

有限多重ゼータ値における導分関係式について

中村学園大学教育学部 村原 英樹

HIDEKI MURAHARA

FACULTY OF EDUCATION,

NAKAMURA GAKUEN UNIVERSITY

1. 多重ゼータ値の導分関係式

多重ゼータ値は, $k_r \geq 2$ となる正の整数 $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して,

$$\zeta(k_1, \dots, k_r) = \sum_{1 \leq n_1 < \dots < n_r} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}}$$

で定義される. 多重ゼータ値はリーマンゼータ関数の正の整数点での値の一般化であり, その代数 (線形) 関係式のあり方は, 数学的・物理学的対象の構造を反映することが知られている. 多重ゼータ値研究の関心事の1つとして, 多重ゼータ値が張る $\mathbb{Q}$ -線形空間の代数構造を把握すること, および多重ゼータ値の間の関係式を把握すること挙げられ, 近年様々な角度から研究がなされている. 本稿では, 多重ゼータ値の関係式の中でも比較的良好に知られている「導分関係式」について説明する. また, 多重ゼータ値の有限類似と見なされる有限多重ゼータ値の導分関係式, およびその一般化について述べる.

導分関係式について説明するために, いくつかの準備をしよう. 多重ゼータ値の分野でよく用いられる Hoffman の代数的定式化 (参考文献 [2]) を若干形を変えて使用する. $\mathfrak{H} := \mathbb{Q}\langle x, y \rangle$ とし, $\mathbb{Q}$ -線形写像 $Z: \mathbb{Q} + y\mathfrak{H}x \rightarrow \mathbb{R}$ を $Z(1) := 1$, $Z(yx^{k_1-1} \dots yx^{k_r-1}) := \zeta(k_1, \dots, k_r)$ で定める. $\mathfrak{H}$ の導分 (derivation) とは, $\mathbb{Q}$ -線形写像 $\partial: \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$ で, Leibniz 則

$$\partial(w_1 w_2) = \partial(w_1) w_2 + w_1 \partial(w_2) \quad (w_1, w_2 \in \mathfrak{H})$$

を満たすものである. $\mathfrak{H}$ の生成元 x, y の行き先を決めれば導分は定まることに注意する. 正の整数 $l \geq 1$ に対して, 特に $\mathfrak{H}$ の導分 ∂_l を

$$\partial_l(x) := y(x+y)^l x, \quad \partial_l(y) := -y(x+y)^l x$$

で定める．導分 ∂_l は, $\partial_l(1) = 0$ と $\partial_l(x + y) = 0$ を満たす．このとき井原-金子-Zagier は, 導分関係式と呼ばれる次の関係式を示した．

定理 1.1 (導分関係式; [5]). 任意の正の整数 $l \geq 1$ と $w \in \mathbb{Q} + y\mathfrak{H}x$ に対して,

$$Z(\partial_l(w)) = 0$$

が成り立つ．

例 1.2. 簡単な例として, 以下の2つを挙げる．

$$\begin{aligned} Z(\partial_2(yx)) &= Z(y^3x - yx^3) = \zeta(1, 1, 2) - \zeta(4) = 0, \\ Z(\partial_3(yx)) &= Z(y^4x + y^2xyx - yxyx^2 - yx^4) \\ &= \zeta(1, 1, 1, 2) + \zeta(1, 2, 2) - \zeta(2, 3) - \zeta(5) = 0. \end{aligned}$$

定理 1.1 の前身ともいえる次の関係式は, Hoffman によって得られた．

系 1.3 (Hoffman 関係式; [1]). $k_r \geq 2$ となる正の整数 $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して,

$$\sum_{i=1}^r \zeta(k_1, \dots, k_{i-1}, k_i + 1, k_{i+1}, \dots, k_r) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq r \\ k_i \geq 2}} \sum_{j=0}^{k_i-2} \zeta(k_1, \dots, k_{i-1}, k_i - j - 1, j + 2, k_{i+1}, \dots, k_r).$$

