもので、常伝導のときのトンネル抵抗は量子抵抗 $R_Q \equiv h/(2e)^2$ と同程度である。2つの微小 Josephson 接合に挟まれた超伝導 island の中の Cooper-pair は、接合の Josephson energy E_{J0} を通じて外側との出入りが可能だが、接合の capacitance C_0 が fF あるいは aF と非常に小さいため、1 個の Cooper-pair が外に出ただけでも一時的に $E_{C0}(2e)^2/C_0$ の大きな帯電エネルギー (charging energy) が発生する。 $E_{J0} \ll E_{C0}$ であれば、この charging energy に阻害されて island と外側の間の Cooper-pair の出入りはほとんど起こらない。これが「クーロン閉塞 (Coulomb Blockade)」と呼ばれる現象である。

island の中の Cooper-pair の数があるところで平衡にあったとする。この状況ではたとえ Bias 電圧 V_b を加えても、 $2eV_b < E_{C0}$ であれば、上に述べたように接合を通しての Cooper-pair の電流は流れない。この状況のときの island 内の Cooper-pair の数を $n = 0$ としよう。ところが、この island に対して Fig. 6 のようにゲート電極を設け電圧 V_{0g} を印加すると、ゲート電極からの静電場が island 内の Cooper-pair 数の平衡点をずらす。近似的に述べると、 V_{0g} によって誘起される電荷 $2en_g = (C_{0g} + 2C_0)V_{0g}$ のぶんだけずれて $n = n_g$ が平衡となる。もし、 $n_g \sim 1/2$ であれば、Cooper-pair は island の内外のどっちつかずの状況にあり、Coulomb Blockade があまり効かなくなるため、弱い Bias 電圧 V_b でも電流 I_{out} が流れるようになる。

したがって、Bias 電圧 V_b を一定にしたときの電流値 I_{out} はゲート電圧 V_{0g} に依存し、(m を整数として) $n_g = m + 1/2$ で極大、 $n_g = m$ で極小の周期関数となる (Fig. 6(b) 参照)。

このようにして、SET は超伝導微小 island への静電場の影響を極めて高い感度で測定することが可能である。これを利用して、電荷量子ビットの状態測定は SET を使って Fig. 7 のような構成で行なわれている。

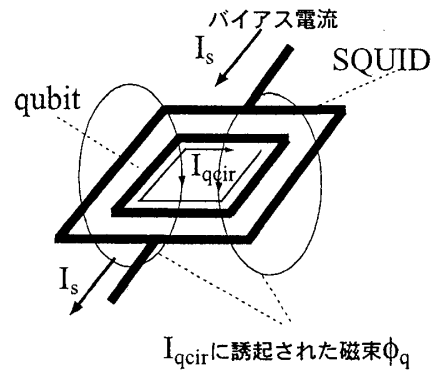


Figure 8: dc-SQUID による超伝導磁束量子ビットの読み出し。

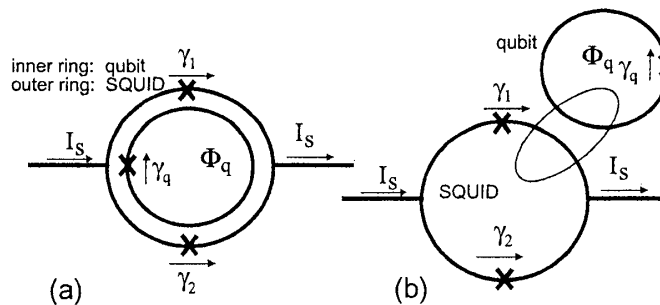


Figure 9: 超伝導磁束 qubit の測定の際の dc-SQUID の配置

4.2 超伝導磁束 qubit からの情報の読み取り

3.5 で述べたように超伝導磁束量子ビットの2つの状態 $|L\rangle$, $|R\rangle$ で異なるのは、超伝導リングを流れる環状電流によって誘起される磁場の向きである。だから、磁場を SQUID で読む、という方法が取られている。

4.2.1 dc-SQUID による磁束 qubit の測定

実験では、磁束 qubit のリング電流が誘起する微小磁場を測定するために、dc-SQUID を qubit を取り囲むように配置する (Fig. 9)。qubit の2状態がちょうどエネルギー的に縮退するような外場 $\Phi_q = (n + 1/2)\Phi_0$ を加える。このとき dc-SQUID のリングを貫く外場による磁束 Φ_{SQ} は Φ_q とは若干異なるが、重要なのは Φ_q の値のほうである。以下、外場による磁束について述べるときは、特にことわらない限り Φ_q のことである。この状況は、SQUID リングと qubit リングが相互 inductance M によって磁気的な結合をしているというモデルで表せる。

4.2.2 dc-SQUID と微小磁場の測定

dc-SQUID は既に十分に実用化された微小磁場測定装置である。Fig. 9 に示したように、2つの Josephson 接合を含む超伝導リングと直流電流バイアスを与える超伝導リードから成る。構造は磁束 qubit と非常に似ているので、以下の議論において混同しないように気をつけて欲しい。dc-SQUID のバイアス電流を0から増していくと、はじめは超伝導電流が流れるのでリード端子間に電圧は生じないが、どこかの電流値において Josephson 接合の臨界電流を越え、電圧が発生する。このときのバイアス電流値を「スイッチング電流 I_{sw} 」と呼ぶ。この電流値が SQUID のリングを貫く磁場

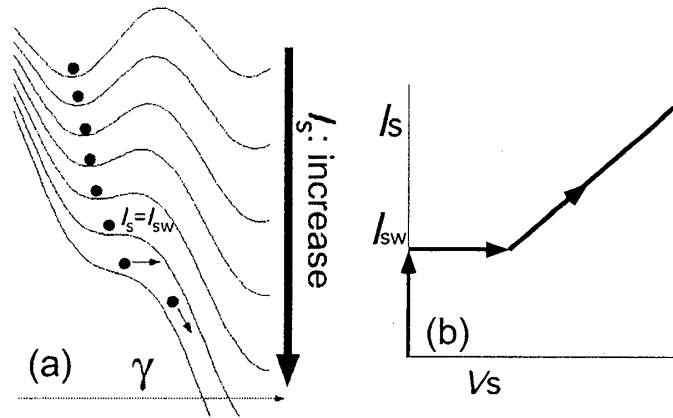


Figure 10: バイアス電流の増加による Josephson 接合の電圧状態転移 (a) ポテンシャルの変化 (b) I-V 特性

によって変化するのを利用して微小磁場の測定をする。

「バイアス電流がある大きさに達すると電圧が発生する」という現象は後の議論にとって重要なので、まず、SQUID ではなく単一の Josephson 接合での電圧状態への推移を説明しておく。接合の位相 γ に対するポテンシャル・エネルギーは、バイアス電流を I_s とすると、 $V(\gamma) = E_{J0}(1 - \cos[\gamma]) - I_s \gamma$ である。バイアス電流がゼロのとき、位相 γ はコサイン・ポテンシャルの底近傍で小さな振動をしているだけだが、電流が増えるにつれポテンシャルが傾くので、やがてポテンシャルの井戸の中から飛び出して、振動ではなく位相が増え続けるような状態に転移する (Fig. 4.2.2(a))。Josephson 接合に発生する電圧は $V = (\hbar/2e)\dot{\gamma}$ なので、この経過の「電流-電圧特性」は Fig. 10(b) のようになる。

SQUID の話に戻る。今、簡単のために 2 つの接合は完全に同じものだとすると、SQUID において上の位相 γ に相当するものは、2 つの Josephson 接合の位相差の和 (正確にはその 2 分の 1) $\gamma_+/2 \equiv (\gamma_1 + \gamma_2)/2$ である。ただし SQUID では上の単一接合のときの E_{J0} に相当するものが、リングを貫く磁束に依存する。

SQUID に対して外部から磁束 Φ_{SQ} が加えられているときに、さらに微小な磁場による磁束 $\pm\phi_q$ が SQUID のリング内部に発生した場合を想定すると、SQUID のスイッチング電流 I_{sw} は、

$$I_{sw}(\pm\phi_q) \sim I_0(\cos[\pi\Phi_{SQ}/\Phi_0] \mp \frac{\pi\phi_q}{\Phi_0} \sin[\pi\Phi_{SQ}/\Phi_0]) \quad (35)$$

となる。ここで、 $I_0 \equiv 2(\frac{2e}{\hbar}) E_{J0}$ 。 E_{J0} は、Josephson 接合の Josephson energy である。この変化を利用して微小磁場を測定する。磁束 qubit の実験で qubit が誘起する磁場は磁束にして $10^{-3}\Phi_0 \sim 10^{-2}\Phi_0$ であるから、この測定は I_0 の数%以下の変化を読み取る精密測定となっている。

