

p -adic analogue of Shintani's formula

京大 理 加塩 朋和 (Tomokazu Kashio)
Faculty of Science, Kyoto University

Introduction

Shimura's CM-period と (多重) ガンマ函数, 及び (総実代数体上の) L 函数の $s=0$ での微分とはそれぞれ関係がある. 例として the Chowla-Selberg formula と Yoshida's conjecture [14] を挙げる.

The Chowla-Selberg formula.

$$(0.1) \quad \pi p_K(\text{id}, \text{id})^2 \sim \prod_{a=1}^{d-1} \Gamma\left(\frac{a}{d}\right)^{\omega_K \chi(a)/2h_K} = d \exp\left(\frac{L'(0, \chi)}{L(0, \chi)}\right).$$

ここに K は判別式 $-d$ の虚 2 次体, p_K は Shimura's CM-period symbol, ω_K, h_K はそれぞれ K の類数と K に含まれる 1 のべき根の個数, χ は $K/\mathbb{Q}$ に対応する Dirichlet 指標とする. また $a, b \in \mathbb{C}, b \neq 0$ に対し $a \sim b$ は $a/b \in \overline{\mathbb{Q}}$ を意味する.

Yoshida's conjecture. F を総実な体, K を F 上 abelian な CM-field とする. $G = \text{Gal}(K/F)$ と置き, $\tau \in G$ に対して

$$(0.2) \quad \prod_{\sigma \in J_K} p_K(\sigma, \tau\sigma) \sim \pi^{-[K:\mathbb{Q}]\mu(\tau)/2} \exp\left(\sum_{\chi \in \hat{G}_-} \chi(\tau) \frac{L'(0, \chi)}{L(0, \chi)}\right).$$

また τ が id, complex conjugation, その他の時, それぞれ $\mu(\tau) = 1, -1, 0$ とする.

ここで Yoshida's conjecture はより精密な形の予想を持つ. すなわち Shintani's formula (§1) を用いて右辺を多重ガンマ函数で表し, 分解することにより (大まかに言うと) CM-period を多重ガンマ函数で表しているのである. つまり the Chowla-Selberg formula の一般化を与えている.

現在, この予想及び結果の p 進化について吉田敬之教授と共同で研究を行っており, いくつかの成果が得られた. ここでは Shintani's formula の p 進化について紹介したい.

1 Shintani's formula

この章では、総実体上の partial zeta 関数の $s = 0$ での微分を多重ガンマ関数で表した Shintani's formula について復習しよう [13]. r を正整数とする. $a_i, x \in \mathbb{R}^+$ に対して r 重 Riemann zeta 関数を

$$(1.1) \quad \zeta_r(s, (a_1, \dots, a_r), x) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=0}^{\infty} \left\{ x + \sum_{i=1}^r a_i m_i \right\}^{-s}$$

で定義する. これは $\operatorname{Re}(s) > r$ で収束し全 s 平面有理型に解析接続される. 更に

$$(1.2) \quad \log(\rho_r((a_1, \dots, a_r))) = -\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left[\frac{d}{ds} \zeta_r(s, (a_1, \dots, a_r), x) \right]_{s=0} + \log x \right\},$$

$$\left[\frac{d}{ds} \zeta_r(s, (a_1, \dots, a_r), x) \right]_{s=0} = \log \left(\frac{\Gamma_r(x, (a_1, \dots, a_r))}{\rho_r((a_1, \dots, a_r))} \right)$$

と置くと $\Gamma_r(x, (a_1, \dots, a_r))$ は Barnes [1] によって導入された r 重ガンマ関数であり次を満たす.

$$(1.3) \quad \log \left(\frac{\Gamma_1(x, (1))}{\rho_1((1))} \right) = -\log(\sqrt{2\pi}) + \log(\Gamma(x)).$$

更に多重 zeta 関数の拡張を行う. $A = (a_{i,j})$ を $n \times r$ 行列 ($a_{j,i} > 0$) とし, $x = (x_1, \dots, x_r)$, $x_i \geq 0, x \neq 0$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_r)$, $\xi_i \in \mathbb{C}$, $|\xi_i| \leq 1$ とする.

$$(1.4) \quad \zeta_r(s, A, x, \xi) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=0}^{\infty} \xi^m \prod_{j=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^r a_{j,i}(m_i + x_i) \right\}^{-s}$$

