

ある種の微分が作用するホップガロア拡大について

岡山大学 理 中島 淳 (Atsushi Nakajima)

岡山大学 理 横川 賢二 (Kenji Yokogawa)

R を可換環, $\text{char } R = p \neq 0$ (素数) とする。 $H(p^m)$ で次の
様な Hopf alg. を表わすことにする。

$$H(p^m) = R[D]/(D^{p^m}) \text{ as alg. } \quad \overline{D} = d \text{ と書く。}$$

$$\Delta(d) = d \otimes 1 + 1 \otimes d, \quad \varepsilon(d) = 0, \quad \lambda(d) = -d$$

但し Δ は diagonal map, ε は augmentation map

λ は antipode

さて, 一般に H を Hopf alg. とし, 環拡大 A/R が H -
Hopf Galois 拡大とは

- (i) A は H -module algebra
- (ii) A は R -module として fin. gen. faith. proj.
- (iii) $A \# H \cong \text{End}_R(A)$

を満たす時と定義する。特に $H = H(p^m)$ の時は (i) の条件は
 d が A に derivation として act するということである。

又, ここでは断らない限り, A は可換環としておく。

Nakajima [4] の最近の結果によると

“ A/R は $H(p^m)$ -Hopf Galois 振舞 ”

$$\Rightarrow A = R[x_1]_{(x_1^p - d_1)} \otimes \cdots \otimes R[x_m]_{(x_m^p - d_m)} \quad d_i \in R$$

($\otimes = \otimes_R$, 以下 $\overline{x}_i = x_i$ と書く)

今, $\partial_i \stackrel{\text{ext}}{=} \frac{\partial}{\partial x_i} : A \rightarrow A \quad \partial_i(x_j) = \delta_{ij}$ とおき

$$H(p)^m = R[\partial_1] \otimes \cdots \otimes R[\partial_m] = H(p) \otimes \cdots \otimes H(p) \text{ とおく}$$

と, 振舞 A/R は $H(p)^m$ -Hopf Galois 振舞であることが容易に知られる。(Cor. 4) 即ち.

“ $H(p^m)$ -Hopf Galois 振舞 $\Rightarrow H(p)^m$ -Hopf Galois 振舞 ”

ここでは, この逆について考えることにする。換言すれば $\{\partial_i\}$ から適当な derivation を作ることも出来るかどうかということである。なお詳しくは [5] を参照して下さい。

R の 2 つの結果は Nakajima [4] による。

Proposition 1 (Nakajima)

$$A/R : H(p)\text{-Hopf Galois 振舞} \Leftrightarrow A = R[x]_{(x^p - d)}, \quad d(x) = 1$$

Proposition 2 (Nakajima)

$$A/R : H(p^m)\text{-Hopf Galois 振舞} \Rightarrow A = R[x_1]_{(x_1^p - d_1)} \otimes \cdots \otimes R[x_m]_{(x_m^p - d_m)} \quad d_i \in R$$

そして d の $x_i = \overline{x}_i$ への action は $dx_1 = 1, x_i = d^{p^{m-1}-p^{i-1}}(x_m),$
 $dx_i \in R[x_1, \dots, x_{i-1}]$ である。

Remark $d x_i \in R[x_1, \dots, x_{i-1}]$ であるが, d の precise action on x_i は不明であることに注意しておく。又 $x_1, \dots, x_m$ の選び方も unique に定まらず, $\{x_1, \dots, x_m\}$ もうまく選ぶことも問題になることに注意しておく。

Proposition 3 H_i は finite co-commutative Hopf alg. $i=1,2$
 A/R は $H_1 \otimes H_2$ -Hopf Galois 振舞いとす。

$\Rightarrow A$ の subalg. A_1, A_2 が存在して, A/R は H_i -Hopf Galois 振舞いで $A \cong A_1 \otimes A_2$ as $H_1 \otimes H_2$ -module algebras.

