

拡張 Hensel 構成を用いた Monodromy 群の計算法

久保 隆貴

TAKAKI KUBO *

筑波大学数理物質科学研究科

GRADUATE SCHOOL OF PURE AND APPLIED SCIENCES, UNIVERSITY OF TSUKUBA

1 はじめに

本稿では、平面代数曲線から定まる Monodromy 群の計算に拡張 Hensel 構成を用いた手法を提案する。収束べき級数を解析接続すると多価関数が得られることがあるが、この多価性が Monodromy である。一般の高階の方程式に対しては、大域的な解を直接求めることが難しく、局所的な解を解析接続することになり、このような場合に Monodromy の計算が必要となる。多価関数を特異点を回る経路に沿って解析接続すると置換が生じることがあるが、この置換から Monodromy 群を決定することができる。しかし、実際の計算には特異点を周回する経路に沿った解析接続が必要となり、通常的手法では特異点の近傍で計算が破綻しやすい。1 変数代数関数のべき級数展開には Taylor 展開や Puiseux 級数展開が用いられるが、これらの手法で浮動小数係数を扱う場合には工夫が必要とされ、多変数の場合のべき級数展開においても困難が生じる。これに対して 1999 年に Sasaki, Kako [SK99] は、特異点での多変数代数方程式のべき級数解法として拡張 Hensel 構成を提案した。拡張 Hensel 構成は 3 変数以上の多変数多項式が扱えることや特異点でのべき級数展開が能率良く行えるため、多項式の因数分解やべき級数環上での解析的因数分解などにも応用されており、現在では計算代数における重要な手法の一つとなっている。2 変数の場合の拡張 Hensel 構成から得られる収束べき級数は Puiseux 級数であることが知られているが、Puiseux 級数展開とは本質的に異なる構成法である。本稿は、解析接続を行う際のべき級数展開に拡張 Hensel 構成を用いることで、浮動小数係数の場合にも容易に安定する Monodromy 群の計算法を示す。

平面代数曲線に関する Monodromy 群は、各収束べき級数の間に生じる置換の関係から定めることができる。Monodromy 群の生成元は領域上の経路の全体であり、これらの経路は homotopy 類と呼ばれる同値類である。この Monodromy 群を計算する際に重要となるのが、特異点の周辺でのべき級数の扱いである。Taylor 展開を用いた手法では、特異点の周辺では特に注意を払いながら計算を行う必要がある。実際に Monodromy 群の計算法として多くの研究者が様々な手法を提案しているが、Hoeij, Poteaux ら [DH01, Pot07] は Newton-Puiseux 法を用いた手法を提案している。しかし、特異点の周辺での解析接続において計算が破綻しないよう細心の注意を払いながら計算を行っている。一方で Shiihara, Sasaki [SS96] は、拡張 Hensel 構成を用いて、Riemann 面上の代数関数に対して特異点を展開点とする解析接続の方法を提案している。さらに Inaba, Sasaki [IS04] は Shiihara らの手法では不十分であった解析接続の保証を、最小根の上界定理 [TS00] に基づく方法を用いることで、より信頼性のある手法へと改良した。本稿も、Riemann 面上で特異点を展開点とするべき級数展開に拡張 Hensel 構成を採用する。

*kubo@math.tsukuba.ac.jp

本研究では、拡張 Hensel 構成が特異点でべき級数展開できることに着目し、特異点の近傍においても何の工夫もなく Monodromy 群を安定して計算することに成功した。Hoeij, Poteaux らの研究も特異点を展開点とする手法であるが、拡張 Hensel 構成は Newton-Puiseux 法とは異なり、Durand-Kerner 法のように全根について同時に計算できるため、効率の面でも大変優れている。また、拡張 Hensel 構成を代数幾何や群論などの問題に応用する上でも重要な研究である。