4.3 超伝導電荷 qubit を dc-SQUID で測る

電荷量子ビットの情報は電荷に載っているのだから、それを dc-SQUID を使って磁束で読み出すというのは、一見、妙な方法のように思われるが、この読み出し方法は、超伝導量子ビットの特徴を非常にうまく利用した巧妙な方法である。

超伝導量子ビットは、電荷型であれ磁束型であれ、Josephson 接合がもっている「電荷 (Cooper-pair 数)」「磁束 (Josephson 接合の位相)」という双対な 2 つの自由度のどちらに情報をのせるかという違いしかない。実はそれ故、情報の担い手を「電荷」 $\leftrightarrow$ 「位相」と変換することが比較的容易に可能なのだ。だから、電荷量子ビットの情報を一旦位相に移してそれを dc-SQUID で読む、というようなことができる。その良い実例は CEA-Saclay による実験であって、後に詳細に紹介する。

同じように、磁束量子ビットの情報を、「電荷」 $\leftrightarrow$ 「位相」の変換を使って SET で読み出すことも原理的には可能である。こちらはまだ実例がない。

4.4 測定、デコヒーレンスのモデル

こう書いてくると、磁束量子ビットも電荷量子ビットも、量子ビットが出来さえすれば簡単に測れそうだが、実験が成功するには、実は測定の部分にこそ工夫が必要であった。後で紹介する実験たちは、まさに巧みなその工夫の実例である。しかしながら、上に述べたような測定が何とか可能になっても「状態の読み出し」という意味ではまだまだ解決すべき問題が限り無い。解決すべき問題が何かすらそれほど明らかになっているとも思われない。

話を単一量子ビットの測定に限ると、考慮すべき問題として

- 一回の測定の精度
- 測定に必要な時間
- 時間分解能
- 量子ビットに及ぼす反作用 (デコヒーレンス等)

などがある。

そういうことを考察するには、測定についての理論的なモデルを用意しておくことが望ましい。ここで必要なのは、いわゆる「観測問題」の議論ではなく、実験の測定過程をある程度定量的に議論できるような実用上の範囲内の枠組みである。

そこで、実際の測定あるいはデコヒーレンスのモデルとして、被測定系 (system) が Boson の多自由度系と弱い相互作用をしている系を考える。ここで system とは、量子ビットと測定のためのプローブの合成系を指す。

全系 (system + Boson bath) の Hamiltonian は

$$H_{\text{tot}} = H_S + H_{SB} + H_B, \quad (36)$$

ここで、 H_S は system (被測定系) の Hamiltonian であり、Boson-bath の Hamiltonian H_B は

$$H_B = \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k, \quad (37)$$

とする。 b_k はモード k の Boson の消滅演算子である。被測定系との相互作用は

$$H_{SB} = A_S \sum_k (g^* b_k^\dagger + g b_k), \quad (38)$$

で与えられるとする。 A_S は system の何か物理量の演算子である。ここで簡単の為に結合の強さのモード依存性はないとした。さらに、Boson の状態密度も均一であるとする。すなわち、Boson と system の結合は Markov 的であると近似する。上のモデルにおいて、system と Boson 系の合成系の密度演算子について、Boson 系の微視的な自由度について粗視化した「system の縮約された密度演算子」 ρ_S の時間発展は、

$$\frac{d}{dt} \rho_S(t) = \frac{1}{i\hbar} [H_S, \rho_S(t)] + \frac{\Gamma}{2} (2A_S \rho_S(t) A_S - \rho_S(t) A_S A_S - A_S A_S \rho_S(t)) \quad (39)$$

の Lindblad 方程式で与えられる。 Γ は $|g|^2$ に比例する定数である。さらに、すべての system 演算子 O_S を $\tilde{O}_S(t) \equiv e^{i(H_S+H_B)t} O_S e^{-i(H_S+H_B)t}$ と表した相互作用表示に移ると、上式は

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_S(t) = \frac{\Gamma}{2} (2\tilde{A}_S(t) \tilde{\rho}_S(t) \tilde{A}_S(t) - \tilde{\rho}_S(t) \tilde{A}_S(t) \tilde{A}_S(t) - \tilde{A}_S(t) \tilde{A}_S(t) \tilde{\rho}_S(t)) \quad (40)$$

となる。

4.4.1 $H_S = 0$ の場合

まず、 $H_S = 0$ のときを考えると、 $\tilde{A}_S(t) = A_S$ であり、式 (39),(40) 共に、

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \frac{\Gamma}{2}(2A_S\rho_S(t)A_S - \rho_S(t)A_SA_S - A_SA_S\rho_S(t)) \quad (41)$$

となり、system のダイナミクスは Boson 系との相互作用によるもののみである。system の状態が演算子 A_S の固有状態であれば、式 (41) の右辺が 0 となり system の運動はないから、これら固有状態が system の終状態である。純粋状態である必要はなく、密度演算子が固有状態 $|\phi_m\rangle$ の混合状態

$$\rho(t) = \sum_m P_m |\phi_m\rangle\langle\phi_m| \quad (42)$$

であれば時間発展はなくなる。すなわち、system は Boson-bath と式 (38) の Hamiltonian を通じて相互作用することでデコヒーレンスを被り、式 (42) の混合状態になる。

これを「測定」過程として見ると、 A_S という物理量を測定するために system と巨視的な Boson 系とを相互作用させた結果、system が A_S の固有状態 $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \dots$ のどれかに射影されたと解釈することもできる。測る前の状態から式 (42) の混合状態までの遷移には、 Γ にほぼ反比例する有限の時間が必要だが、 Γ が十分に大きければ、すなわち強い測定であれば、「測定によって瞬時に測定量の固有状態に射影される」という教科書的な測定と (実用上) 矛盾しない。このとき読み出される値は行き着いた測定量の固有状態の固有値であることはいうまでもない。

4.4.2 $H_S \neq 0$ の場合

・ A_S が H_S と可換のとき

この場合は、 A_S の固有状態と H_S の固有状態が一致するから (簡単のために縮退がないとして)、system は Boson-bath との相互作用によってエネルギー固有状態に緩和していく。すなわち式 (42) で $|\phi_m\rangle$ をエネルギー固有状態とすればいい。 A_S はエネルギー固有状態を別の状態に遷移させることがないから、この過程ではエネルギー緩和は起こらない。ただし、system の始状態がエネルギー固有状態でなかったときは、緩和によってエネルギー固有状態間のコヒーレンスが失われて、密度演算子の非対角項が消滅していることに注意されたい。

このような緩和を位相緩和 (dephasing) という。特に、今の場合のようにエネルギーの緩和を伴わない場合を “pure dephasing” と呼ぶ。このときも、緩和がじゅうぶん速ければ、エネルギー固有状態へ射影されるのと実用上変わらない。このときも読み出される値は行き着いた測定量の固有状態の固有値である。

・ A_S が H_S と非可換のとき

測定量とエネルギーが可換な状況では、測定結果の値が何を意味しているかはほぼ明確で、理論的な分析無しに素朴な考察による理解で十分である。なぜなら測定によって引き起こされたデコヒーレンスの結果に行き着く状態では、測定量は確定しているからである。

だが、非可換な場合は、問題を含んでおり、素朴なイメージはしばしば誤った結論を与える。このときは、 A_S がエネルギー固有状態間の遷移を引き起こす。すなわち、緩和の過程においてエネルギーが保存しない。

A_S が H_S と非可換でも system を支配する Hamiltonian H_S に比べて Γ が十分大きいときは、 $H_S = 0$ のときと同様だということは予想がつく。では、system を支配する Hamiltonian、 H_S が大きい場合はどうなるか。「 H_S が大きい」というのは曖昧な表現なので、ここでは「 H_S のエネルギー固有値の間隔が $\Gamma|A_S|^2$ に比べて十分に大きい」という意味に限定する。ここで $|A_S|$ は厳密ではないが、物理量 A_S の大きさ、と理解してほしい。

これを考察するために、式 (40) に戻る。相互作用表示の $\tilde{A}_S(t)$ をあからさまに書くと、

$$\tilde{A}_S(t) = e^{iH_S t} A_S e^{-iH_S t} = \sum_{n,m} a_{nm} |\varepsilon_n\rangle\langle\varepsilon_m| e^{i(\varepsilon_n - \varepsilon_m)t} \quad (43)$$