Proof. $A_1 = A^{H_2} = \{a \in A \mid k \cdot a = \varepsilon(k) a \text{ for } \forall k \in H_2\}$, $A_2 = A^{H_1}$ とおけば, $A_1 \cong \text{Hom}_{H_1 \otimes H_2}(H_1, A)$, $A_2 \cong \text{Hom}_{H_1 \otimes H_2}(H_2, A)$ となるから, あとは easy である。

Corollary 4. A/R は $H(p)^m = R[\partial_1, \dots, \partial_m]$ -Hopf Galois 振舞いとすると, $A = R[x_1]_{(x_1^p - d_1)} \otimes \dots \otimes R[x_m]_{(x_m^p - d_m)}$, $\partial_i(x_j) = \delta_{ij}$

Proof Prop. 1 及び Prop. 3 より明らか。

さて, 以下では $H(p)^m$ -Hopf Galois 振舞いは $H(p^m)$ -Hopf Galois 振舞いであることを示そう。そのために

Lemma 5 二項係数 $\binom{p^{n-1}-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod{p}$ $n \geq 2$.

Proof. $\binom{p^{n-1}-1}{k} + \binom{p^{n-1}-1}{k+1} = \binom{p^{n-1}}{k+1}$ 及び $\binom{p^{n-1}-1}{0} = 1$
 及び $\binom{p^{n-1}}{k} = \begin{cases} 1 & k=0, p^{n-1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ より従う。

Lemma 6. $A = R[x_1]/(x_1^{p-d_1}) \otimes \cdots \otimes R[x_m]/(x_m^{p-d_m})$ を R の $H(p)^m$ -Hopf Galois 対象とある。このとき R -derivation $A \rightarrow A$ で $d(x_1)=1$, $d^{p^{k-1}-p^{k-2}}(x_k) = x_{k-1}$ ($2 \leq k \leq m$) とするものが存在する。例えば $d = P_0 \partial_1 + P_1 \partial_2 + \cdots + P_{m-1} \partial_m$ で P_i は $p \neq 2$ の時は $P_0 = 1$, $P_i = (-1)^i x_1^{p-1} \cdots x_i^{p-1}$ ($1 \leq i \leq m-1$), $p = 2$ の時は $P_0 = 1$, $P_1 = x_1$, $P_i = P_{i-1} x_i + x_1 \cdots x_{i-1} d_{i-1}$ ($2 \leq i \leq m-1$) と取れば良い。このとき $d^{p^m-1} \neq 0$ で $d^p = 0$ である。

Proof. m に関する帰納法で証明する。 $m=1, 2$ の時は明らかであろう。 $k \leq m-1$ なる k について $d(x_1)=1$, $d^{p^{k-1}-p^{k-2}}(x_k) = x_{k-1}$ ($2 \leq k \leq m-1$) を仮定する。このとき $d^{p^{k-1}}(x_k) = d(x_1) = 1$ ($1 \leq k \leq m-1$) であり, 従って $d^{p^{k-1}}(P_{k-1}) = 0$ である。さて $p \neq 2$ とすると

$$\begin{aligned} d^{p^{m-1}-p^{m-2}}(x_m) &= d^{p^{m-1}-p^{m-2}-1}((-1)^{m-1} x_1^{p-1} \cdots x_{m-1}^{p-1}) \\ &= d^{p^{m-2}-1} d^{p^{m-2}(p-2)}((-1)^{m-1} x_1^{p-1} \cdots x_{m-1}^{p-1}) \\ &= d^{p^{m-2}-1}((-1)^{m-1} x_1^{p-1} \cdots x_{m-2}^{p-1} (d^{p^{m-2}})^{p-2}(x_{m-1}^{p-1})) \\ &\quad (\because d^{p^{m-2}} \text{ は derivation であるから 及び } d^{p^{m-2}}(P_{m-2}) \\ &\quad = 0 \text{ であることを用いた。}) \\ &= d^{p^{m-2}-1}((-1)^{m-1} x_1^{p-1} \cdots x_{m-2}^{p-1} (p-1) x_{m-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= d^{p^{m-2}-1}(d(x_{m-1})x_{m-1}) \\
&= \sum_{k=0}^{p^{m-2}-1} \binom{p^{m-2}-1}{k} d^{k+1}(x_{m-1}) d^{p^{m-2}-1-k}(x_{m-1}) \\
&= d(x_{m-1})d^{p^{m-2}-1}(x_{m-1}) - d^2(x_{m-1})d^{p^{m-2}-2}(x_{m-1}) + \cdots \\
&\quad + d^{p^{m-2}-2}(x_{m-1})d^2(x_{m-1}) - d^{p^{m-2}-1}(x_{m-1})d(x_{m-1}) \\
&\quad + d^{p^{m-2}}(x_{m-1})x_{m-1} \quad (\text{by Lemma 5}) \\
&= x_{m-1}
\end{aligned}$$