を考える. ここで $\xi^m = \prod_{i=1}^r \xi_i^{m_i}$ とする. これは $\operatorname{Re}(s) > r/n$ で収束し全 s 平面有理型に解析接続される. 今 $\zeta_r(s, A, x) = \zeta_r(s, A, x, (1, \dots, 1))$ と置こう. すると

$$(1.5) \quad \left[\frac{d}{ds} \zeta_r(s, A, x) \right]_{s=0} = \sum_{j=1}^n \log \left(\frac{\Gamma_r(x^t A_j, A_j)}{\rho_r(A_j)} \right) + \frac{(-1)^r}{n} \sum_l C_l(A) \prod_{i=1}^r \frac{B_{l_i}(x_i)}{l_i!}$$

が成り立つ. ただし l は $l = (l_1, \dots, l_r)$, $l_1 + \dots + l_r = r$, $l_i \geq 0$ を満たすもの全体を走り, $B_l(x)$ は Bernoulli 多項式を表し, $A_j = (a_{j,1}, \dots, a_{j,r})$, $C_l(A) = \sum_{1 \leq j,k \leq n, j \neq k} C_{l,j,k}(A)$ であり

$$C_{l,j,k}(A) = \int_0^1 \left\{ \prod_{m=1}^r (a_{j,m} + a_{k,m}u)^{l_m-1} - \prod_{m=1}^r a_{j,m}^{l_m-1} \right\} \frac{du}{u}$$

である.

次に総実体上の partial zeta 関数を考える. F を n 次の総実な体とし, $J_F = \{\sigma_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$, F の無限素点全体を $\infty_1, \dots, \infty_n$ と置く. F の整 ideal $\mathfrak{f}$ に対し, $C_{\mathfrak{f}}$ を

$f\infty_1\cdots\infty_n$ を法とする F の ideal 類群とする. また O_F を F の整数環, E_F^+ を総正単数群, $E_f^+ = \{u \in E_F^+, u \equiv 1 \pmod{f}\}$ と書くことにする. $c \in C_f$ に対し partial zeta 関数を

$$\zeta_f(s, c) = \sum_{\mathfrak{g}} N\mathfrak{g}^{-s}$$

で定める. ただし $\mathfrak{g}$ は c の類に含まれる整 ideal 全体を走る.

partial zeta 関数を上で拡張された多重 zeta 関数で表すために, cone 分解というものを考える. $x \in F$ に対して $x^{(i)} = \sigma_i(x)$ と書くことにする. すると $x \mapsto (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$ により F を $\mathbf{R}^n$ の部分環に埋め込むことが出来る. また $\mathbf{R}^n$ 中の r 個の一次独立なベクトル v_i ($i = 1, 2, \dots, r$) に対して $C(v_1, v_2, \dots, v_r) = \{t_1 v_1 + t_2 v_2 + \cdots + t_r v_r \mid t_i \in \mathbf{R}^+\}$ と置き, $v_1, \dots, v_r$ を basis とする r 次元の open simplicial cone と呼ぶ. すると次のことが言える.

Lemma 1. 有限集合 J 及び有限個の元 $v_{j,i} \in O_F$ ($j \in J, i = 1, 2, \dots, r(j)$) が次のように取れる. すなわち各 j について $v_{j,1}, \dots, v_{j,r(j)}$ は一次独立で, かつ

$$\mathbf{R}^{+n} = \bigsqcup_{j \in J} \bigsqcup_{u \in E_f^+} u C(v_{j,1}, v_{j,2}, \dots, v_{j,r(j)}).$$

ただし $\bigsqcup$ は非交和を表す.

Lemma 2. 記号は上記の通りとし, 更に整 ideal $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{a}^{-1} \in c$ となるように取る. 必要なら取り変えて $v_{j,i} \in \mathfrak{a}f$ とする. $v_j = (v_{j,1}, v_{j,2}, \dots, v_{j,r(j)})$ と置き, 次のように定義する.

$$\begin{aligned} R(\mathfrak{a}^{-1}, j) &= R(\mathfrak{a}^{-1}, C(v_j)) \\ &= \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{r(j)}) \in \mathbf{Q}^{r(j)} \mid 0 < x_i \leq 1, \sum_{i=1}^{r(j)} x_i v_{j,i} \in \mathfrak{a}, \equiv 1 \pmod{f}\}, \end{aligned}$$

この時, $R(\mathfrak{a}^{-1}, j)$ は有限集合であり, 次が成り立つ.

$$\zeta_f(s, c) = N\mathfrak{a}^s \sum_{j \in J} \sum_{x \in R(\mathfrak{a}^{-1}, j)} \zeta(s, A_{v_j}, x).$$

ただし A_{v_j} は (i, l) 成分を $v_{j,i}^\sigma$ とする $n \times r(j)$ 行列とする.