となる。ここで、 $|\varepsilon_n\rangle$ は固有値 ε_n をもつエネルギー固有状態である。仮定より、 $n \neq m$ であれば、 $\varepsilon_n - \varepsilon_m$ の絶対値は、 $\Gamma|A_S|^2$ よりもずっと大きい。すると、 $\hbar/(\varepsilon_n - \varepsilon_m) \ll T \ll \hbar/(\Gamma|A_S|^2)$ なる時間間隔 T の間の $\tilde{A}_S(t)$ の時間平均は

$$\langle \tilde{A}_S(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T dt \tilde{A}_S(t) \sim \sum_n a_{nn} |\varepsilon_n\rangle \langle \varepsilon_n| \quad (44)$$

となって、エネルギー状態間の遷移を引き起こす要素は短時間の平均によって抑圧されてしまう。

式 (40) の右辺はもう少し複雑な形をしているので、考察を進める。相互作用表示の密度演算子 $\tilde{\rho}_S(t)$ の運動は、 Γ に比例する右辺によるものだけだから、今の場合、 $\varepsilon_n - \varepsilon_m$ ($n \neq m$) よりもずっとゆっくりである。だから、時間 T の間は定数だとして、ある時刻 t の近傍で、エネルギー固有状態で対角化されるような

$$\tilde{\rho}_S(t) = \sum_l \rho_{ll} |\varepsilon_l\rangle \langle \varepsilon_l| \quad (45)$$

だったとしよう。このとき例えば、式 (40) の右辺第一項は

$$\sum_{l,n,m} a_{nl} a_{lm} \rho_{ll} |\varepsilon_n\rangle \langle \varepsilon_m| e^{i(\varepsilon_n - \varepsilon_m)t} \quad (46)$$

なので、短時間 T の平均で生き残るのは、エネルギー固有状態の対角成分のみとなって、異なるエネルギー固有状態間の非対角要素は発生しない。右辺他の項も同様な考察により、密度演算子が一旦、エネルギー固有状態で対角化されるような状態に落ち込むと、Boson-bath との相互作用によってそこから抜け出る確率はとても小さくなる。

ゆえに、 $\Gamma|A_S|^2$ に比べて system を支配する Hamiltonian H_S が十分大きいときは、Boson-bath との相互作用 Hamiltonian が system の Hamiltonian H_S と非可換であっても、(特殊な例外を除けば) 密度演算子はエネルギー固有状態の古典確率的重ね合わせ状態へと向かう。すなわち、system は Boson-bath との弱い相互作用によって、エネルギー固有状態の重ね合わせ、という混合状態へと推移する。これは、実用上、「測定によって引き起こされた bath との相互作用によって、エネルギー固有状態へと射影された」ことに対応する。

このとき行き着いた先は測定量の固有状態ではない。だとすると、得られる測定結果の値とは何だろうか。これを理解するためには、もはや素朴な考察は信頼できない。量子ビットとプローブの合成系の Hamiltonian をちゃんと書き下して、測定による時間発展を計算し、プローブの行き着く状態をちゃんと把握しなければ測定結果が何を測ったことになっているのかわからないのである。

そのような実例が、我々 NTT のグループが磁束量子ビットを dc-SQUID で測った実験において実際に発生した。筆者は、磁束量子ビットと dc-SQUID の合成系の時間発展を数値計算することによって、測定結果が何を示しているかを理解したと思っている [26]。そのことについて、後の節で議論したい。

4.5 Rabi 振動

量子ビットの実験ではコヒーレントな 2 状態系が出来ているかどうかをチェックすることが何よりの一歩である。先に述べたように時間領域で振動が見えれば確実だが、それは難しいので、エネルギー的にほぼ縮退した 2 状態を用意し、2 状態の重ね合わせによってエネルギーの分離が起こっていることを確認することから始める。

σ_z の固有状態を spin の up および down として

$$H_0 = \varepsilon \sigma_z - \Delta \sigma_x \quad (47)$$

なる Hamiltonian の Δ を通じて重ね合わせ状態ができれば、2 状態間には $2\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2}$ のエネルギーギャップができる。特に、もともとの up および down のエネルギー差 2ε が 0 であれば、重ね合わせができなければ 2 状態間のエネルギーギャップが 0 であるのに対し、重ね合わせが出来ていれば

2Δ の分離が現れるはずなので、マイクロ波の吸収などによってこのギャップを確認しようとする。Figure 2 をもう一度見てほしい。

では、マイクロ波を照射しているときにギャップが見えたとして、それは、照射していないときもちょうど重ね合わせが出来ていることを保証しているだろうか。これを、「デコヒーレンスとダイナミクスの関係」という観点から考えてみる。

system が Boson-bath と相互作用している全系の Hamiltonian は

$$H_{\text{tot}} = H_0 + H_{\text{rf}} + H_B + H_{\text{SB}}, \quad (48)$$

である。ここで

$$H_{\text{rf}} = E_{\text{rf}} \sigma_z \cos[\omega_{\text{rf}} t] \quad (49)$$

が古典場としてのマイクロ波の照射を表す。

H_0 に関しての相互作用表示に移ると

$$\tilde{\sigma}_z(t) = e^{iH_0 t} \sigma_z e^{-iH_0 t} \quad (50)$$

$$\tilde{H}_{\text{rf}}(t) = e^{iH_0 t} H_{\text{rf}} e^{-iH_0 t} \quad (51)$$

だが、ここでマイクロ波の周波数 ω_{rf} が、量子ビットの 2 状態のエネルギー差 $\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2}$ に一致しているのとし、 ω_{rf} の速い振動成分を無視する「回転波近似」を用いると

$$\tilde{H}_{\text{rf}}(t) \sim \frac{E_{\text{rf}} \Delta}{\varepsilon^2 + \Delta^2} (\Delta \sigma_z + \varepsilon \sigma_x) \quad (52)$$

となる。これを使ってさらに、 $H_0 + H_{\text{rf}}$ による運動が止まって見える相互作用表示に移ると、system が Boson-bath と相互作用した結果生じる密度演算子の時間発展は

$$\dot{\tilde{\rho}}(t) = \frac{\Gamma \varepsilon^2}{\varepsilon^2 + \Delta^2} (X(t) \tilde{\rho}(t) X^\dagger(t) - \tilde{\rho}(t)) \quad (53)$$

の形の Lindblad 方程式で与えられる。ここで $\sim$ が 2 つついているのが $H_0 + H_{\text{rf}}$ についての相互作用表示された演算子であることを示している。また、デコヒーレンスを与える演算子 $X(t)$ は

$$X \equiv \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2}} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^* & -X_{11} \end{pmatrix} \quad (54)$$

ここで、

$$X_{11} = \varepsilon \cos[2B_0 t], \quad (55)$$

$$X_{12} = -\Delta \cos[2B_0 t] + i\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2} \sin[2B_0 t], \quad (56)$$

になっている。

$$2B_0 \equiv \frac{E_{\text{rf}} \Delta}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2}} \quad (57)$$

という周波数の振動が現れているが、これはマイクロ波の照射によって引き起こされた 2 状態間の遷移「Rabi 振動」の周波数であり、マイクロ波のパワーが弱ければ ω_{rf} よりずっとゆっくりとした振動である。

既に述べたように、この Rabi 振動を時間領域で観測することが、量子ビットが出来ている確認のステップとして、重ね合わせ状態の形成によるバンド分裂の観測、の次にくるものである。

式 (53), (54) を見ると、デコヒーレンスを与える右辺の大きさは、もともとのデコヒーレンスの強さ Γ と絶対値的には大きな変化はない。しかし、周波数 $2B_0$ の振動があることによって、 $T \gg 1/(2B_0)$ なる時間の平均を考えると、振動しているおかげで打ち消しが生じ、デコヒーレンスの蓄積が減じられる。つまり、外場を加えてドライブすることによってデコヒーレンスが抑圧される。

したがって、外場を加えた環境でエネルギーギャップを確認した場合、それは、「デコヒーレンスを抑圧した環境下では2状態の重ね合わせが出来ている」ということを意味しており、外場でドライブしていないときにも重ね合わせが出来ているという保証を与えない。時間領域での振動の観測も、この Rabi 振動、すなわち、マイクロ波に駆動された振動のほうで、量子ビットの自由な振動（エネルギー固有状態にないときの振動）を観測するより容易である。

後で紹介する超伝導量子ビットの実験では、Rabi 振動が起こっていることを時間領域でも確認しているものもある。それら実験の論文では、当然マイクロ波照射下では実際よりもコヒーレンスが保持されている時間が延長されていることを認識しており、マイクロ波がないときの真のコヒーレンス時間を評価する際には、Ramsey Fringe という特殊な手法を用いて評価するのだが、それについては紙数の都合上、説明を割愛する。