次に $p=2$ とする。 Lemma 5 によって

$$\begin{aligned}
d^{2^{k-1}-1}(x_1 \cdots x_{k-1}) &= \sum_{i=0}^{2^{k-1}-1} d^i(x_1 \cdots x_{k-2}) d^{2^{k-1}-1-i}(x_{k-1}) \\
&= (x_1 \cdots x_{k-2}) d^{2^{k-2}-1}(d^{2^{k-2}}(x_{k-1})) + d(x_1 \cdots x_{k-2}) \\
&\quad d^{2^{k-2}-2}(d^{2^{k-2}}(x_{k-1})) + \cdots \\
&\quad + d^{2^{k-2}-1}(x_1 \cdots x_{k-2}) d^{2^{k-2}}(x_{k-1}) + d(d^{2^{k-2}-1}(x_1 \cdots \\
&\quad x_{k-2})) d^{2^{k-2}-1}(x_{k-1}) + \cdots + d^{2^{k-2}}(d^{2^{k-2}-1}(x_1 \cdots x_{k-2})) x_{k-1} \\
&= 1 \quad (\text{if we assume } d^{2^{k-2}-1}(x_1 \cdots x_{k-2}) = 1) \\
&\quad (\because d^{2^{k-2}}(x_{k-1}) = 1 \text{ にも注意せよ})
\end{aligned}$$

従って帰納法で $d^{2^{k-1}-1}(x_1 \cdots x_{k-1}) = 1$ p の p とする。

$$\begin{aligned}
&\text{さて, } d^{2^{m-1}-2^{m-2}}(x_m) = d^{2^{m-2}}(x_m) \\
&= d^{2^{m-2}-1}(P_{m-1}) = d^{2^{m-2}-1}(P_{m-2}x_{m-1} + x_1 \cdots x_{m-2}x_{m-2}) \\
&= d^{2^{m-2}-1}(d(x_{m-1})x_{m-1}) + x_{m-2} d^{2^{m-2}-1}(x_1 \cdots x_{m-2}) \\
&= \sum_{i=0}^{2^{m-2}-1} d^{1+i}(x_{m-1}) d^{2^{m-2}-1-i}(x_{m-1}) + x_{m-2} \\
&= d(x_{m-1})d^{2^{m-2}-1}(x_{m-1}) + d^2(x_{m-1})d^{2^{m-2}-2}(x_{m-1}) + \cdots \\
&\quad + d^{2^{m-3}}(x_{m-1})d^{2^{m-3}}(x_{m-1}) + \cdots + d^{2^{m-2}-2}(x_{m-1})d^2(x_{m-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + d^{2^{m-2}-1}(x_{m-1}) d(x_{m-1}) + d^{2^{m-2}}(x_{m-1}) x_{m-1} + x_{m-2} \\
& = (d^{2^{m-3}}(x_{m-1}))^2 + x_{m-1} + (x_{m-2})^2 = x_{m-1}
\end{aligned}$$

$d^{p^m-1} \neq 0$ 及び $d^{p^m} = 0$ は easy.