2 Riemann 面と平面代数曲線

Riemann 面は 1 次元の複素多様体であるが、代数多様体と見る立場では平面代数曲線から定めることができる。代数曲線は幾何学的不変量である種数によって分類され、Riemann 面の形状はこの種数から決まる [Sie88]。また、この種数は直感的には Riemann 面の穴の数を表しているが、Riemann 面としての構造は元の代数曲線を決定する。種数 3 の Riemann 面の例を図 1 に示す。

不定元 $x, u \in \mathbb{C}$ を変数とする次の既約な 2 変数多項式を考える。

$$F(x, u) = f_d(u)x^d + f_{d-1}(u)x^{d-1} + \cdots + f_0(u) \quad (1)$$

多項式 $F(x, u)$ について、 x を主変数、 u を従変数、各項の $\{f_i(u)\}_{i=0}^d$ を変数 u の係数とする。また、 $F(x, u)$ の x についての次数を d とし、全次数を D で表す。このとき、 $\mathbb{K}$ を複素数体 $\mathbb{C}$ の部分体とし、 $\mathbb{C}$ 上の平面代数曲線 $\mathcal{C} = \{(x, u) \in \mathbb{C}^2 \mid F(x, u) = 0\}$ を考える。簡単のため、以降では $F \in \mathbb{K}[x, u]$ が主変数 x についてモニック (i.e. $f_d(u) = 1$) な無平方多項式の場合を扱う。複素数 $a \in \mathbb{C}$ に対して、1 変数多項式 $F(x, a) = 0$ が d 個の相異なる根 $x(a) = \{b \in \mathbb{C} \mid F(b, a) = 0\}$ をもつとき、複素数 $a \in \mathbb{C}$ を通常点 (regular point) と呼ぶ。また、複素数 c が通常点ではない場合、すなわち、複素数 $c \in \mathbb{C}$ に対して $F(x, c) = 0$ が重根をもつとき、複素数 $c \in \mathbb{C}$ を特異点 (critical point) と呼ぶ [Pot07]。古典的な手法ではある



図 1: 種数 3 の Riemann 面

が、代数曲線 $\mathcal{C}$ は 2 次変換を用いる特異点解消法と適当な座標変換を有限回繰り返すことによって、次のようにして特異点として通常の特異点のみをもつ曲線に変換することができる [SW91]。

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \xrightarrow{T_1} \mathcal{C}_1 \xrightarrow{T_2} \cdots \xrightarrow{T_n} \mathcal{C}_n \quad (2)$$

ここで、 T_j は $\mathcal{C}_{j-1}$ を $\mathcal{C}_j$ へ移す 2 次変換である。 $\mathcal{C}_j$ を定める多項式の次数を d_j 、 $\mathcal{C}_j$ に含まれる近傍特異点を N_j 、曲線上の点 c の多重度を r_c で表わす。また、各特異点を $\{c_j\}_{j=1}^p$ とし、 $P = \{c_1, \dots, c_p\} \cup N(c_1) \cup \cdots \cup N(c_p)$ とする。ただし、 $N(c_j)$ は 2 次変換に関する c_j の全ての近傍特異点の集合である。このとき、種数 g の関係式として次が成り立つ [SW91]。

$$g = \frac{1}{2} \left\{ (d-1)(d-2) - \sum_{c \in P} r_c(r_c-1) \right\} \quad (3)$$

他方で、Shiihara は種数の関係式 (3) に対して拡張 Hensel 構成を用いた特異点解消法を応用し、係数が浮動小数の場合にも計算が容易に安定する種数計算のアルゴリズムを提案している [Shi97]。

3 Monodromy 群

ここで扱う Monodromy 群は、平面代数曲線 $\mathcal{C}$ の各根の間に生じる置換関係から定まる置換群であり、その生成元は解析接続を行う際に扱う Riemann 面上の経路である。Monodromy 群を効