4.5.1 捕捉

今は、bath との相互作用が Markov 過程、すなわち、いわゆる Spectral density が周波数依存性を持たない、として説明した。それは、密度行列の時間発展を与える微分方程式が時間に関して局所的になって、例としてわかりやすいからである。「時間に関して局所的」とは、ある時刻の密度演算子 $\rho(t)$ さえわかれば、微小時間後の $\rho(t+dt)$ がわかるということで、Lindblad 方程式はその形になっている。

現実には、bath との相互作用は周波数依存性をもつ。すると、 $\rho(t+dt)$ を求めるためには、 $\rho(t)$ の情報だけでは不足で、 $0 < \tau < \tau_m$ の時間の $\rho(t-\tau)$ すべてがわからないといけな。つまり、 τ_m の間のメモリー効果が重要になる。

このような場合の計算方法もある程度確立している [10]。解析的に計算できる場合は少ないが、数値計算なら例えば [11] などの手法が使える。

5 超伝導量子ビットの実験

ここではこれまでに成功している超伝導量子ビットの実験の具体例を理論的に解説する。ただし、この講義ノートの目的は実験を分析するための理論的バックグラウンド持ってもらうことにあるので、実験結果の詳細を紹介するつもりはない。実験結果そのものに興味があれば、参考文献に挙げた実験の原論文にあたってもらいたい。

超伝導量子ビットの実験が始まってからかなりの年月が経過していると思われるが、ここ数年になって、いくつもの研究機関から争うように実験成功のレポートが出されている。

電荷量子ビットの実験は、[12] を皮切りに、[13] を経て、[14] で成功している。[15] に簡単な解説がある。

一方、磁束量子ビットの実験は、[17] あたりから始まって、[18] で一応成功、[25] で文句のつけようのない成功、と云えよう。NTT のグループの実験 [19] は基本的には [18] と同じだが、後で紹介するように、「測定」の部分で新たな展開を見せている。

前にも少し触れたが、磁束型と電荷型の中庸、とでも云うべきなのが [24] である。また、今回は紹介しないが、[20, 21] のようなタイプもある。

単一の量子ビットは量子2状態系であるから超伝導量子ビットも概念的な理解は易しいのだが、ある程度以上詳細に理解しようとする、現状では理論的な分析が足りない。そのせいかデコヒーレンスの議論など実験結果と理論の密接な比較検討が出来ないのが残念である。実験の原論文には理論的考察に利用できるような詳細な Hamiltonian は普通書かれないので、必要なら自分で書き下してみるしかない。ここでは個々の実験について、特に測定のプロープまで系の中に含めて Hamiltonian を書き下すことにする。

系のパラメータは、特に重要でない限り細かい値を示さない。だいたいにおいて、量子ビット部の Josephson 接合は略々 $E_J = 10 \sim 100$ GHz, $C_q, C_g \sim 10$ aF くらいだとだけ知っておけばよい。他方、プロープのパラメータは実験によって大きく異なる。

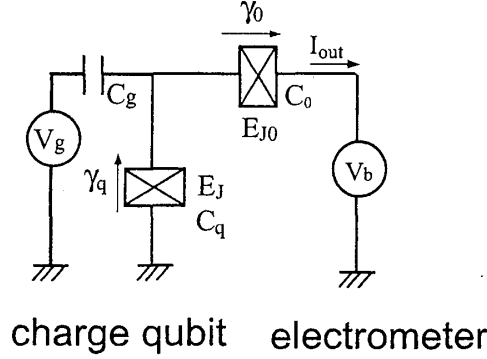


Figure 11: NEC(Nakamura *et al.*)

5.1 NEC(Nakamura *et al.*) の実験 [14]

世界で初めて超伝導の量子ビットの時間的振動を見た実験。

基本的な回路構成は Fig. 11 の形をしている。 $E_J \ll 2e^2/C_q$ だから電荷量子ビットである。他に重要なパラメータの特徴は $E_{J0} \ll E_J$ であることと $V_b \ll V_g$ だけということである。先程説明した電荷量子ビットの SET による測定の実験を比較的そのまま実現した形になっていることがわかるだろう。

Hamiltonian は

$$\begin{aligned}
 H &= \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 \frac{C_q}{2} \dot{\gamma}_q^2 + \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 \frac{C_g}{2} \left(\dot{\gamma}_g - \frac{2e}{\hbar} V_g\right)^2 - E_J \cos[\gamma_q] \\
 &\quad + \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 \frac{C_0}{2} \left(\dot{\gamma}_0 + \frac{2e}{\hbar} V_b\right)^2 - E_{J0} \cos[\gamma_0] \\
 &= \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 \frac{C_q + C_g + C_0}{2} \dot{\gamma}_q^2 - (C_g V_g + C_0 V_b) \dot{\gamma}_q + \frac{C_g}{2} V_g^2 + \frac{C_0}{2} V_b^2 \\
 &\quad - E_J \cos[\gamma_q] - E_{J0} \cos[\gamma_0]
 \end{aligned} \tag{58}$$

と書ける。

電荷 qubit であることを強調するため、位相 γ_q ではなく正準共役な Cooper-pair 数 n を用いて、

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{2e^2}{C_\Sigma} \left\{ n - (C_g V_g + C_0 V_b)/C_\Sigma \right\}^2 - \frac{E_J}{2} \sum_N (|N+1\rangle\langle N| + |N\rangle\langle N+1|) \\
 &\quad - \frac{E_{J0}}{2} \sum_N (|N\rangle\langle N+1| + |N+1\rangle\langle N|)
 \end{aligned} \tag{59}$$

と書き直しておく。ここで $C_\Sigma = C_q + C_g + C_0$ であり、 $|N\rangle$ は

$$n|N\rangle = N|N\rangle \tag{60}$$

なる n の固有状態である。Equation (59) の最後の項は、プローブに使われる Josephson 接合 E_{J0} を通過して Cooper-pair が出入りする効果を表している。 $E_{J0} \ll E_J$ であるから、出入りは仮想遷

移であれ実遷移であれその振幅は非常に小さい。この実遷移を検出するのが、この量子ビットの測定である。

$|N=0\rangle$ および $|N=1\rangle$ を σ_z の固有状態として spin 表示すれば

$$H = \frac{2e^2}{C_\Sigma}(1 - 2n_g)\sigma_z + \frac{E_J}{2}\sigma_x \quad (61)$$

となるが、このままでは測定がどうなっているのか式から見えないので、4.4 節の Eq. (39) の枠組みで表現する。

上で述べた E_{J0} の接合を通過する Cooper-pair の検出とは、接合を流れる電流、すなわち、

$$I_{\text{out}} = \left(\frac{2e}{\hbar}\right) E_{J0} \sin[\gamma_0] = \left(\frac{2e}{\hbar}\right) E_{J0} \sin[\gamma_0] \quad (62)$$

が測定量だから、系全体の密度演算子 ρ_S の時間発展が、

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \frac{1}{i\hbar} [H, \rho_S(t)] + \frac{\Gamma}{2}(2I_{\text{out}}\rho_S(t)I_{\text{out}} - \rho_S(t)I_{\text{out}}I_{\text{out}} - I_{\text{out}}I_{\text{out}}\rho_S(t)) \quad (63)$$

の解として与えられる。ただし、 Γ の大きさ、すなわち、 I_{out} をどれだけ強く (精度良く) 読み出しているかの尺度は不明である。 $\left(\frac{2e}{\hbar}\right)^2 \Gamma E_{J0}^2$ がこの測定の時間分解能や測定によって系に引き起こされるデコヒーレンスなどを決める。

実験では、 I_{out} を事実上連続時間で測定した上に、莫大な回数の測定の平均をとってようやく量子ビットの状態を読み出しているの、極めて弱い測定になっていることは事実である。

この型は現在 2-qubit のものまで拡張されて実験が成功している [16]。老舗の感がある。ただし急所はその測定方法にある。常に微弱な V_0 を加えてプローブの接合を流れる微小電流を測り続けている。量子ビットが island に Cooper-pair のいる状態にあればプローブの接合の Coulomb Blockade が弱まり、プローブの接合を通して電流が流れる確率が高まる。逆に、island に Cooper-pair がなければプローブに電流が流れる確率は極めて小さい。

量子ビットがこの 2 つの状態のどちらかに確定しているのであれば、この測定は普通の古典的測定で (時間分解能のことを除けば) 特に問題はない。しかし、量子ビットが 2 つの状態の量子的重ね合わせにあったらどうなるか。プローブに電流が流れれば、量子ビットの Cooper-pair が island 内にいる状態に確定されてしまい、重ね合わせ状態が壊れてしまう。Cooper-pair が重ね合わせ状態を介して island の内外を往復しているとき (例えば Rabi 振動)、この運動はプローブに電流が流れた瞬間に壊れてしまうのである。したがって往復運動が持続するのは、island 内に Cooper-pair が来てもプローブが検出に失敗し続けている間だけ、という皮肉な状況になっている。