さて, A/R を $H(p)^m$ -Hopf Galois 拡大とし, d を Lemma 6 で定めた derivation とする。 d を自然に A に act させることにより, A は $H(p^m)$ -module alg. となる。 $d^0 = 1, d, d^2, \dots, d^{p^m-1}$ は A 上 (左から見て) lin. indep. であるので剰余体にうつし, rank を調べることにより $A \# H(p^m) \cong \text{End}(A)$ がわかる。従って Corollary 4 と併せて

Theorem 7. A を commutative R -alg とする。この時 A/R が $H(p^m)$ -Hopf Galois extension $\Leftrightarrow A/R$ が $H(p)^m$ -Hopf Galois extension.

Remark. 容易に解かる様に, $m \neq 1$ のとき, $H(p^m)$ と $H(p)^m$ は同型ではない。従って一般に環拡大 A/R に対して, それを Hopf Galois 拡大とある様な Hopf algebra はたくさん存在することがわかる。

Remark. Hopf Galois 拡大の概念は可換環の拡大だけに

止らず、一般の非可換環の拡大に対しても定義されており [8], 特に *alg.* の場合には *cohomological* にも美しい結果を持つことがわかってゐる [9]. Theorem 7 は Hopf Galois 拡大の概念を可換に限れば, $H(p^m)$ -Hopf Galois と $H(p)^m$ -Hopf Galois の概念が一致すること示してゐる。もし可換に限らず, *alg.* まで含めると, $H(p)^m$ -Hopf Galois 拡大であつて, $H(p^m)$ -Hopf Galois 拡大にならない例があることを注意しておく。(なお, 現在調査中であるので, 適当な時に又発表したいと思つてゐます。)

さて, Proposition 2 の後の Remark で $H(p^m)$ -Hopf Galois 拡大 $A = R[x_1, \dots, x_m]$, $x_i^p = d_i \in R$ において d の x_i への作用が不明であることを注意した。以下では, d の x_i への作用をきちんと決めること又は作用がきちんと決まる様に $\{x_i\}$ を取り直すことを考えよう。そのためにまず $R[x_1, \dots, x_m]$, $x_i^p = d_i \in R$ の monomial に対して (weighted) degree を次の様に定義する。

$$\text{degree}(r x_1^{e_1} \dots x_m^{e_m}) = \sum_{i=1}^m e_i p^{i-1}, \quad 0 \neq r \in R, \quad 0 \leq e_i \leq p-1$$

$$\text{degree}(0) = -1$$

さて, $H(p^m)$ (或は $H(p)^m$) Hopf Galois 拡大においては $\{x_1^{e_1} \dots x_m^{e_m} \mid 0 \leq e_i \leq p-1\}$ は A の R -free basis [4] より上記の degree は well-defined である。さらに p 進展開を考えれば degree を与えれば, その degree の monic poly. は一意に定まることに注意

しておく。次の Lemma は degree の定義から容易である。

Lemma 8. $A = R[x_1, \dots, x_m]$, $x_i^p = d_i \in R$ と R の $H(p^m)$ -Hopf Galois 拡大 K とある。さらに $\{x_1, \dots, x_m\}$ は $d(x_1) = 1$, $d(x_i) = P_{i-1}$ ($i \geq 2$) とある。但し $\{P_i\}$ は Lemma 6 の Polynomial.

$\Rightarrow$ (1) f は degree l の monic monomial とあると

$$d(f) = (\text{degree } l-1 \text{ の monomial}) + (\text{degree } l-2 \text{ 以下の monomials の sum})$$

よって degree $l-1$ の monomial の係数は unit である。

(2) degree $p^m - 2$ 以下の monomial は integrable である。

従って degree $p^m - 2$ 以下の polynomial は integrable.