が成り立つ．

Proof. 定理 1.1 において, $l = 1$ としたものが, この関係式である. □

次に, 定理 1.1 と系 1.3 の別表記について述べよう．以下では, $\mathfrak{H}$ をその完備化 $\widehat{\mathfrak{H}} := \mathbb{Q}\langle\langle x, y \rangle\rangle$ に埋め込んで考える．このとき, $\mathfrak{H}$ の導分 ∂_l は自然に $\widehat{\mathfrak{H}}$ に拡張されることに注意する．非負整数 m に対して, $\beta_m: \widehat{\mathfrak{H}}[[u]] \rightarrow \mathfrak{H}$ を $\beta_m(w)$ を w に対する u^m の係数と定義する．また Δ_u を $\widehat{\mathfrak{H}}[[u]]$ 上,

$$\Delta_u := \exp \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\partial_l}{l} (-u)^l \right)$$

で与えられる自己同形写像とする．このとき上の定理 1.1 は以下のように書き換えることができる．

定理 1.4. 任意の正の整数 m と $w \in y\mathfrak{H}x$ に対して,

$$Z(\beta_m(1 - \Delta_u)(w)) = 0$$

が成り立つ.

また Hoffman 関係式 (系 1.3) は, 任意の $w \in y\mathfrak{H}x$ に対して,

$$Z(\beta_1(1 - \Delta_u)(w)) = 0$$

が成り立つことと同値である.

2. 有限多重ゼータ値の導分関係式

正の整数 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して, 集合 $\mathcal{A}_n$ を

$$\mathcal{A}_n := \left(\prod_p \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \right) / \left(\bigoplus_p \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \right) = \{(a_p)_p \mid a_p \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\} / \sim,$$

で定義する. ここで $(a_p)_p \sim (b_p)_p$ は, 高々有限個の素数 p を除いて, $a_p = b_p$ が成り立つことを意味する. この集合 $\mathcal{A}_n$ は, 各成分ごとの和と積を考えることによって, 自然に $\mathbb{Q}$ -代数となる. (特に $n = 1$ のときの定義は Zagier による.) また正の整数 $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ と $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して, $\mathcal{A}_n$ における有限多重ゼータ値を

$$\zeta_{\mathcal{A}_n}(k_1, \dots, k_r) := \left(\sum_{1 \leq n_1 < \dots < n_r \leq p-1} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}} \bmod p^n \right)_p \in \mathcal{A}_n$$

で定義する.

近年 Rosen [9] は, 各 $\mathcal{A}_n$ に離散位相を入れ, $\mathbb{Q}$ -代数 $\hat{\mathcal{A}}$ を自然な射影 $\mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{A}_{n-1}$ によって, $\hat{\mathcal{A}} := \lim_{\leftarrow n} \mathcal{A}_n$ と定義した. また $\mathbb{Z}_p$ は p -進整数環とし, 自然な射影 $\pi: \prod_p \mathbb{Z}_p \rightarrow \hat{\mathcal{A}}$ と $\pi_n: \hat{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}_n$ をそれぞれの n に対して定めると, $\hat{\mathcal{A}}$ における有限多重ゼータ値は次のように定義される:

$$\zeta_{\hat{\mathcal{A}}}(k_1, \dots, k_r) := \pi \left(\left(\sum_{1 \leq n_1 < \dots < n_r \leq p-1} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}} \right)_p \right) \in \hat{\mathcal{A}}.$$

簡単に確認できることとして, 任意のインデックス $\mathbf{k} := (k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^r$ に対して, $\pi_n(\zeta_{\hat{\mathcal{A}}}(\mathbf{k})) = \zeta_{\mathcal{A}_n}(\mathbf{k})$ となるのがわかる. 以下記号の簡略化のため, $\mathbf{p} := \pi((p)_p) \in \hat{\mathcal{A}}$ とし, さらに $\mathbf{p} := \pi_n \circ \pi((p)_p) \in \mathcal{A}_n$ とする. (詳細は, Rosen [9] や Seki [11] を参照されたい.)