NEC はこのような状況で、パルスによる量子ビットの巧妙な制御と莫大な多数回の測定データの平均によって時間的な振動を見事に確認したが、測定方法として上の方式を使う限り、多数回の測定データの平均をとらないと量子ビットの状態を観測することができない。

5.2 NTT(Tanaka *et al.*[19]) and Delft(van der Wal *et al.*[18])

超伝導量子ビットとして実験に着手したのはこの型が一番古いのだろうと思われる。 $E_J \gg 2e^2/C_q$ で、磁束量子ビットの提案を比較的原形のまま実現したタイプである。基本的な構成を Fig. 12 に示す。現在までに 2 つの磁束状態の量子的重ね合わせが観測されているが、Rabi 振動など時間領域の現象は直接観測されていない。

E_J と同程度の E_{J0} をもつ接合で dc-SQUID がつくられているが、これは特に理由があるわけではないようで、今後最適化の余地がある。[18] の実験では $C \gg C_q$ なる capacitance で dc-SQUID の Josephson 接合がシャントされているが、Fig. 12 には描いていない。

プローブである dc-SQUID まで含めた Hamiltonian は次のようになる。

$$H = \frac{C_q}{4} \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 (\dot{\gamma}_{q+}^2 + \dot{\gamma}_{q-}^2 + 2\alpha\dot{\gamma}_{q3}^2) - 2E_J \cos[\gamma_{q+}/2] \cos[\gamma_{q-}/2] - \alpha E_J \cos[\gamma_{q3}]$$

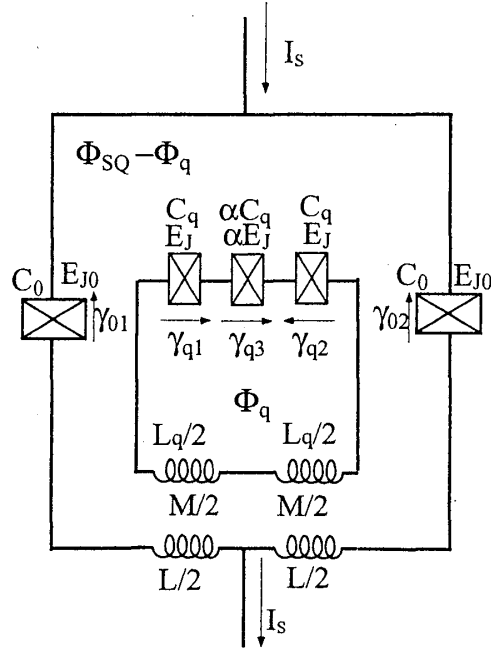


Figure 12: Delft(van der Wal *et al.*) and NTT(Tanaka *et al.*)

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 \frac{L(\gamma_{q-} + \gamma_{q3} - 2\pi f_q)^2}{2(L_q L - M^2)} \\
 & + \frac{C_0}{4} \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 (\gamma_{0+}^2 + \gamma_{0-}^2) - 2E_{J0} \cos[\gamma_{0+}/2] \cos[\gamma_{0-}/2] - \left(\frac{\hbar}{2e} \right) I_s \frac{\gamma_{0+}}{2} \\
 & + \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 \frac{L_q (\gamma_{0-} - 2\pi f_{SQ})^2}{2(L_q L - M^2)} \\
 & - \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 \frac{M (\gamma_{0-} - 2\pi f_{SQ}) (\gamma_{q-} + \gamma_{q3} - 2\pi f_q)}{(L_q L - M^2)} \quad (64)
 \end{aligned}$$

ここで

$$\gamma_{q\pm} \equiv \gamma_{q1} \pm \gamma_{q2}, \gamma_{0\pm} \equiv \gamma_{01} \pm \gamma_{02}, f_{SQ} \equiv \Phi_{SQ}/\Phi_0, f_q \equiv \Phi_q/\Phi_0 \quad (65)$$

である。

磁束量子ビットを原形のまま、と先程述べたが、やはりそこには大きな工夫が加えられている。磁束量子ビットの概説のところではリングの中の Josephson 接合がただひとつであったが、ここでは3つ使われている。その理由は以下のようなものである。

接合がひとつだと、その位相 γ_q が量子的な揺らぎをもつためにはリングの inductance L_q がある程度大きい必要がある。なぜなら、 L_q が小さいと、磁束の量子化によって γ_q が固定されてしまうからである。そうなるともはや重ね合わせが形成されない。だからといって L_q を大きくするために大きなリングにすればそれはデコヒーレンスの原因になってしまうのである。もうひとつ、異なる磁束状態の量子的重ね合わせをつくるためには、その2状態間のエネルギー障壁 E_J が小さいほうが望ましいが、それを本当に小さい E_J の Josephson 接合を使って実現したのでは、雑に云うと、系全体の超伝導性が弱くなったようなもので、ノイズなど擾乱の影響を受け易くなって実験が困難になる。

Delft 工科大学のグループは、リングに3つの Josephson 接合を設ける、というアイデアでこの問題を克服した。 α という1より少し小さいパラメータを導入したところに工夫が光っている [22, 23]。Hamiltonian (64) の右辺第1,2,3,4項が量子ビットを表す部分だが、このままではその工夫は見えにくい。

多くの量子変数が現れているが、実は γ_{q3} および γ_{0-} は、系全体のダイナミクスの内部に隠れていて、量子ビットの状態やプローブの出力からは直接見えない。そこで経路積分なりなんなりの方法でこの変数を消去してしまおう。しかも、inductance L_q や L が小さいために、 γ_{q3}, γ_{0-} は他の変数の運動に adiabatic に追従する、というのが良い近似であることがわかり、Hamiltonian はぐつと簡単になる。

$$H = \frac{C_q}{4} \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 (\dot{\gamma}_{q+}^2 + \dot{\gamma}_{q-}^2 + 2\alpha \dot{\gamma}_{q-}^2) - 2E_J \cos[\gamma_{q+}/2] \cos[\gamma_{q-}/2] - \alpha E_J \cos[\gamma_{q-} - 2\pi f_q] \\ + \frac{C_0}{4} \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 \dot{\gamma}_{0+}^2 - 2E_{J0} \cos[\gamma_{0+}/2] \cos[\pi f_{SQ}] - \left(\frac{\hbar}{2e} \right) I_s \frac{\gamma_{0+}}{2} \\ - \left(\frac{2e}{\hbar} \right)^2 M \alpha E_J \sin[\gamma_{q-} - 2\pi f_q] E_{J0} \cos[\gamma_{0+}/2] \sin[\pi f_{SQ}] \quad (66)$$

右辺第1行が qubit, 第2行がプローブの dc-SQUID, 第3行が両者の相互作用である。qubit がどういう2状態系になっているかは、 $f_q \sim 1/2$ のときのポテンシャル $V(\gamma_{q+}, \gamma_{q-}) = -2E_J \cos[\gamma_{q+}/2] \cos[\gamma_{q-}/2] - \alpha E_J \cos[\gamma_{q-} - 2\pi f_q]$ を描いてみると明解である ([19] の図を参照)。特に、 $\gamma_{q+} = 0$ のところの断面を見ると、ポテンシャルが $\gamma_{q-} \sim \pm \gamma_b \equiv \pm 2\arccos[1/(2\alpha)]$ に底をもつ2つの well が $\gamma_{q-} \sim 0$ にある高さ約 $E_J(2\alpha - 3/2)$ の障壁で遮られている。この各々の底の準位が charging energy $(2e)^2/C_q$ を介して重ね合わせ状態をつくるのだとわかる。

例によって qubit を spin 表示すると

$$H = \varepsilon(f_q) \sigma_z - \Delta \sigma_x \\ + \frac{C_0}{4} \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 \dot{\gamma}_{0+}^2 - 2E_{J0} \cos[\gamma_{0+}/2] \cos[\pi f_{SQ}] - \left(\frac{\hbar}{2e} \right) I_s \frac{\gamma_{0+}}{2} \\ - \left(\frac{2e}{\hbar} \right)^2 M \alpha E_J \sigma_z \gamma_b \cos[2\pi f_q] E_{J0} \cos[\gamma_{0+}/2] \sin[\pi f_{SQ}] \quad (67)$$