Theorem 9. A/R は $H(p^m)$ -Hopf Galois 拡大 K とあると。

$x_1, \dots, x_m \in A$ が存在して $A = R[x_1, \dots, x_m]$, $x_i^p = d_i \in R$ であり $d = P_0 \partial_1 + \dots + P_{m-1} \partial_m$ (即ち $d(x_i) = P_{i-1}$)

Proof. m に関する induction で証明する。Proposition 2

より $\exists y_1, \dots, y_m \in A$ st. $A = R[y_1, \dots, y_m]$, $y_i^p = \beta_i \in R$, $d(y_1) = 1$, $y_i = d^{p^{m-1}} P_{i-1}^{p^{i-1}}(y_m)$, $d(y_i) \in R[y_1, \dots, y_{i-1}]$.

$m=1$ の時は $x_1 = y_1$ と取ればよい。 $m-1$ まで正しいと仮定

する。即ち $\exists x_i \in R[y_1, \dots, y_i]$ st. $R[x_1, \dots, x_i] = R[y_1, \dots, y_i]$

よって d は $R[x_1, \dots, x_i]$ に制限すれば $d = P_0 \partial_1 + \dots + P_{i-1} \partial_i$

$(1 \leq i \leq m-1)$. さて $d(y_m) \in R[x_1, \dots, x_{m-1}] = R[y_1, \dots, y_{m-1}]$ であり

$$d^{p^{m-1}}(y_m) = 1 \text{ であるから, } d(y_m) = P_{m-1} + g(x_1, \dots, x_{m-1})$$

但し $g(x_1, \dots, x_{m-1})$ は $\mathbb{R}$ 数 $p^{m-1}-2$ 以下の monomials の和.

Lemma 8.5') $\exists G(x_1, \dots, x_{m-1})$ s.t. $dG = g$. $x_m = y_m - G(x_1, \dots, x_{m-1})$ とおけば $d(x_m) = P_{m-1}$ となり, $R[x_1, \dots, x_m] = R[y_1, \dots, y_m]$ である。

Remark Theorem 9. は Lemma 6 をみたすすべての $\{P_i\}$ について成立する。

Corollary 10 $A = R[x_1, \dots, x_m]$, $x_i^p \in R$ と R の $H(p^m)$ -Hopf Galois 振舞とす。但し, $d(x_i) = 1$, $x_i = d^{p^{m-1}-p^{i-1}}(x_m)$, $d(x_i) \in R[x_1, \dots, x_{i-1}]$ とす。このとき d の作用を $A_i = R[x_1, \dots, x_i]$ に制限するとにより, A_i/R は $H(p^i)$ -Hopf Galois 振舞となる。

References

- [1] R. Baer: Algebraische Theorie der differentierbaren Funktionen-körper I, Sitzungsberichte Heidelberger Akademie, 1927, 15-32.
- [2] S. U. Chase and M. E. Sweedler: Hopf Algebras and Galois Theory,

Lecture Notes in Mathematics 97, Springer-Verlag,
Berlin, 1969.

- [3] A.Hattori: On higher derivations and related topics, Seminar
on Derivations and Cohomology of Algebras (in Japa-
nese), Reseach Institute for Mathematical Science,
Kyoto University, 1970.
- [4] A.Nakajima: A certain type of commutative Hopf Galois exten-
sions and their groups, to appear in Math. J. Okayama
Univ.
- [5] A.Nakajima and K.Yokogawa: Hopf Galois extensions with Hopf
algebras of derivation type, to appear.
- [6] S.Suzuki: Some types of derivations and their applications
to field theory, J. Math. Kyoto Univ. 21 (1981),
375-382.
- [7] M.E.Sweedler: Hopf Algebras, Benjamin, New York, 1969.
- [8] K.Yokogawa: Non-commutative Hopf Galois extensions, Osaka J.
Math. 18 (1981), 67-73.
- [9] K.Yokogawa: The cohomological aspects of Hopf Galois exten-
sions over a commutative ring, Osaka J. Math. 18
(1981), 75-93.
- [10] K.Yokogawa: A pair of subalgebras in an Azumaya algebra,
to appear in Osaka J. Math.