率よく計算することは、Galois 逆問題や Abel 写像の計算などに応用できることもあり、現在でも盛んに研究されているテーマである [DP08, DH01]. 本節では Hoeij らによって提案された代数曲線の Riemann 行列の計算法の中で議論されている Monodromy 群の計算法について取り上げる [DH01]. Hoeij らは Puiseux 級数を用いた解析接続を行っているが、本稿では拡張 Hensel 構成から導かれる収束べき級数を用いた解析接続を行う。扱った曲線が平面代数曲線の場合には、拡張 Hensel 構成から得られる収束べき級数は Puiseux 級数であるが、Puiseux 級数展開とは本質的に異なる構成法であるため、係数が浮動小数の場合にも容易に収束べき級数が計算できる [SY98, SK99]. ただし、浮動小数係数の Puiseux 級数展開の誤差と打ち切り項数の関係について理論的に考察し、Hoeij らの手法を更に安定化させた Poteaux らの研究がある [Pot07, PR08].

前節と同様に、複素数 $a \in \mathbb{C}$ を平面代数曲線 C の通常点とする。通常点 a において多項式 $F(x, a) = 0$ は d 個の根 $\{x_i\}_{i=1}^d$ をもつ。これらの根の集合は C の被覆のファイバーとなる [Pot07]. また、陰関数定理から $F(X_i(u), u) = 0$ を満たす d 個の解析関数 $\{X_i\}_{i=1}^d$ が存在し、展開点 a の近傍で $X_i(a) = x_i$ が成り立つことがわかる。通常点 a を始点かつ終点とするループ $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ が特異点を含まなければ、 d 個の解析関数 $\{X_i\}_{i=1}^d$ はループ γ を経路として解析接続できる。 t が 1 の近傍であれば、 $\gamma(t)$ は展開点 a の近傍での値をとり、 $\{X_i(\gamma(t))\}_{i=1}^d$ は a でのファイバーとなる。解析接続から得られたこれらの根の間には

$$X_i(\gamma(t)) \rightarrow x_{\sigma(i)} = X_{\sigma(i)}(r) \quad (4)$$

を満たす $\{1, \dots, d\}$ の置換 σ が存在する。今、 F には p 個の特異点 $\{c_j\}_{j=1}^p$ が存在すると仮定すれば、 $\mathbb{C}$ 上から特異点 $\{c_j\}_{j=1}^p$ を除いた基点を a とする基本群から置換の全体 S_d への準同型

$$\begin{aligned} \Psi: \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{c_1, \dots, c_p\}, r) &\rightarrow S_d \\ \gamma &\mapsto \sigma. \end{aligned} \quad (5)$$

が得られる。この準同型の像が Monodromy 群であり、 $\mathcal{M}$ と表す。Monodromy 群 $\mathcal{M}$ は、ループに沿った解析接続で生じる置換から決まる置換群である。また、この準同型は Monodromy と呼ばれている [Pot07]. 基点 a から 1 個の特異点 c_j だけを周回するループ γ_j (図 2) を考える。 F の a での根は、ループを経路とする解析接続を行うことで別の根への置換 $\sigma_j = \Psi(\gamma_j)$ が生じる (図 2). このように σ_j が単位置換でないとき、 c_j をブランチ (branch point) と呼ぶ。同様にして全ての特異点 $\{c_j\}_{j=1}^p$ を周回する経路 $\{\gamma_j\}_{j=1}^p$ で解析接続を行えば、各特異点 $\{c_j\}_{j=1}^p$ を周回したときに生じる根の置換 $\{\sigma_j\}_{j=1}^p$ が得られる。Monodromy 群 $\mathcal{M}$ は、これらの置換 $\{\sigma_j\}_{j=1}^p$ から定まる経路 $\{\gamma_j\}_{j=1}^p$ によって生成される [Pot07]. 本稿も Hoeij, Poteaux ら [DH01, Pot07] と目的を同じく、この生成元の計算を行う。