となる。ここで簡単のために、定性的に重要でない項は落とした。 $\varepsilon(f_q) \sim 2\pi E_J(f_q - 1/2)\sqrt{4\alpha^2 - 1}$ 、 Δ は $\sqrt{\alpha E_J E_C} \exp[-\eta\sqrt{(\alpha - 3/4)E_J/E_C}]/(2\pi)$ のオーダーをもつ障壁を通しての Tunneling energy である。

相互作用項を見れば明らかなように、qubit の σ_z が dc-SQUID のポテンシャルをわずかに変形させることでスイッチング電流を変化させる。これは既に概説した、磁束量子ビットの状態読み出しを dc-SQUID のスイッチング電流の測定で行うというモデルそのものである。では、もう議論すべき重要なことはないか。

実は、このようにちゃんと Hamiltonian を書き下したことで、このタイプの測定について重要なことがわかる。それについては節を改めて後で議論する。その前に他のタイプの実験の紹介を続ける。

5.3 CEA-Saclay(Vion et al.)[24]

この実験のことを知ったのは2001年の末であったが、そのときの驚きは忘れない。コヒーレンス時間がマイクロ秒に迫る、という事実もさることながら、超伝導量子ビットの可能性について非常に重要な示唆を含んでいた。電荷型、磁束型、と分けて考える必要はなく、超伝導微小回路のもつ電荷と位相の自由度を自由に使ってよいのだという、今から思えば当たり前のことをはっきりと気づかされた。

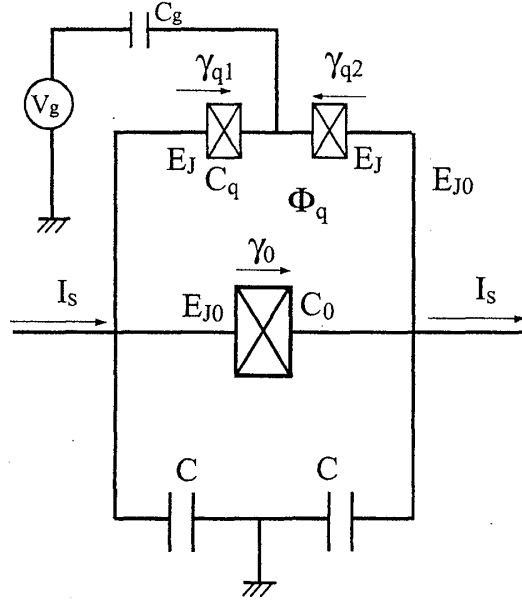


Figure 13: CEA-Saclay (Vion *et al.*)

基本的な回路構成は Fig. 13 の形をしている。 $E_J < 2e^2/C_q$ である。 $E_J \ll 2e^2/C_q$ でないところが味噌で、実は基本的には電荷量子ビットなのだが位相にもやや情報が載っているために、dc-SQUID のような測定で情報が読みだせる。他に重要なパラメータの特徴は $E_{J0} \gg E_J$ だということである。 $C \gg C_q$ なる capacitance でプローブがシャントされている。

E_J の接合列が qubit として働き、 E_{J0} の Josephson 接合が読み出しプローブである。 Bias 電流 I_s のほとんどは E_{J0} の Josephson 接合を流れる。そして電圧状態へ転移するスイッチング電流の値が qubit の状態の影響を受けるのである。

Hamiltonian は次のようになる。

$$H = \frac{C_q}{4} \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 \dot{\gamma}_{q+}^2 + \frac{C_g}{4} \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 \left(\dot{\gamma}_{q+} - V_g \frac{2e}{\hbar} \right)^2 - 2E_J \cos[\gamma_{q+}/2] \cos[(\gamma_0 + 2\pi f)/2] + \frac{C}{4} \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 \dot{\gamma}_0^2 - E_{J0} \cos[\gamma_0] - I_s \left(\frac{\hbar}{2e} \right) \gamma_0 \quad (68)$$

すでに述べたように基本的には電荷 qubit なのだが、この Hamiltonian からすぐにはそうはわからない。位相 γ_{q+} ではなく正準共役な Cooper-pair 数 n_+ を用いて、

$$H = \frac{(2e)^2}{2C_\Sigma} (n_+ - C_g V_g / C_\Sigma)^2 - E_J \sum_N (|N+1\rangle\langle N| + |N\rangle\langle N+1|) \cos[(\gamma_0 + 2\pi f_q)/2] + \frac{C}{4} \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 \dot{\gamma}_0^2 - E_{J0} \cos[\gamma_0] - I_s \left(\frac{\hbar}{2e} \right) \gamma_0 \quad (69)$$

と書き直しておく。ここで $C_\Sigma = C_q + C_g$ である。

だが、まだどういう 2 状態を量子ビットの 2 状態としているのか判然としない。それを明らかにするには、Eq. (69) の右辺第 1 行の qubit 部分の Hamiltonian の基底状態と第一励起状態を求める必要がある。詳細は述べないが、以下ようになる。 $|b_N\rangle = (|N+1\rangle + |-N\rangle)/\sqrt{2}$ および $|a_N\rangle = (|N+1\rangle - |-N\rangle)/\sqrt{2}$ という bonding 状態と anti-bonding 状態を定義しておく。実験に用

いている $n_g \sim 1/2$, $f_q \sim 0$ のところでは、この量子ビットの基底状態は、

$$|B\rangle = \sum_{N=0,1,\dots} b_N |b_N\rangle, \quad (70)$$

第一励起状態は

$$|A\rangle = \sum_{N=0,1,\dots} a_N |a_N\rangle, \quad (71)$$

というような重ね合わせでできている。係数 b_N, a_N とともに、 $N=0$ のとき絶対値が最大で N が大きくなるにつれて急速に絶対値が小さくなる。また、 $|a_N| \sim |b_N|$ である。 $E_J \ll 2e^2/C_q$ であったなら、 $N=0$ の項のみとっても十分良い近似で、これは電荷量子ビットだと断定できるのだが、数値計算してみると少なくとも $N=5$ くらいまではとらないと定性的にもこの量子ビットの状態を表しているとは云いがたい。それゆえ、純粋な電荷量子ビットではない、と歯切れの悪い表現となる。上の $|B\rangle$ および $|A\rangle$ を σ_z の固有状態として spin 表示すると、プローブも含めた全 Hamiltonian は

$$H = -E_J \cos[(\gamma_0 + 2\pi f_q)/2] \sigma_z + \frac{(2e)^2}{2C'_\Sigma} (1 - 2n_g) \sigma_x \\ + \frac{C}{4} \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 \dot{\gamma}_0^2 - E_{J0} \cos[\gamma_0] - I_s \left(\frac{\hbar}{2e} \right) \gamma_0 \quad (72)$$

となる。ここで C'_Σ は C_Σ よりやや大きい有効 capacitance である。

こうすると、qubit に載っている情報が第1項を通じて γ_0 に作用し、 E_{J0} の接合のスウィッチング電流を変化させることが見て取れるだろう。この量子ビットはさらに巧妙なことをやっている。測定を行なう時以外には Bias 電流を流さない。これならば測定をしていないときには、プローブが電圧状態に転移することはないから、量子ビットのコヒーレンスを破壊しないですむ。測定の際にはサブマイクロ秒の立ち上がりのパルスで Bias 電流を増加させてスウィッチングを観測する。この立ち上がりも量子ビットの時間スケールにとっては十分 adiabatic なほどゆっくりである。

この実験ではマイクロ秒に迫る長時間、時間的な振動を観測している。多数回の測定値の平均をプロットすることで時間振動を見い出している点では NEC と同じであるが、平均に必要とする測定の回数は遥かに少なく済む。この辺りに、この測定方法の精度、時間分解能についての情報が含まれていると思われるがまだ詳細な分析はない。

5.4 Delft(Chiorescu et al.)[25]

さてこれは、Saclay の qubit にヒントを得て、Fig. 12 の qubit とプローブの dc-SQUID と一体化しようと設計されたと目される回路である。当然、 $E_J \gg 2e^2/C_q$ 。基本的な構成は Fig. 14 のようになっている。 $C \gg C_q$ なる capacitance でプローブがシャントされている。

Hamiltonian は

$$H = \frac{C_q}{4} \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 \{ \dot{\gamma}_{q+}^2 + \dot{\gamma}_{q-}^2 + 2\alpha(\dot{\gamma}_{0-} - \dot{\gamma}_{q-})^2 \} \\ - 2E_J \cos[\gamma_{q+}/2] \cos[\gamma_{q-}/2] - \alpha E_J \cos[\gamma_{0-} - \gamma_{q-} - 2\pi f_{SQ}] \\ + \frac{C}{4} \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 \dot{\gamma}_{0+}^2 - 2E_{J0} \cos[\gamma_{0+}/2] \cos[\gamma_{0-}/2] + \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 \frac{(\gamma_{0-} - 2\pi f_{SQ})^2}{2L} - \left(\frac{\hbar}{2e} \right) I_s \frac{\gamma_{0+}}{2}, \quad (73)$$