さて, この Lemma と式 (1.5) より次を得る.

Shintani's formula. 記号は上記の通りとする. 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \left[\frac{d'}{ds} \zeta_f(s, c) \right]_{s=0} &= \log(N\mathfrak{a}) \zeta_f(0, c) \\ &+ \sum_{\sigma \in J_F} \sum_{j \in J} \sum_{x \in R(\mathfrak{a}^{-1}, j)} \log \left(\frac{\Gamma_{r(j)}(x^\sigma v_j^\sigma)}{\rho_{r(j)}(v_j^\sigma)} \right) \\ &+ \sum_{j \in J} \sum_{x \in R(\mathfrak{a}^{-1}, j)} \frac{(-1)^{r(j)}}{n} \sum_l C_l(A_{v_j}) \prod_{i=1}^{r(j)} \frac{B_{l_i}(x_i)}{l_i!}. \end{aligned}$$

2 p-adic multiple gamma functions

この章では、古典的な多重ガンマ関数の定義 [1] に習い、 p 進多重 zeta 関数 [3] の $s = 0$ での微分により p 進多重ガンマ関数を定義する. p を素数, その上にある F の素 ideal を一つ固定して $\mathfrak{p}$ と置く. F には $\mathfrak{p}$ による位相が入っていると考え, 完備化した体を $F_{\mathfrak{p}}$ と置く. $|\cdot|_p$ は $|p|_p = 1/p$ で正規化した p 進乗法付値を表すものとする. r を正整数とする. この時連続関数 $f(X) = f(X_1, \dots, X_r) : \mathbb{Z}_p^r \rightarrow F_{\mathfrak{p}}$ に対して

$$(2.1) \quad J_X(f(X)) = \lim_{l_1 \rightarrow \infty} \lim_{l_2 \rightarrow \infty} \cdots \lim_{l_r \rightarrow \infty} \frac{1}{p^{l_1+l_2+\cdots+l_r}} \sum_{n_1=0}^{p^{l_1}-1} \sum_{n_2=0}^{p^{l_2}-1} \cdots \sum_{n_r=0}^{p^{l_r}-1} f(n).$$

と定義する. これは必ずしも収束するとは限らない. $r = 1$ の時以下の性質を持つ.

$$(2.2) \quad x \in F_{\mathfrak{p}} \text{ に対して, } J_X((X+x)^m) = B_m(x).$$

$$(2.3) \quad J_X\left(\binom{X}{m}\right) = \frac{(-1)^m}{m+1}.$$

ただし, 多項式環 $F_{\mathfrak{p}}[X]$ の元は $\mathbb{Z}_p^r$ 上の連続関数とみなし, $\binom{X}{0} = 1$, $m \geq 1$ の時 $\binom{X}{m} = \frac{X(X-1)\cdots(X-m+1)}{m!}$ とする. 更に $\mathbb{Z}_p^s$ 上の連続関数 $f(X_1, \dots, X_s)$ 及び $\mathbb{Z}_p^{r-s}$ 上の連続関数 $g(X_{s+1}, \dots, X_r)$ がある時

$$(2.4) \quad \begin{aligned} J_{X_1, \dots, X_r}(f(X_1, \dots, X_s)g(X_{s+1}, \dots, X_r)) \\ = J_{X_1, \dots, X_s}(f(X_1, \dots, X_s))J_{X_{s+1}, \dots, X_r}(g(X_{s+1}, \dots, X_r)). \end{aligned}$$

ここで $a_i, a \in O_{F_{\mathfrak{p}}}$, $a_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, r$), $s \in \mathbb{Z}_p$ に対し p 進多重 zeta 関数を次で定義する.

$$(2.5) \quad \zeta_{p,r}(s, (a_1, a_2, \dots, a_r), a) = \frac{(-1)^r J_X \left(\theta_p^{(0)}(f(X)) f(X)^r \left(\theta_p^{(-1)}(f(X)) f(X) \right)^{-s} \right)}{(r-s)(r-1-s) \cdots (1-s) a_1 a_2 \cdots a_r}.$$

ただし記号は $f(X) = \sum_{i=1}^r a_i X_i + a$, θ_p は Teichmüller character, つまり $\theta_p : O_{\overline{\mathbb{Q}_p}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ で次で定められるものである. $|x|_p < 1$ の時 $\theta_p(x) = 0$, $|x|_p = 1$ ならば $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体 K で $K \ni x$ となるものを取り, f を O_K の剰余体と $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ との拡大次数と置く. この時 $\theta_p(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} x^{p^l}$ で定める. これを用いて, $|x|_p < 1$ ならば $\theta_p^{(n)}(x) = 0$, $|x|_p = 1$ ならば $\theta_p^{(n)}(x) = (\theta_p(x))^n$ と定める. 更に $y \in 1 + \overline{\mathfrak{p}}$ に対して y^s は $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} (y-1)^k$ で定義する. この p 進多重 zeta 関数は次の性質を持つ.