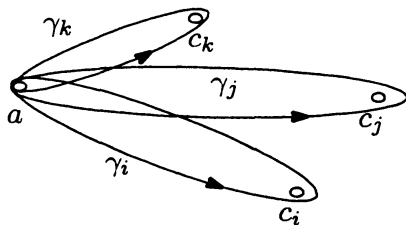


図 2: ループ γ

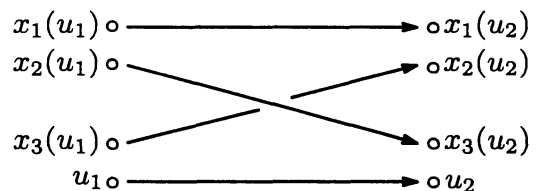


図 3: 根の置換

4 拡張 Hensel 構成を用いた解析接続

Monodromy 群の計算には特異点を周回する経路に沿った解析接続が必要となる。しかしながら、通常の手法では特異点の近傍での解析接続において大きな困難を伴うため、計算を破綻させないための工夫が必要となる。当然ではあるが、展開点から特異点を越える領域で収束すべき級数は計算できない。さらに、展開点が特異点に近づくにつれて大きな桁落ちを伴うことが知られている [SY98]。そのため、通常の手法では特異点を大きく避けるか、収束円盤内で何度もべき級数展開を行い、桁落ちへの注意を払いながら解析接続を行うことになる。ここで、べき級数展開として拡張 Hensel 構成、或いは Puiseux 級数展開による手法を用いれば、特異点を展開点とできるため特異点を中心とする円盤内で収束すべき級数が得られる [SS96, IS04, PR08]。更に、特異点の近傍でべき級数展開を何度も行う必要がなくなり、効率の面でも大変優れた手法であるといえる。拡張 Hensel 構成を用いた Riemann 面上での解析接続は Shiihara らの先行研究がある [SS96, IS04]。特異点を展開点とする拡張 Hensel 構成の例を次に示す。

$$F(x, u) = x^3 - u^7 + 2u^3x \quad (6)$$

この例は Hoeij らの文献 [DH01] で使われている例で、特異点は次の 6 つの値である。

$$\begin{cases} c_1 = -0.31969 \dots - 0.98392 \dots i, & c_2 = 0.83697 \dots - 0.60810 \dots i, & c_3 = -1.03456 \dots, \\ c_4 = 0, & c_5 = 0.83697 \dots + 0.60810 \dots i, & c_6 = -0.31969 \dots + 0.98392 \dots i \end{cases} \quad (7)$$

視覚的に理解しやすくするため、原点にある特異点 c_4 を展開点とする拡張 Hensel 構成を数式のまま行う。拡張 Hensel 構成のアルゴリズムについては後節、或いは文献 [SK99] を参照されたい。得られる Puiseux 級数 (Hensel 因子) は次式となる。

$$\begin{cases} x_1(u) = \frac{1}{2}u^4 - \frac{1}{16}u^9 + \dots, \\ x_2(u) = -\frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{64}u^9 + i \left(\sqrt{2}u^{3/2} + \frac{3}{32}\sqrt{2}u^{13/2} \right) + \dots, \\ x_3(u) = -\frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{64}u^9 - i \left(\sqrt{2}u^{3/2} + \frac{3}{32}\sqrt{2}u^{13/2} \right) + \dots \end{cases} \quad (8)$$

他の特異点を展開点とする場合でも級数 (8) と同様の計算が行えるが、特異点が代数関数などで与えられている場合は計算に時間がかかるため、浮動小数係数の多項式に対して拡張 Hensel 構成を行うことになる。べき級数 (8) は、特異点 c_4 を展開点とする収束べき級数であり、収束半径内では他の級数と解析接続を行うことができる。Shiihara は解析接続の保証として Smith の定理を用いた方法を提案している [SS96]。他方で Inaba らは、Sasaki らによって導かれた最小根の上界定理 [TS00] を用いて、より強力な保証が得られる手法を提案している [IS04]。

実際に解析接続を行う際、特異点でのべき級数展開と同様に問題となるのが、経路 γ の決定である。特異点の位置によっては、目的の特異点までの経路の近傍に他の特異点がある場合があり、解析接続の経路を直線ととることができない。そのため人為的操作が必要となってしまう可能性がある。Hoeij らはこの問題に対して、解析接続の始点である基点 a を全ての特異点 $\{c_j\}_{j=1}^p$ の実部の最小値より小さい値をとり、基点と各特異点を偏角 $\arg(c_j - a)$ の昇順 (偏角が等しい場合には差の絶対値 $|c_j - a|$ の昇順) で並べ、図 4 のような経路で解析接続する方法を採用している。Hoeij らの経路で解析接続を行えば、各特異点上での収束べき級数、及び根の間の置換がそのまま

