

$(n-k, k)$ シュプリンガー多様体の同変コホモロジー

大阪市立大学 福川 由貴子

Yukiko Fukukawa

Osaka City University

大阪市立大学 堀口 達也

Tatsuya Horiguchi

Osaka City University

1 シュプリンガー多様体の定義, 本研究の目標

冪零作用素 $N: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ を与えると, シュプリンガー多様体 $\mathcal{S}_N$ は旗多様体 $Flags(\mathbb{C}^n)$ の部分多様体として次のように定義される.

$$\mathcal{S}_N = \{V_\bullet \in Flags(\mathbb{C}^n) \mid NV_i \subseteq V_i \text{ for all } 1 \leq i \leq n\}$$

ここに, $V_\bullet$ は $\dim_{\mathbb{C}} V_i = i$ であるような旗多様体の元 $0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = \mathbb{C}^n$ を表す. N がジョルダンブロックのサイズ $(\lambda_1, \dots, \lambda_q)$ が単調減少であるようなジョルダン標準形を持つ冪零行列のとき, $\mathcal{S}_N$ は $(\lambda_1, \dots, \lambda_q)$ シュプリンガー多様体と呼ばれる. また, 任意の $g \in GL_n(\mathbb{C})$ に対して, 次の代数多様体としての同型 (つまり同相) が成立:

$$\mathcal{S}_N \cong \mathcal{S}_{gNg^{-1}}; [x] \mapsto [gx]$$

ここに, $[x]$ は $Flags(\mathbb{C}^n)$ を $GL_n(\mathbb{C})/B$ (B は $GL_n(\mathbb{C})$ のボレル部分群) とみたときの $x \in GL_n(\mathbb{C})$ を代表元とする同値類を表す. したがって, 特に N がジョルダン標準形であるものとして考えてよい.

S^1 を $\{(g^n, g^{n-1}, \dots, g) \mid g \in \mathbb{C}, |g| = 1\}$ で定義される n 次元トーラス T^n の部分群と見ると, シュプリンガー多様体 $\mathcal{S}_N$ は旗多様体の上の T^n の作用を制限した自然な S^1 の作用を持つ.

本研究の目標は $(n-k, k)$ シュプリンガー多様体の S^1 -同変コホモロジー環の表示を具体的に与えることである.

定理 1 $0 \leq k \leq n/2$ とし, $\mathcal{S}_N$ を $(n-k, k)$ シュプリンガー多様体とする. このとき, $(n-k, k)$ シュプリンガー多様体 $\mathcal{S}_N$ の S^1 -同変コホモロジー環は次で与えられる.

$$H_{S^1}^*(\mathcal{S}_N; \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}[\tau_1, \dots, \tau_n, t]/I$$

ここに, $H_{S^1}^*(pt; \mathbb{C}) = \mathbb{C}[t]$, I は次の 3 種類の元で生成される多項式環 $\mathbb{C}[\tau_1, \dots, \tau_n, t]$ のイデアルで

ある.

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \tau_i - \frac{n(n+1)}{2}t, \\ (\tau_i + \tau_{i+1} - (n+k+1-i)t)(\tau_i - \tau_{i+1} - t) \quad (1 \leq i \leq n), \\ \prod_{1 \leq j \leq k+1} (\tau_{i_j} - (n+j-i_j)t) \quad (1 \leq i_1 < \dots < i_{k+1} \leq n).$$

ただし, $\tau_{n+1} = 0$ とする.

また, 定理 1 で $t = 0$ とすることにより, $(n-k, k)$ シュプリンガー多様体のコホモロジー環の表示も与えられる.

系 1 $(n-k, k)$ シュプリンガー多様体 $\mathcal{S}_N$ のコホモロジー環は次で与えられる.

$$H^*(\mathcal{S}_N; \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}[\tau_1, \dots, \tau_n]/J$$

ここに, J は次の 3 種類の元で生成される多項式環 $\mathbb{C}[\tau_1, \dots, \tau_n]$ のイデアルである.