Lemma 3. $a_i, a \in O_{F_{\mathfrak{p}}}$, $a_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, r$), $s \in \mathbb{Z}_p$ に対し p 進多重 zeta 関数は収束し, $s = 0$ で解析的である. 更に $a_i, a \in F$, $a_i, a > 0$, $|a_i|_p, |a-1|_p < 1$ ($i = 1, 2, \dots, r$), $k = 0, 1, 2, \dots$ に対して

$$\zeta_{p,r}(-k, (a_1, a_2, \dots, a_r), a) = \zeta_r(-k, (a_1, a_2, \dots, a_r), a).$$

次に p 進 r 重ガンマ函数を次で定義する. $a_i, a \in O_{F_{\mathfrak{p}}}$, $a_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, r$) に対して

$$(2.6) \quad L\Gamma_{p,r}(a, (a_1, a_2, \dots, a_r)) = \frac{d\zeta_{p,r}(s, (a_1, a_2, \dots, a_r), a)}{ds} \Big|_{s=0}$$

と置く. この p 進 r 重ガンマ函数は次の性質を持つ.

Lemma 4. $L\Gamma_{p,r}((a_1, \dots, a_r), a)$ は $a_i, a \in O_{F_{\mathfrak{p}}}$, $a_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, r$) で連続であり, $a \in \mathbb{Z}_p$ に対して

$$L\Gamma_{p,1}(a, (1)) = \log_p(\Gamma_p(a)).$$

ここで $\log_p: \mathbb{C}_p^\times \rightarrow \mathbb{C}_p$ は Iwasawa p 進 $\log$ 函数を表しており, Γ_p は Morita p 進ガンマ函数であり $\Gamma_p(n) = (-1)^n \prod_{i=1, p \nmid i}^{n-1} i$ ($n = 1, 2, \dots$) で定義され $\mathbb{Z}_p$ 上の連続函数に延ばしたものである. この定義と性質は古典的な多重ガンマ函数のそれを踏襲している.

3 p-adic zeta functions over totally real fields

この章では p 進 partial zeta 函数の構成を Cassou-Noguès [5] に習って行う. $\zeta_r(s, A, x)$ の形の多重 zeta 函数は (少なくとも簡単には) p 進での類似を持たない. そのためまずは p 進化できる形への変形を行う. 記号は §1 と同じとする. $c \in C_f$ に対して整 ideal $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ を次の様にする. $\mathfrak{a}^{-1} \in \mathfrak{c}$ を固定する. それに対して open simplicial cones を Lemma 1,2 の様にする. $\mathfrak{b}$ は $\mathfrak{f}$ と互いに素であり, $\mathfrak{b} \neq (1)$ かつ C_f の中で $\mathfrak{b} = 1$, 更に次を満たすものを取る.

- (i) $(\mathfrak{b}, \mathfrak{D}) = 1$,
- (ii) $(\mathfrak{b}, (v_{i,j})) = 1$ for all $j \in J, i = 1, 2, \dots, r(j)$,
- (iii) $O_F/\mathfrak{b} \simeq \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$.

ここで $\mathfrak{D}$ は F の共役差積, b は $\mathfrak{b} \cap \mathbb{Z}$ の正整数の生成元とする. 次に

$$(3.1) \quad \zeta_f(s, \mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{b}) = (Nb^{1-s} - 1)\zeta_f(s, \mathfrak{c})$$

と置こう. $e(x) = \exp(2\pi ix)$ と表すことにする. 次の Lemma 及び Theorem が成り立つ.