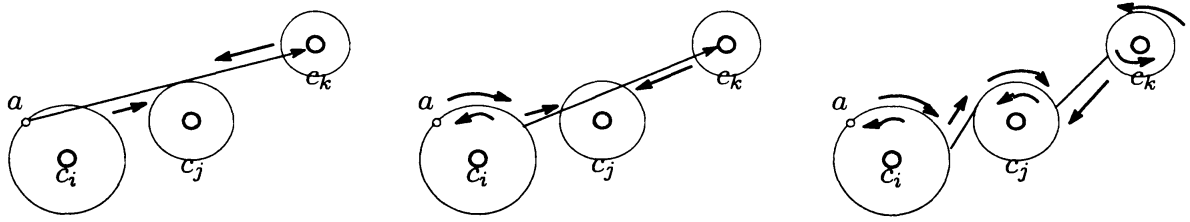


図 4: 解析接続の経路

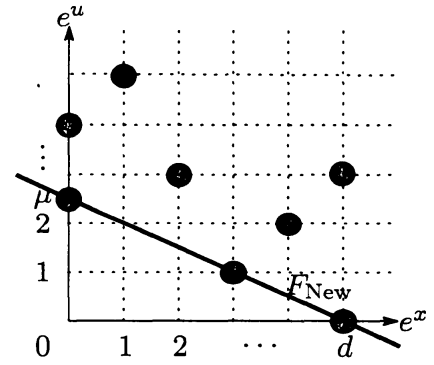
再利用できるため、本稿でもこれを採用する．この経路に沿った解析接続を行うため、展開点は基点 a と各特異点 $\{c_j\}_{j=1}^p$ ，そして解析接続で再利用する各特異点同士の間接点 $\{b_l\}_{l=1}^q$ とする．図 4 の 3 つの経路が全て homotopic であることは容易にわかる．

5 拡張 Hensel 構成

本節では、拡張 Hensel 構成の方法を記す．拡張 Hensel 構成は、与えられた代数方程式が多変数の場合や展開点が特異点の場合でも Hensel 構成が可能となるよう、1999 年に Sasaki, Kako [SK99] によって拡張された手法である．以下、与えられる多項式が 2 変数の場合を考える．

不定元の指数を $e_x, e_u \in \mathbb{N}$ で表し、 (e_x, e_u) -平面上に多項式 $F(x, u)$ の各項の対応する点を図 5 のようにプロットし、その凸包を取る．このとき、プロットした下辺上の各点に対応する項の和を Newton 多項式と呼び、 F_{New} と表す．

ここで、 $\mu/d = \tilde{\mu}/\tilde{d}$ かつ $\gcd(\tilde{\mu}, \tilde{d}) = 1$ を満たす $\tilde{\mu}, \tilde{d} \in \mathbb{N}$ を定める．拡張 Hensel 構成を行う際に、格子点上の全てのプロット点を取り込むため、 $k \in \mathbb{N}$ に対してイデアルを $I_k = \langle x^d u^0, x^{d-1} u^{\mu/d}, \dots, x^0 u^\mu \rangle \times \langle u^{k/\tilde{d}} \rangle$ で定める．このとき、Newton 多項式は $F \equiv F_{\text{New}} \pmod{I_1}$ を満たす．得られた Newton 多項式 F_{New} を次式を満たすように因数分解する．

図 5: (e_x, e_u) -平面上のプロットと F_{New}

$$\begin{cases} F_{\text{New}}(x, u) = G_1^{(0)}(x, u) \cdots G_r^{(0)}(x, u) & (r \geq 2) \\ \gcd(G_i^{(0)}, G_j^{(0)}) = 1 & (i \neq j) \end{cases} \quad (9)$$