前の例にならって簡単化すると、

$$H = \varepsilon(f_q) \sigma_z - \Delta \sigma_x \\ + \left(\frac{2e}{\hbar} \right)^2 L \alpha E_J \sigma_z \gamma_b \cos[2\pi f_q] E_{J0} \cos[\gamma_{0+}/2] \sin[\pi f_{SQ}] \\ + \frac{C}{4} \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 \dot{\gamma}_{0+}^2 - 2E_{J0} \cos[\gamma_{0+}/2] \cos[\pi f_{SQ}] - \left(\frac{\hbar}{2e} \right) I_s \frac{\gamma_{0+}}{2}, \quad (74)$$

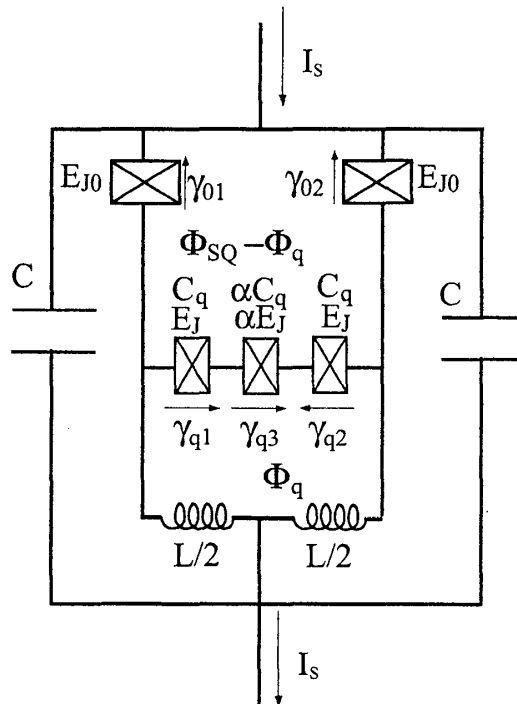


Figure 14: Delft(Chiorescu *et al.*)

となる。Fig. 12 の回路にくらべると、相互作用項の係数が相互 inductance M からリングの L に替わっただけでほとんど同じ Hamiltonian となっている。Figure 12 の M と Fig. 14 の L では後者のほうが数倍大きく、 E_{J0} も後者のほうが 10 倍ほど大きいので、qubit とプローブの相互作用は後者のほうが数十倍大きい。実はこれが測定において非常に巧妙に利用されている。

CEA-Saclay に倣って、測定を行なう時以外は Bias 電流を流さない。これならば測定をしていないときには、プローブが電圧状態に転移することはないから、量子ビットのコヒーレンスを破壊しないですむ。

スイッチング電流の測定のために Bias 電流 I_s を 0 から増加させていくと、 $\gamma_{0+}/2$ も 0 から $\pi/2$ へ向かって増加していく。これが Hamiltonian (74) の第 2 行を通じて量子ビットのポテンシャルを変化させる。これが f_q をわずかにシフトさせるのと同じ効果となり、ほとんどの場合、量子ビットのエネルギー固有状態は σ_z の確定状態に近づく。

ここで、4.4.2 節で述べたことを思い出して欲しい。弱い測定では、系の状態はエネルギー固有状態へと射影される。今の場合これが効いて σ_z の固有状態へと急速に位相緩和する。幸い、読み出す量も σ_z と可換であるから、既に古典的に確定した値を読み出すので量子揺らぎの影響を避けられる。論文には触れられていないが、これは測定精度向上につながっているはずである。

この実験では $0.1\mu\text{s}$ 程度持続する時間領域での振動を観測している。Saclay に比べて短い、今後、パラメータを最適化すればかなり改善されると予想される。現段階では、精度、時間分解能は CEA-Sacaly の実験と同程度と推測される。

5.5 超伝導磁束量子ビットの dc-SQUID による測定にまつわる不思議と単一回測定

NTT 物性科学基礎研究所の我々のグループでは Fig. 12 の実験を行なっている。最近、測定精度が向上し、平均操作なしの測定結果 (スイッチング電流値) をプロットするだけで、外部印可磁束 $\Phi_q = f_q \Phi_0$ の変化に伴って量子ビットの基底状態、第一励起状態の状態が変化していくようすが見

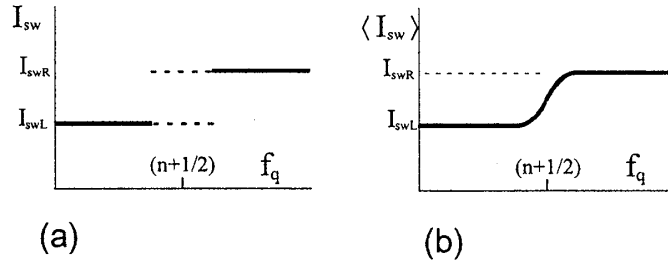


Figure 15: dc-SQUID による磁束 qubit 測定の「素朴な理解」による、のスイッチング電流の分布予想図。 (a) 平均をとる前 (b) 平均をとった後

てとれるようになった [19]。特に興味深いのは、 $f_q \sim 1.5$ (量子ビットにとっては $f_q \sim 0.5$ と等価) における重ね合わせ状態の遷移がはっきり見えることである。量子ビットの Hamiltonian

$$H = \varepsilon(f_q)\sigma_z - \Delta\sigma_x \quad (75)$$

を思い出してもらおうと、 $f_q = 1.5$ の周辺では基底状態 $|g\rangle$ および第一励起状態 $|e\rangle$ は

$$|g\rangle = a(f_q)|L\rangle + b(f_q)|R\rangle, \quad |e\rangle = b(f_q)|L\rangle - a(f_q)|R\rangle, \quad (76)$$

となっているはずである。ここで

$$a(f_q) = \frac{\sqrt{\varepsilon(f_q)^2 + \Delta^2} + \varepsilon(f_q)}{\sqrt{D}}, \quad b(f_q) = \frac{\Delta}{\sqrt{D}}, \quad D = \Delta^2 + \left(\varepsilon(f_q) + \sqrt{\varepsilon(f_q)^2 + 2\Delta^2}\right)^2 \quad (77)$$

である。 $\varepsilon(f_q)$ は $f_q = 1.5$ で 0 であるから、 $f_q \sim 1.5$ では $|g\rangle$ および $|e\rangle$ は、 $|L\rangle$ と $|R\rangle$ の重ね合わせ状態にあり、リングの環状電流に誘起される磁場すなわち σ_z は大きな量子揺らぎをもち定まっていない。

このとき、dc-SQUID でリングの環状電流に誘起される磁場を測定したらいったい dc-SQUID のスイッチング電流 I_{sw} が示す値は何に対応しているのか？

$|L\rangle$ に対応する I_{sw} を I_{swL} 、 $|R\rangle$ に対応する I_{sw} を I_{swR} と定義しておこう。素朴な理解だと上の測定は σ_z の測定であるから、教科書的な測定の説明に従うと、例えば $|g\rangle$ に対しては

- 確率 $|a(f_q)|^2$ で I_{swL} 、確率 $|b(f_q)|^2$ で I_{swR}

を与えるような測定になっているはずである。確率的事象であるから測定値はばらついて、多数回の測定を行なって分布を描くと I_{swL} と I_{swR} にピークをもつ分布が得られると考えられる。平均値は

$$\langle I_{sw} \rangle = \langle g | \hat{I}_{sw} | g \rangle = |a(f_q)|^2 I_{swL} + |b(f_q)|^2 I_{swR} \quad (78)$$

となるだろう。これを図示すると Fig. 15 のようになる。

[18] の実験では、(おそらく量子揺らぎとは関係のない理由から) I_{sw} のばらつきが大きく、平均をとらないと I_{swL} と I_{swR} の区別もつかないほど分布が広がっていたので、平均値しか示されていない。それは Fig. 15(b) をよく再現していた。

ところが、NTT のグループでは同様の系で工夫を凝らし、 I_{sw} のばらつきの要因を排除して、平均をとらなくても Fig. 15 に相当する I_{sw} の分布がライン状に見えるような測定に成功した [19]。それは不思議なことに、平均をとる前から Fig. 15(b) にそっくりな形をしていたのである。