Lemma 5. $\nu \in \mathfrak{D}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}$ を次を満たすように取れる. $Tr(\nu) = c/b$, $0 \neq c \in \mathbb{Z}$, $(b, c) = 1$ であり, かつ

$$\begin{aligned} & \text{各 } i, j \text{ に対して } e(Tr(v_{i,j}\nu)) \text{ は } 1 \text{ の原始 } b \text{ 乗根,} \\ & \sum_{\mu=0}^{b-1} e(Tr(\alpha\mu\nu)) = \begin{cases} 0 & \alpha \in O_F, \notin \mathfrak{b} \text{ の時,} \\ Nb = b & \alpha \in \mathfrak{b} \text{ の時.} \end{cases} \end{aligned}$$

Theorem 6. $\xi_{j,i} = e(Tr(v_{j,i}\nu))$, $\xi_x = e(Tr(\nu \sum_{i=1}^{r(j)} x_i v_{j,i}))$ と置く時,

$$\zeta_f(s, \mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{b}) = Na^s \sum_{\mu=1}^{b-1} \sum_{j \in J} \sum_{x \in R(\mathfrak{a}^{-1}, j)} \xi_x^\mu \zeta_{r(j)}(s, A_{v_j}, x, (\xi_{j,1}^\mu, \dots, \xi_{j,r(j)}^\mu)).$$

$\zeta_r(s, A, x, \xi)$ の形の多重 zeta 関数は (ある条件の下で) p 進化できる. これを見て行こう. P を r 変数の関数とする. この時 r 変数の形式的べき級数を次の様に定める.

$$R(P)(T) = \sum_k \frac{\lambda_k(P)}{(1-T)^k}.$$

ここで $k = (k_1, \dots, k_r)$ は $k_i = 0, 1, \dots$ ($i = 1, 2, \dots, r$), $k \neq 0$ を満たす k 全体を走り, $T = (T_1, T_2, \dots, T_r)$, $(1-T)^k = (1-T_1)^{k_1}(1-T_2)^{k_2} \dots (1-T_r)^{k_r}$,

$$\lambda_k(P) = \sum_{l_1=0}^{k_1} \dots \sum_{l_r=0}^{k_r} \left\{ \begin{smallmatrix} k_1 \\ l_1 \end{smallmatrix} \right\} \dots \left\{ \begin{smallmatrix} k_r \\ l_r \end{smallmatrix} \right\} P(-l_1, -l_2, \dots, -l_r),$$

$$\left\{ \begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right\} = \begin{cases} (-1)^{b-1} \binom{a-1}{b-1} & a, b \geq 1 \text{ の時,} \\ 1 & a = 0 \text{ の時,} \\ 0 & a \geq 1, b = 0 \text{ の時,} \end{cases}$$

と置いた. この時次が成り立つ.

Lemma 7. $A = (a_{j,i})$ は $n \times r$ 行列 ($a_{j,i} > 0$), $x = (x_1, \dots, x_r)$, $x_i \geq 0, x \neq 0$, また各 i において $\xi_i \neq 1$ は 1 のべき乗根であるとする. この時 $k = 0, 1, \dots$ に対して

$$\zeta_r(-k, A, x, \xi) = R\left(\prod_{j=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^r a_{j,i}(X_i + x_i) \right\}^k\right)(\xi).$$

ここで (ある種の) p 進多重 zeta 関数を定義する. p は odd prime とする ($p = 2$ でも条件を厳しくすれば同様の議論ができる). $a_{j,i}, x_i \in O_{\mathfrak{p}}$ は $|a_{j,i}|_p, |\prod_{j=1}^n \{\sum_{i=1}^r a_{j,i}x_i\} - 1|_p < 1$ を満たす元, $\xi_i \neq 1$ は p がその位数を割らない 1 のべき乗根 ($j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, r$) としたとき

$$(3.2) \quad \zeta_{p,r}(s, A, x, \xi) = R\left(\prod_{j=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^r a_{j,i}(X_i + x_i) \right\}^{-s}\right)(\xi)$$

と定義する. ただし右辺の収束は p 進位相で考える. この p 進 r 重 zeta 関数は次の性質を満たす.

Lemma 8. 上記の条件で $\zeta_{p,r}(s, A, x, \xi)$ は収束する. 更に $a_{j,i}, x_i \in F$, $a_{j,i} > 0, x_i \geq 0$ と仮定すると $k = 0, 1, 2, \dots$ に対して

$$\zeta_{p,r}(-k, A, x, \xi) = \zeta_r(-k, A, x, \xi)$$

が成り立つ.

この p 進多重 zeta 函数を使って p 進 partial zeta 函数を構成する. (p) の上の prime ideal は全て $\mathfrak{f}$ を割っていると仮定する. この時

$$(3.3) \quad \zeta_{p,\mathfrak{f}}(s, a^{-1}, b) = (\theta_p^{(-1)}(Na)(Nb))^s \sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{j \in J} \sum_{x \in R(a^{-1}, j)} \xi_x^\mu \zeta_{p,r}(s, A_{v_j}, x, \xi_j^\mu),$$

$$(3.4) \quad \zeta_{p,\mathfrak{f}}(s, c) = \frac{\zeta_{p,\mathfrak{f}}(s, a^{-1}, b)}{(\theta_p^{(-1)}(Nb)Nb)^{1-s} - 1}$$

と定義する. すると次の性質を持つ.