ここで、因数分解は従変数の代数関数体の範囲まで拡大してもよいし、多項式の範囲での分解に止めてもよい．

以下、 $r \leq 2$ の場合のみを考える．Newton 多項式の因数分解 (9) から得られた $G_1^{(0)}, \dots, G_r^{(0)}$ は互いに素であるため、Euclid の拡張互除法を用いて、次式を満たす $W_1^{(l)}, \dots, W_r^{(l)}$ が計算できる．

$$W_1^{(l)} \frac{F_{\text{New}}(x, u)}{G_1^{(0)}(x, u)} + \cdots + W_r^{(l)} \frac{F_{\text{New}}(x, u)}{G_r^{(0)}(x, u)} = x^l \quad (l < d), \quad \deg_x(W_i^{(l)}) < \deg_x(G_i^{(0)}) \quad (i = 1, \dots, r) \quad (10)$$

得られた $W_1^{(l)}, \dots, W_r^{(l)}$ を Moses-Yun 補間式と呼ぶ．Moses-Yun 補間式は初期因子である Newton 多項式からのみ定められる．Moses-Yun 補間式を使い、次のように $F(x, y)$ の分解 $G_1^{(k)}, \dots, G_r^{(k)}$ ($k = 0, 1, \dots, k$) を逐次的に構成していく．まず、Newton 多項式の k 次残差を

$$\delta F^{(k)} \equiv F - G_1^{(k-1)} \cdots G_r^{(k-1)} \pmod{I_{k+1}} \quad (11)$$

で計算し、主変数に関する項和の形

$$\delta F^{(k)} = \delta f_{n-1}^{(k)} x^{n-1} + \cdots + \delta f_0^{(k)} x^0 \quad (12)$$

としてまとめる．因子 $G_i^{(k)}$ に対して

$$G_i^{(k+1)} = G_i^{(k)} + \sum_{l=0}^{d-1} \delta f_l^{(k)} W_i^{(l)}, \quad (i = 1, \dots, r) \quad (13)$$

と定めれば、定義よりこれらは各 k に対して

$$G_1^{(k)}(x, u) \cdots G_r^{(k)}(x, u) \equiv F(x, u) \pmod{I_{k+1}} \quad (14)$$

を満たすことがわかる．この構成は $k \rightarrow \infty$ まで成立するので、

$$G_1^{(\infty)}(x, u) \cdots G_r^{(\infty)}(x, u) = F(x, u) \quad (15)$$

となり、 $F(x, u)$ の分解が得られる． $G_i^{(k)}(x, u)$ および $G_i^{(\infty)}(x, u)$ を Hensel 因子と呼ぶ．

6 計算例

本節では、平面代数曲線 C から定まる Monodromy 群の計算例を示す．ここでは Hoeij らの計算例 (6) を扱う．置換 σ を求める際に必要なべき級数展開には拡張 Hensel 構成を用いる．計算は、次の手順で行う．まず、 $F(x, u)$ の従変数 u についての特異点 $\{c_j\}_{j=1}^p$ を計算し、全ての特異点の実部の最小値よりも小さい値を基点 a と定める．ここでは Hoeij らにあわせて $a = -1.44838 \cdots$ をとり、各特異点は次の判別式の根として計算する [SS96]．

$$D(u) = \text{Resultant}_x \left(F(x, u), \frac{\partial F(x, u)}{\partial x} \right) \quad (16)$$