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \tau_i, \\ \tau_i^2 \quad (1 \leq i \leq n), \\ \prod_{1 \leq j \leq k+1} \tau_{i_j} \quad (1 \leq i_1 < \dots < i_{k+1} \leq n).$$

2 シュプリンガー多様体のベッチ数

定理 1 を示すためにシュプリンガー多様体のベッチ数の情報を必要とするため, このセクションではそれについて述べる. シュプリンガー多様体のベッチ数については [2] で組み合わせ論的に与えられている. ([2] では, より一般のヘッセンバーク多様体のベッチ数について組み合わせ論的に与えている.) それを述べるために言葉の準備をする.

λ をヤング図形とする. λ 上のフィリング T とは, ヤング図形 λ の各箱の中に 1 から n をちょうど 1 回ずつ入れたものをいう. ここに, n はヤング図形 λ の箱の総数を表す. T が λ 上のパーミッシブルフィリングであるとは, 各行の箱の数字が左から右へ単調増加となるように数字を入れたフィリングのことを言う. n 以下の自然数の組 (a, b) が T のディメンションペアであるとは, T の箱の中の数の組で次の 3 つの条件を満たすものを言う:

- (i) $a < b$,
- (ii) b が入っている箱は a が入っている箱の下又は左の列にある,
- (iii) a が入っている箱のすぐ右に箱があるとき, 例えばその箱の中の数を c とすると, $b < c$ を満たす.

定理 2 ([2]) N を $\mathbb{C}^n$ 上の冪零作用素, λ_N をそれに対応するヤング図形とする. このとき, シュプリンガー多様体 $\mathcal{S}_N$ のベッチ数は次で与えられる:

$$B_{2i+1} = 0, \\ B_{2i} = |\{\lambda_N \text{ 上のパーミッシブルフィリング } T \mid T \text{ のディメンションペアの個数は } i\}|.$$

ここに, B_j は j 次のシュプリンガー多様体 $\mathcal{S}_N$ のベッチ数を表す.

例 1 $\lambda_N = (n-1, 1)$ のときを考える. λ_N 上のパーミッシブルフィリングは次の n 個である:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & \cdots & n \\ \hline 1 & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & \cdots & n \\ \hline 2 & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \cdots & n \\ \hline 3 & & & \\ \hline \end{array}, \dots, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ \hline n & & & \\ \hline \end{array}.$$

最初のパーミッシブルフィリングだけがディメンションペアがなく, 残りはディメンションペアをちょうど 1 組持つ. 実際, それらのディメンションペアは左から順にそれぞれ $(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)$ である. したがって, $(n-1, 1)$ シュプリンガー多様体のベッチ数は $B_0 = 1, B_2 = n-1, B_{2i} = 0$ ($i \geq 2$) である.

例 2 $\lambda_N = (n-2, 2)$ のときを考える. λ_N 上のパーミッシブルフィリングは次の $\binom{n}{2}$ 個である:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 4 & \cdots & n \\ \hline 1 & 3 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 4 & \cdots & n \\ \hline 2 & 3 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 4 & \cdots & n \\ \hline 1 & 2 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & \cdots & n \\ \hline 1 & 4 & & \\ \hline \end{array}, \dots, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ \hline 1 & n & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & \cdots & n \\ \hline 2 & 4 & & \\ \hline \end{array}, \dots, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & \cdots & n-1 \\ \hline 2 & n & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \cdots & n \\ \hline 3 & 4 & & \\ \hline \end{array}, \dots, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ \hline 3 & n & & \\ \hline \end{array}, \dots, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ \hline n-1 & n & & \\ \hline \end{array}.$$

1 行目のパーミッシブルフィリングはディメンションペアがなく, 2 行目のパーミッシブルフィリングはディメンションペアをちょうど 1 組持ち, 3 行目のパーミッシブルフィリングはディメンションペアをちょうど 2 組持つ. したがって, $(n-2, 2)$ シュプリンガー多様体のベッチ数は $B_0 = 1, B_2 = n-1, B_4 = \frac{n(n-3)}{2}, B_{2i} = 0$ ($i \geq 3$) である.