Theorem 9. 上記の条件で $k = 0, 1, 2, \dots$ $k \equiv 0 \pmod{p^f - 1}$ に対して

$$\zeta_{p,\mathfrak{f}}(-k, c) = \zeta_{\mathfrak{f}}(-k, c).$$

ただし f は $O_F/\mathfrak{p}$ と $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の拡大次数とする. 更に χ を $C_{\mathfrak{f}}$ の odd character, また Θ_p を $\Theta_p(c) = \theta_p(N(c))$ で定義される character とする. すると p 進 L 函数は

$$L_{p,\mathfrak{f}}(1-m, \chi) = L_{\mathfrak{f}}(1-m, \chi \Theta_p^{-m}), \quad (1 \leq m \in \mathbb{Z})$$

で特徴付けられ, 次で表せる.

$$L_{p,\mathfrak{f}}(s, \chi) = \sum_{c \in C_{\mathfrak{f}}} \chi \Theta_p^{-1}(c) \zeta_{p,\mathfrak{f}}(s, c).$$

4 the derivatives at $s=0$ of p -adic zeta functions

p 進 partial zeta 函数の微分を計算する. 中心となるアイデアは Cassou-Noguès [4] が用いている, 式 (3.2) の形の p 進多重 zeta 函数が項別微分できて分解できる, ということである. すなわち次のが成り立つ.

Lemma 10. $a_{j,i}, x_i \in O_{\mathfrak{p}}$ は $|a_{j,i}|_p, |\sum_{i=1}^r a_{j,i}x_i - 1|_p < 1$ を満たす元, $\xi_i \neq 1$ は p がその位数を割らない 1 のべき乗根 ($j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, r$) としたとき

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \zeta_{p,r}(s, A, x, \xi)|_{s=0} &= R(-\log_p(\prod_{j=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^r a_{j,i}(X_i + x_i) \right\}))(\xi) \\ &= \sum_{j=1}^n R(-\log_p(\left\{ \sum_{i=1}^r a_{j,i}(X_i + x_i) \right\}))(\xi) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{d}{ds} \zeta_{p,r}(s, A_j, x, \xi)|_{s=0} \end{aligned}$$

この Lemma と cone の取替え等の操作, 及び若干の計算により次の主定理を得る.

Theorem 11. $f, c, a, b, v_{j,i}, b$ を上記の様にする, $\alpha \in O_F$ は $b = (\alpha)$ となる元とする
ここで新しく *open simplicial cones* $\{C(v_{j'}) | j' \in J'\}$ を次を満たすように取る.

(a) $v_{j',i} \in \mathfrak{af}$ であり各々総正である.

(b) $\{C(v_{j'}) | j' \in J'\}$ は $\{C(v_j) | j \in J\}$ の細分である.

(c) $u_{j'} \in E_f^+$ が存在し, $\{C(u_{j'}v_{j'}) | j' \in J'\}$ が $\{C((b/\alpha)v_j) | j \in J\}$ の細分となる.

この時

$$\left[\frac{d}{ds} \zeta_f(s, c) \right]_{s=0} = \log(Na) \zeta_f(0, c) + \sum_{\sigma \in J_F} \sum_{j \in J} \sum_{x \in R(a^{-1}, j)} \log \left(\frac{\Gamma_{r(j)}(x^t v_j^\sigma, v_j^\sigma)}{\rho_{r(j)}(v_j^\sigma)} \right) \\ + T_0(a^{-1}, \{v_j\}_{j \in J}).$$

ただし

$$T_0(a^{-1}, \{v_j\}_{j \in J}) = \sum_{j \in J} \sum_{x \in R(a^{-1}, j)} \frac{(-1)^{r(j)}}{n} \sum_l C_l \left(\begin{pmatrix} v_j^{\sigma_1} \\ \vdots \\ v_j^{\sigma_n} \end{pmatrix} \right) \prod_{i=1}^{r(j)} \frac{B_{l_i}(x_i)}{l_i!}.$$

次に (p) の上の *prime ideal* は全て f を割っていると仮定する. この時

$$\left[\frac{d}{ds} \zeta_{p,f}(s, c) \right]_{s=0} = \log_p(Na) \zeta_{p,f}(0, c) + \sum_{\sigma \in J_F} \sum_{j \in J} \sum_{x \in R(a^{-1}, j)} L \Gamma_{p,r(j)}(x^t v_j^\sigma, v_j^\sigma) \\ + T_p(a^{-1}, \{v_j\}_{j \in J}),$$