判別式から得られた特異点 (7) を複素平面上に示す (図 6)．実軸上の左端の点が基点 a である．得られた特異点 (7) は偏角 $\arg(c_j - a)$ の昇順で並べ替えておく．図 6 で最も下にある点が c_1 であり、最も上にある点が c_6 である． c_3 と c_4 は共に実軸上にあるため偏角が等しい．この場合は差の絶対値から、より近い左側の点が c_3 となる．これら特異点の位置から解析接続を行う経路を決定する．基点 a を始点として各特異点 $\{c_j\}_{j=1}^6$ を 1 つだけ周回して基点 a に戻る 6 個のループが必要となる． c_3 は基点から最も近い特異点であるため、 c_3 を周回する経路 γ_3 に沿って解析接続を直接行えばよい．しかし、他の特異点は全て c_3 の収束円盤上の点を経由して解析接続を行うことになる．その際に必要となる展開点に、経由する特異点との中間点 b_l をとる．ここでは各特異点が十分に近いため、これらの点を展開点とする拡張 Hensel 構成を行えば、これ以上の点でべき級数展開を行う必要はない．また、拡張 Hensel 構成は Puiseux 級数展開とは本質的に異なり、Durand-Kerner 法のように全根について同時に計算できるため、効率の良い計算が行える．

各展開点で得られた収束べき級数について、ループ $\{\gamma_j\}_{j=1}^6$ と homotopic な経路に沿った解析接続を行う．ここでは具体的に、図 6 で最も上にある特異点 $c_6 = -0.31969 \cdots + 0.98392 \cdots i$ を周回する経路に沿った解析接続の様子を調べる．特異点 c_6 を展開点とする拡張 Hensel 構成から得られた $\{h_k\}_{k=1}^3$ の虚部を図 7 に示す．図の原点は展開点 c_6 であり、負の方向に基点 a がある．解析接続の経路は、基点 a から特異点 c_3 を中心とする収束円盤上の点を利用し、特異点 c_3 と

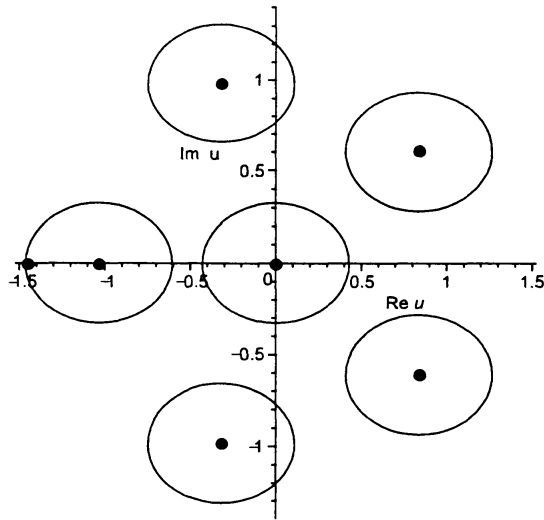
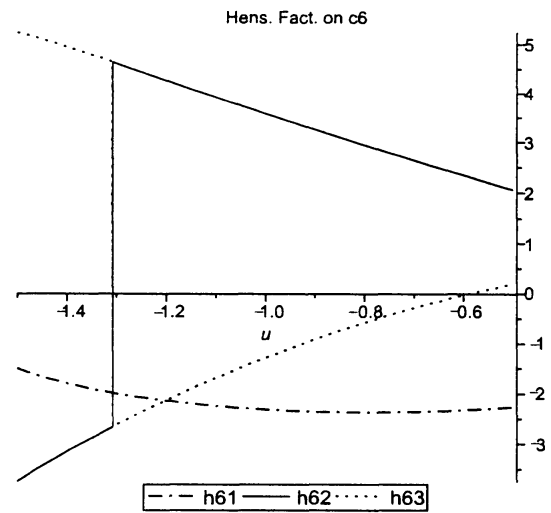


図 6: 特異点の位置

図 7: 特異点 c_6 での収束べき級数の虚部

c_6 の中間点での解析接続を経由して特異点 c_6 を周回する. 図 7 から見てわかるように, 収束べき級数 $\{h_k\}_{k=1}^3$ のうち, h_{62} は h_{63} へ飛び移っているように見える. 実際, 図の実線と点線は基点 a での 1, 2 番目の根を表し, 特異点 c_6 を周回する経路で解析接続を行うと置換 $\sigma_6 = \{1, 2\}$ を得る. 同様にして全ての特異点について, 各特異点を 1 つずつ周回する経路に沿った解析接続から得られた置換を表 8 に示す.