この系の Hamiltonian をもう一度記そう。

$$\begin{aligned} H = & \varepsilon(f_q)\sigma_z - \Delta\sigma_x \\ & + \frac{C_0}{4} \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 \dot{\gamma}_{0+}^2 - 2E_{J0} \cos[\gamma_{0+}/2] \cos[\pi f_{SQ}] - \left(\frac{\hbar}{2e} \right) I_s \frac{\gamma_{0+}}{2} \\ & - \left(\frac{2e}{\hbar} \right)^2 M \alpha E_J \sigma_z \gamma_b \cos[2\pi f_q] E_{J0} \cos[\gamma_{0+}/2] \sin[\pi f_{SQ}] \end{aligned}$$

最後の項が qubit と dc-SQUID の相互作用であることは既に述べた。素朴な理解はこの項が教科書的な σ_z の測定をもたらすというものであったが、NTT の実験は素朴な理解が誤っている可能性があることを示している。

筆者らは、だいたい上の Hamiltonian と同様なものを使って、qubit と dc-SQUID の合成系の密度演算子の時間発展を数値計算した [26]。qubit と SQUID が独立な状態を初期状態として、相互作用を ON にすると同時に adiabatic な速度で SQUID の Bias 電流 I_b を増加させ、SQUID が電圧状態へ転移するまでを追跡した。これで、ある f_q における I_{sw} の分布がわかる。密度演算子の時間発展を追跡しているので、Unitary な運動だけでなくデコヒーレンスなど非ユニタリーな効果も分析することができる。結果の詳細は、ここまでの予備知識では混乱させるだけなので記さないが、上の不思議に関して重要な示唆を与える結果だけ紹介する。

上の Hamiltonian の相互作用項は、qubit と SQUID の entanglement を形成しない。すなわち、相互作用して時間発展しても合成系の状態は

$$|\psi_{\text{tot}}\rangle = |\psi_{\text{SQUID}}\rangle \otimes |\psi_{\text{qubit}}\rangle \quad (79)$$

の直積状態のままなのである。では、qubit の情報は SQUID の何に反映してしているかと云えば、それは

$$\psi(\gamma_+) \equiv \langle \gamma_+ | \psi_{\text{SQUID}} \rangle \quad (80)$$

と波動関数を表したときの $\psi(\gamma_+)$ の形に反映している。SQUID の接合の帯電エネルギーも大きいので、この波動関数はある程度の広がりをもっているが、そのピーク位置が qubit の状態によって変化する。qubit が重ね合わせ状態 $|\psi_{\text{qubit}}\rangle = a|L\rangle + b|R\rangle$ にあるとき、近似的な計算によって、そのピーク位置は、qubit の σ_z があたかも

$$\sigma_z \rightarrow |a|^2 - |b|^2 = 2|a|^2 - 1 \quad (81)$$

であるときの位置にくることがわかる。(ただし、qubit が高速な運動をしていないときに限る)

これは qubit の重ね合わせ状態に対する σ_z の量子力学的期待値 $\langle \psi_{\text{qubit}} | \sigma_z | \psi_{\text{qubit}} \rangle$ とたまたま一致している。それゆえ、 I_{sw} の分布は平均をとる前から、まるで $\langle I_{sw} \rangle$ であるような形をしていたのだと解釈することができる。

6 最後に

微小 Josephson 接合を含む超伝導回路から構成される超伝導量子ビットは、電荷と位相という常に 2 種類の自由度をもつ点でさまざまな顔を見せてくれる。特に、これから複数量子ビットの系を実現していく過程では、予想もつかないようなアイデアが現れ、さまざまな展開をこれから見せていくことだろうと期待される。また、超伝導量子ビットの実験は、上で見てきたように「測定」というものについていろいろ考えさせられるとともに、理論と実験とを突き合わせながら考察がすすめられる段階に入ってきた。

そもそも量子ビットや量子計算機の研究における興味には「量子力学」そのものに対する憧れのようなものが背景にあるような気がする。そんな憧れがテクノロジーと利益を共にする希有な研究対象である「量子コンピュータ」。こんな時代に研究をやっていてよかった、と思えるように精進したい。

謝辞

日頃、御指導御鞭撻いただく石原直 NTT 物性科学基礎研究所所長に感謝いたします。本講義の内容は、NTT 物性基礎研において、田中弘隆、齋藤史郎、高柳英明、東工大・上田正仁、諸氏と行なっている超伝導磁束量子ビットの研究のために議論・考察した中から得た知識や知見に基づいています。これら共同研究者に深く感謝します。ただし、もしこの講義ノートに正しくない記述が含まれていたとしたら、それは筆者の勉強不足のためであり筆者個人の責任であります。

References

- [1] 細谷暁夫, 「量子コンピュータの基礎」 (サイエンス社, 1999)
- [2] 西野哲朗, 「量子コンピュータの理論」 (培風館, 2002)
- [3] M. A. Nielsen and I. L. Chuang 'Quantum Computation and Quantum Information', (Cambridge Univ. Press, 2000).
電話帳のように分厚い教科書。paperback なら\$100 しないと思うので、量子計算機のことを勉強したい人は持っておくと良いです。というのは、この分野は、物理屋さん、情報屋さん、計算屋さん、が大抵それぞれの方言で書いているので、互いの関係はすごく見えにくいのですが、この本は、2 人の著者によって程よくいろんな言語が中和されていて、ここからみるとどの地方もなんとなく眺められるような気分になれます。
- [4] N. David Mermin, "Notes for Physicists on Theory of Quantum Computation".
WWW 上にあります。固体物理の古典的教科書 Ashcroft-Mermin の Mermin 先生です。物性を勉強して spin 演算子とかには馴染みのある人が、「量子計算」に始めて首を突っ込むには、この約 30 ページという分量がとっつきやすいかも知れません。実験の話は出てきません。
- [5] 藤澤, 固体物理 36, 19(2001) とその参考文献。
- [6] T. Fujisawa *et al.*, to appear in Nature (2003).
- [7] D. V. Averin and K. K. Likharev, in *Mesoscopic Phenomena in Solids*, ed. by B. Altshuler, P. A. Lee, and R. A. Webb (Elsevier, Amsterdam, 1991).
- [8] G-L. Ingold and Yu. V. Nazarov, pp.21-107, in *Single Charge Tunneling*, Chap. 2, edited by H. Grabert and M. H. Devoret, (Plenum Press, New York, 1992).
- [9] 岩渕修一「メソスコピック系の物理」 Chap.5 ならびに付録 A.6, (丸善, 東京, 1998).
- [10] Ulrich Weiss, 'Quantum Dissipative Systems (2nd edition)', (Series in Modern Condensed Matter Physics), (World Scientific, 1999).
- [11] N. Makri, J. Math. Phys. 36, 2430(1995).
- [12] V. Bouchiat, *et al.*, Physica Scripta. Vol. T76, 165 (1998).
- [13] Y. Nakamura *et al.*, Phys. Rev. Lett., 79, 2328 (1997).
- [14] Y. Nakamura *et al.*, Nature, Vol. 398, 786 (1999).
- [15] 中村泰信、他「ジョセフソン接合を用いた量子ビット」, 応用物理, 69, 11 月号, 1299 (2000).
- [16] Yu. A. Pashkin, *et al.*, Nature 421, 823(2003).
- [17] J. R. Friedman *et al.*, Nature 406, 43 (1999).
- [18] C. H. van der Wal *et al.*, Science 290, 27 October (2000).
- [19] 高柳, 田中, 齋藤, 中ノ, "超伝導の磁束状態を用いた量子ビットの状態測定", 応用物理, 72, 1 月号, 36-40 (2003).
- [20] J. M. Martinis, S. Nam J. Aumentado, and C. Urbina, Phys. Rev. Lett. 89, 117901 (2002).
- [21] Yang Yu, *et al.*, Science 296, 889(2002).

- [22] J. E. Mooij, *et al.*, Science 285, 1036(1999).
- [23] T. P. Orlando, *et al.*, Phys. Rev. B 60, 15398 (1999).
- [24] D. Vion, *et al.*, Science 296, 886(2002).
- [25] I. Chiorescu, Y. Nakamura, C.J.P.M. Harmans, J.E. Mooij, Science 299, 1869(2003).
- [26] H. Nakano and H. Takayanagi, J. Phys. Soc. Jpn. 72, Suppl. A 1(2003). 中ノ, 高柳「DC-SQUID による超伝導磁束 qubit 測定の理論的検討」, 物理学会講演概要集 57 第4分冊 25aWE-8(2002). 中ノ, 斎藤, 田中, 高柳「微小ジョセフソン接合 SQUID による磁束量子ビット測定における電流値の揺らぎに関する考察」, 物理学会講演概要集 58 第4分冊 28aYH-10(2003). Nakano and H. Takayanagi, p.359 in *Toward the Controllable Quantum States*, edited by H. Takayanagi and J. Nitta (World Scientific Pub., Singapore, 2003).