ただし

$$T_p(a^{-1}, \{v_j\}_{j \in J}) = \frac{-b}{b-1} \sum_{\sigma \in J_F} \sum_{j' \in J', u_{j'} \neq 1} \sum_{x' \in R(a^{-1}, j')} \log_p(u_{j'}^\sigma) \zeta_{r(j')}(0, v_{j'}^\sigma, x'^t v_{j'}^\sigma).$$

更に同じ記号を用いて

$$T_0(a^{-1}, \{v_j\}_{j \in J}) = \frac{-b}{b-1} \sum'_{\sigma \in J_F} \sum_{j' \in J', u_{j'} \neq 1} \sum_{x' \in R(a^{-1}, j')} \log(u_{j'}^\sigma) \zeta_{r(j')}(0, v_{j'}^\sigma, x'^t v_{j'}^\sigma)$$

と表せる.

ここで “ $\{C(v_{j'}) | j' \in J'\}$ は $\{C(v_j) | j \in J\}$ の細分である” とは

$$\text{全射 } m: J' \rightarrow J \text{ が存在し } C(v_j) = \bigsqcup_{j' \in m^{-1}(\{j\})} C(v_{j'}) \text{ を満たす}$$

事とする ([14, §5]).

この Theorem は Ferrero-Greenberg の結果 [7, Proposition 1] を含んでいる。この結果を求めてみよう。 $F = \mathbb{Q}$, $d \geq 1$ とすると次を同一視できる。

$$\begin{aligned} C_{(d)} &= (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times \\ \overline{(a/b)} &\mapsto ab' \bmod d\mathbb{Z} \\ \overline{(a)} &\mapsto a \bmod d\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

ここで $a, b = 1, 2, \dots$ は $(a, d) = (b, d) = 1$ となる数で $b' = 1, 2, \dots$ は $bb' \equiv 1 \bmod d$ を満たす数とする。これにより conductor d の primitive Dirichlet character χ を $C_{(d)}$ の character とみなす。 d は p で割れないとし、 $f = (pd)$ と置く。 $\{(a) \mid 1 \leq a \leq pd-1, (a, pd) = 1\}$ により $C_{(pd)}$ の元を表すことにする。 $C(v^{(a)})$, $(v^{(a)} := apd)$ で open simplicial cone を定義でき $b = (b)$, $(b \geq 1)$ としては $1 \leq a \leq pd$ の範囲の a に対して $(b, a) = 1$ であり、 $b \equiv 1 \bmod pd$ である数を取ればよい。すると Theorem 11 により

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{ds} \zeta_{p,(pd)}(s, (a')) \right]_{s=0} &= \log_p(a) \zeta_{p,1}(0, apd, aa') + L\Gamma_{p,1}(aa', (apd)) \\ &= L\Gamma_{p,1}(a', (pd)), \end{aligned}$$

ただし a' は $1 \leq a' \leq pd$, $aa' \equiv 1 \bmod pd$ を満たす数とする。更に χ を conductor d の primitive Dirichlet character とすると次を得る。

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{ds} L_{p,(pd)}(s, \chi\theta_p) \right]_{s=0} &= \sum_{1 \leq a \leq pd-1, (a, pd)=1} \chi((a')) L\Gamma_{p,1}(a', (pd)) \\ &= \sum_{1 \leq a \leq d-1, (a, d)=1} \chi(a) L\Gamma_{p,1}(a, (d)) \\ &= \sum_{1 \leq a \leq d-1, (a, d)=1} \chi(a) L\Gamma_{p,1}(a/d, (1)) - \log_p(d) L_{p,(pd)}(0, \chi\theta_p). \end{aligned}$$

よって次を得た。

$$(4.1) \quad \left[\frac{d}{ds} L_{p,(pd)}(s, \chi\theta_p) \right]_{s=0} = \sum_{1 \leq a \leq d-1, (a, d)=1} \chi(a) \log_p(\Gamma(a/d)) - \log_p(d) L_{p,(pd)}(0, \chi\theta_p).$$

5 two applications

5.1 p-adic CM-periods

本来の目標である p 進 CM-period との関係について触れたい。すでに我々は簡単な場合の Yoshida's conjecture の p 進化を得ている。すなわち $F = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{Q}(\zeta_m)$, $(p, m) = 1$ の場合である。ここで ζ_m は 1 の原始 m 乗根を表す。この時次が成り立つ。

$$(5.1) \quad \Omega_p^K(\text{id}, \tau) \sim \exp_p \left(\sum_{\chi} \frac{-\chi(\tau)}{[K : \mathbb{Q}]} \frac{L'_p(0, \chi\theta_p)}{L(0, \chi)} \right).$$