特異点 c_k	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	∞
置換 σ	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3, 2\}$

図 8: 各特異点に沿った解析接続から得られる置換 σ

得られた結果は Hoeij と同じものである [DH01]. 表中の特異点 ∞ はブランチ $u = \infty$ であるが, 次の関係式から導けばよいので, 直接計算する必要はない.

$$\sigma_\infty \circ \sigma_p \circ \sigma_{p-1} \circ \cdots \circ \sigma_1 = 1 \quad (17)$$

これらを生成元とする置換群が, 多項式 (6) から求まる Monodromy 群である.

7 終わりに

本研究で行った Monodromy 群の計算は, 代数幾何や群論, 複素幾何などの分野において幅広い応用が期待できる. 今後の課題としては 3 変数以上の代数曲面の場合の Monodromy 群の計算が考えられるが, そのためには特異性が点ではない場合の経路 γ の扱いについて考える必要がある. また, 拡張 Hensel 構成から得られるべき級数の収束領域についての, より詳細な議論を行うことも必要である.

謝辞

計算代数の基礎についてご指導頂いた筑波大学佐々木建昭名誉教授に謹んで感謝の意を表する.

参 考 文 献

- [DP08] B. Deconinck and M. S. Pattarson, Computing Abel map, *Physica D*, **237** (2008), 3214–3232.
- [DH01] B. Deconinck and M. V. Hoeij, Computing Riemann matrices of algebraic curves, *Physica D*, **152/153** (2001), 28–46.
- [IS04] D. Inaba, T. Sasaki, Certification of analytic continuation of algebraic function, *Proc. CASC'04 (Computer Algebra in Scientific Computation)*, V. G. Ganzha, E. W. Mayr and E. V. Vorozhtsov (Eds.), Technische Universität München Press, (2004), 249–260.
- [IS07] D. Inaba, T. Sasaki, A numerical study of extended Hensel series, *Proc. of SNC'07 (Symbolic Numeric Computation)*, London, Ontario, Canada, ACM Press, New York (2007), 103–109.
- [Pot07] A. Poteaux, Computing monodromy groups defined by plane algebraic curves, *Proc. of SNC'07 (Symbolic Numeric Computation)*, London, Ontario, Canada, ACM Press, New York (2007), 36–45.
- [PR08] A. Poteaux and M. Rybowicz, Good reduction of Puiseux series and complexity of the Newton-Puiseux algorithm over finite fields, *Proc. ISSAC'08 (Intern'l. Symp. on Symbolic and Algebraic Computation)*, ACM Press, New York, NY (2008), 239–246.
- [Shi97] K. Shiihara, 種数計算とヘンゼル構成の関係について, 京都大学数理解析研究所講究録, No. **986**, 「数式処理における理論と応用の研究」 (1997), 105–109.
- [Sie88] C. L. Siegel, *Topics in complex function theory I, II, III*, Wiley-Interscience, New York, (1988).
- [SK99] T. Sasaki and F. Kako, Solving multivariate algebraic equation by Hensel construction, *Japan J. Indus. Appl. Math.*, **16** (1999), 257–285 .
- [SS96] K. Shiihara and T. Sasaki, Analytic continuation and Riemann surface determination of algebraic functions by computer, *Japan J. Indust. Appl. Math.*, **13** (1996), 107–116.
- [SW91] J. Sendra and F. Winkler, Symbolic parametrization of curves, *J. Symb. Comp.*, **12** (1991), 607–631.
- [SY98] T. Sasaki and S. Yamaguchi, An analysis of cancellation error in multivariate Hensel Construction with floating-point number arithmetic, *Proc. ISSAC'98 (Intern'l. Symp. on Symbolic and Algebraic Computation)*, O. Gloor (Ed.), ACM Press, New York, NY (2008), 1–8.
- [TS00] A. Terui and T. Sasaki, "Approximate zero-points" of real univariate polynomial with large error terms, *J. of IPSJ (Information Processing Society of Japan)*, **41** (2000), 974–989.