$\mathfrak{H}$ 上の $\mathbb{Q}$ -線形写像 R_x を任意の $w \in \mathfrak{H}$ に対して, $R_x(w) := wx$ と定める. また $\mathbb{Q}$ -線形写像 $Z_{\mathcal{A}_n}: \mathbb{Q} + y\mathfrak{H} \rightarrow \mathcal{A}_n$ と $Z_{\hat{\mathcal{A}}}: \mathbb{Q} + y\mathfrak{H} \rightarrow \hat{\mathcal{A}}$ をそれぞれ, $Z_{\mathcal{A}_n}(1) = Z_{\hat{\mathcal{A}}}(1) := 1$ と $Z_{\mathcal{A}_n}(yx^{k_1-1} \cdots yx^{k_r-1}) := \zeta_{\mathcal{A}_n}(k_1, \dots, k_r)$ と $Z_{\hat{\mathcal{A}}}(yx^{k_1-1} \cdots yx^{k_r-1}) := \zeta_{\hat{\mathcal{A}}}(k_1, \dots, k_r)$ によって定め, $\mathcal{A} := \mathcal{A}_1$ とする. $\mathcal{A}$ における有限多重ゼータ値の導分関係式は, 小山宏次郎氏によって予想され, 著者によって示された.

定理 2.1 (有限多重ゼータ値の導分関係式; [7, Theorem 2.1]). 任意の正の整数 $l \geq 1$ と $w \in y\mathfrak{H}x$ に対して,

$$Z_{\mathcal{A}}(R_x^{-1}\partial_l(w)) = 0$$

が成り立つ.

この定理の証明は著者によって帰納法による証明が得られたが³, その後いくつかの別証明が与えられている. (参考文献 [4] など.)

次に定理 2.1 の一般化について紹介する. 非負整数 m, n に対して, $\beta_{m,n}: \hat{\mathfrak{H}}[[u, v]] \rightarrow \hat{\mathfrak{H}}$ を $\beta_{m,n}(w)$ を w に対する $u^m v^n$ の係数と定義する. 著者は小野塚との共同研究 [8] で, 井原健太郎氏によって与えられた有限多重ゼータ値の導分関係式の別証明を一般化することで, $\hat{\mathcal{A}}$ における次の定理を示した.

定理 2.2 ($\hat{\mathcal{A}}$ -有限多重ゼータ値の導分関係式; [8, Theorem 1.3]). 任意の正の整数 $l \geq 1$ と $w \in y\mathfrak{H}x$ に対して,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} Z_{\hat{\mathcal{A}}} \left(\beta_{m,n} R_x^{-1} \Delta_u R_x \left(w - w y u \frac{1}{1+xu} \cdot \frac{xv}{1-xv} \right) \right) p^n \\ &= Z_{\hat{\mathcal{A}}}(w) Z_{\hat{\mathcal{A}}} \left(\beta_{m,0} \left(\frac{1}{1-yu} \right) \right) \end{aligned}$$

が成り立つ.

補足 2.3. $Z_{\mathcal{A}}(1, \dots, 1) = 0$ が成り立つことに注意すると (このことはよく知られている, [3, eq.(15)]などを参照), 定理 2.2 は, 井原健太郎氏 (参考文献 [4, Section 5.3]) によって得られた次の式

$$Z_{\mathcal{A}}(\beta_{m,0} R_x^{-1} \Delta_u R_x(w)) = 0 \quad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

の一般化であることがわかる. これは, 定理 2.1 と同値である.

定理 2.2 の系として, 次の Hoffman 関係式 ([1, Theorem5.1]) の $\hat{\mathcal{A}}$ -有限多重ゼータ値での類似が得られる.

系 2.4. 任意の $w \in y\mathfrak{H}$ に対して,

$$Z_{\hat{\mathcal{A}}}(R_x^{-1}\partial_1(wx)) = -\sum_{n=1}^{\infty} Z_{\hat{\mathcal{A}}}(w y x^n) \mathbf{p}^n - Z_{\hat{\mathcal{A}}}(w) Z_{\hat{\mathcal{A}}}(y)$$

が環 $\hat{\mathcal{A}}$ で成り立つ.

最後に, 定理 2.2 の証明の概略について述べよう. (詳しい証明は, [8] を参照. 証明は, 井原健太郎氏の証明と同様の方針で進める.) 概略を述べるために, 多重ゼータ値でよく使われる, 2 種類の積 (調和積 $*$ ・シャッフル積 III) を帰納的に次の式で定義する.

$$1 * w = w * 1 := w,$$

$$y x^{k-1} w_1 * y x^{l-1} w_2 := y x^{k-1} (w_1 * y x^{l-1} w_2) + y x^{l-1} (y x^{k-1} w_1 * w_2) + y x^{k+l-1} (w_1 * w_2),$$

$$1 \text{ III } w = w \text{ III } 1 := w,$$

$$u w_1 \text{ III } v w_2 := u (w_1 \text{ III } v w_2) + v (u w_1 \text{ III } w_2)$$