ただし χ は odd Dirichlet characters modulo m 全体を走り, Ω_p^K は Ogus [9] の定めた p 進 CM-period symbol に多少手を加えたものを使っている. L_p は Kubota-Leopoldt p 進 L 函数であり, σ_p は $\text{Gal}(K/F)$ の元で $\zeta_m \mapsto \zeta_m^p$ と移すもの, $\exp_p$ は (拡張された) p 進指数函数としている. introduction にも書いた通り, 更なる一般化について (適当な p 進 CM-period の定義も含めて) 吉田敬之教授と共同で研究中である.

5.2 the order at $s = 0$ of p -adic L -functions

K/F は abelian であるとし, その conductor を f_0 と置く. f_0 と p は互いに素であるとし, $f = f_0 * \prod_{p|f_0} p$ と定める. χ を conductor f_0 の primitive, odd な character とする時, 次の予想がある.

$$(5.2) \quad L_{p,f}(s, \chi\theta_p) \text{ の } s = 0 \text{ での order} = \#\{p|(p) \mid \chi(p) = 1\}.$$

ただし $\#$ は集合の元の個数を表す記号とする. (この予想はもっと精密な形を持つ.) 自明な結果として次がある.

$$(5.3) \quad L_{p,f}(s, \chi\theta_p) \text{ の } s = 0 \text{ での order} = 0 \Leftrightarrow \#\{p|(p) \mid \chi(p) = 1\} = 0.$$

更に Theorem 11 で与えられる式により, 次の事が証明できる.

$$(5.4) \quad L_{p,f}(s, \chi\theta_p) \text{ の } s = 0 \text{ での order} \geq 2 \Leftarrow \#\{p|(p) \mid \chi(p) = 1\} \geq 2.$$

この問題も応用を研究中である.

References

- [1] E. W. Barnes, The theory of the multiple gamma function, Trans. Cambridge Philos. Soc. 19 (1904), 374-425.
- [2] P. Berthelot, A. Ogus, F-isocrystals and de Rham cohomology. I, Inv. Math. 72, 159-199 (1983).
- [3] P. Cassou-Noguès, Analogues p -adiques de quelques fonctions arithmétiques, Publ. Math. Bordeaux, p. 1-43, 1974-1975.
- [4] P. Cassou-Noguès, Analogues p -adiques des fonctions Γ -multiples, Société Mathématique de France Astérisque 61 (1979) p. 43-55.
- [5] P. Cassou-Noguès, Valeurs aux entiers négatifs des fonctions zêta et fonctions zêta p -adiques, Inv. Math. 51, 29-59 (1979).
- [6] P. Deligne, K. Ribet, Values of Abelian L -functions at negative integers over totally real fields, Inv. Math. 59 (1980), 227-286.

- [7] B. Ferrero, R. Greenberg, On the Behavior of p -adic L -Functions at $s = 0$, *Inv. Math.* 50, 91-102 (1978).
- [8] K. Iwasawa, Lectures on p -adic L -function, Princeton University Press and University of Tokyo Press (*Annals of Mathematics Studies*, 74), 1972.
- [9] A. Ogus, A p -adic Analogue of the Chowla-Selberg Formula, p -adic Analysis (F. Baldassarri, S. Bosch and B. Dwork editors), *Lecture Notes in Math.* 1454; Springer-Verlag 1990. pp. 319-341.
- [10] J.-P. Serre, Formes modulaires et fonctions zêta p -adiques, *Proc. 1972 Antwerp Summer School*, Springer *Lecture Notes in Math.* 350, 191-268 (1973).
- [11] T. Shintani, On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* 23 (1976), 393-417.
- [12] T. Shintani, On special values of L functions of algebraic number fields, *Sûgaku* 29 (1977), 204-216 (in Japanese).
- [13] T. Shintani, On values at $s = 1$ of certain L functions of totally real algebraic number fields, *Algebraic Number Theory*, *Proc. International Sympos.*, Kyoto, 1976, Kinokuniya, Tokyo, 1977, pp. 201-212.
- [14] H. Yoshida, On absolute CM-periods II, *Amer. J. Math.* 120 (1998), 1199-1236.
- [15] H. Yoshida, Lectures on absolute CM-periods, book manuscript, 2002.