(ただし, $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $u, v \in \{x, y\}$ とし, w, w_1, w_2 は $\mathbb{Q} + y\mathfrak{H}$ の word とする. またこれらの積は, $\mathbb{Q}$ -双線形であることを仮定する.) この調和積 $*$ とシャッフル積 III は, それぞれ可換かつ推移的であることが知られている. 従って, $\mathbb{Q} + y\mathfrak{H}$ は, それぞれこの調和積 $*$ とシャッフル積 III について, $\mathbb{Q}$ -可換代数となる. (詳細は [2] を参照.)

定理 2.2 の証明には, 次の 2 つの命題を用いる.

命題 2.5. 任意の $w_1, w_2 \in \mathbb{Q} + y\mathfrak{H}$ に対して,

$$Z_{\hat{\mathcal{A}}}(w_1 * w_2) = Z_{\hat{\mathcal{A}}}(w_1) Z_{\hat{\mathcal{A}}}(w_2)$$

が環 $\hat{\mathcal{A}}$ で成立する.

命題 2.6 (Jarossay [6], 関 [10, Theorem 6.4]). 任意の $w_1, w_2 = yx^{k_1-1} \cdots yx^{k_r-1} \in \mathbb{Q} + y\mathfrak{H}$ について,

$$\begin{aligned} & Z_{\hat{\mathcal{A}}}(w_1 \mathfrak{M} w_2) \\ &= (-1)^{k_1+\cdots+k_r} \sum_{l_1, \dots, l_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \left[\prod_{i=1}^r \binom{k_i + l_i - 1}{l_i} \right] Z_{\hat{\mathcal{A}}}(w_1 yx^{k_r+l_r-1} \cdots yx^{k_1+l_1-1}) p^{l_1+\cdots+l_r} \end{aligned}$$

が環 $\hat{\mathcal{A}}$ で成立する.

上記の命題を下の式に適用すれば, 定理の証明が得られる.

命題 2.7 (井原-金子-Zagier [5, Corollary 3]). 任意の $w \in \mathbb{Q} + y\mathfrak{H}$ に対して,

$$\frac{1}{1-yu} * w = \frac{1}{1-yu} \mathfrak{M} \Delta_u(w).$$

が成立する.

REFERENCES

- [1] M. E. Hoffman, *Multiple harmonic series*, Pacific J. Math. **152** (1992), 275–290.
- [2] M. E. Hoffman, *The algebra of multiple harmonic series*, J. Algebra **194** (1997), 477–495.
- [3] M. E. Hoffman, *Quasi-symmetric functions and mod p multiple harmonic sums*, Kyushu J. Math. **69** (2015), 345–366.
- [4] Y. Horikawa, K. Oyama, and H. Murahara, *A note on derivation relations for multiple zeta values and finite multiple zeta values*, arXiv:1809.08389.
- [5] K. Ihara, M. Kaneko, and D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compositio Math. **142** (2006), 307–338.
- [6] D. Jarossay, *An explicit theory of $\pi^{\text{un,cris}}(\mathbb{P}^1 - \{0, \mu_N, \infty\})$* , arXiv:1412.5099.
- [7] H. Murahara, *Derivation relations for finite multiple zeta values*, Int. J. Number Theory **13** (2017), 419–427.
- [8] H. Murahara and T. Onozuka, *Derivation relation for finite multiple zeta values in $\hat{\mathcal{A}}$* , J. Aust. Math. Soc. (to appear).
- [9] J. Rosen, *Asymptotic relation for truncated multiple zeta values*, J. Lond. Math. Soc. (2) **91** (2015), 554–572.
- [10] S. Seki, *Finite multiple polylogarithms*, doctoral dissertation.
- [11] S. Seki, *The p -adic duality for the finite star-multiple polylogarithms*, Tohoku Math J. (2) **71** (2019), 111–122.

(Hideki Murahara) NAKAMURA GAKUEN UNIVERSITY GRADUATE SCHOOL, 5-7-1, BEFU, JONAN-KU,
FUKUOKA, 814-0198, JAPAN

E-mail address: `hmurahara@nakamura-u.ac.jp`