命題 1 $(n-k, k)$ シュプリンガー多様体の偶数次のベッチ数は具体的に次で与えられる:

$$B_{2i} = f^{(n-i, i)} \quad (0 \leq i \leq k),$$

$$B_{2i} = 0 \quad (i > k).$$

ここに, $f^{(n-i, i)}$ は $(n-i, i)$ 上の標準ヤング盤 (各行の箱の数字が左から右へ単調増加で, さらに各列の箱の数字が上から下へ単調増加であるようなフィリング) の個数を表す.

命題 1 の証明は次の 2 つの補題から示される.

$$\mathcal{T}_{\lambda, i} = \{\lambda \text{ 上のパーミッシブルフィリング } T \mid T \text{ のディメンションペアの個数が } i\}$$

とする.

補題 1 次が成立する.

$$\mathcal{T}_{(n-i, i), i} = \{(n-i, i) \text{ 上の標準ヤング盤}\}$$

補題 2 次の集合の間に全単射の列がある.

$$\mathcal{T}_{(n-i, i), i} \rightarrow \mathcal{T}_{(n-(i+1), i+1), i} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{T}_{(n-k, k), i}$$

ここに, $i < k$ である.

補題 1 の証明は $\mathcal{T}_{(n-i, i), i} \subseteq \{(n-i, i) \text{ 上の標準ヤング盤}\}$, $\mathcal{T}_{(n-i, i), i} \supseteq \{(n-i, i) \text{ 上の標準ヤング盤}\}$ を直接示し, 補題 2 の証明は集合 $\mathcal{T}_{(n-j, j), i}$ と $\mathcal{T}_{(n-(j+1), j+1), i}$ ($i \leq j \leq k-1$) の間に実際に全単射写像を構成することにより得られる.

3 定理 1 の証明の概略

このセクションでは、定理 1 の証明の概略について述べる。定理 1 を示すための主な道具は次の可換図式である。

$$\begin{array}{ccc}
 H_{T^n}^*(Flags(\mathbb{C}^n); \mathbb{C}) & \xrightarrow{\iota_1} & H_{T^n}^*(Flags(\mathbb{C}^n)^{T^n}; \mathbb{C}) = \bigoplus_{w \in Flags(\mathbb{C}^n)^{T^n} = S_n} \mathbb{C}[t_1, \dots, t_n] \\
 \pi_1 \downarrow & & \pi_2 \downarrow \\
 H_{S^1}^*(S_N; \mathbb{C}) & \xrightarrow{\iota_2} & H_{S^1}^*(S_N^{S^1}; \mathbb{C}) = \bigoplus_{w \in S_N^{S^1} \subset S_n} \mathbb{C}[t]
 \end{array}$$

ここに、すべての写像は包含写像から導かれるものであり、各 $t_1, \dots, t_n, t$ の次数は 2 とする。

$$Flags(\mathbb{C}^n)^{T^n} = \{ \langle e_{w(1)} \rangle \subset \langle e_{w(1)}, e_{w(2)} \rangle \subset \dots \subset \langle e_{w(1)}, e_{w(2)}, \dots, e_{w(n)} \rangle = \mathbb{C}^n \mid w \in S_n \}$$

($e_1, e_2, \dots, e_n$ は $\mathbb{C}^n$ の標準基底, S_n は n 次対称群を表す) であるので, $Flags(\mathbb{C}^n)^{T^n}$ は S_n と同一視される。また, $Flags(\mathbb{C}^n)^{S^1} = Flags(\mathbb{C}^n)^{T^n}$ より, $S_N^{S^1} = S_N \cap Flags(\mathbb{C}^n)^{S^1} = S_N \cap Flags(\mathbb{C}^n)^{T^n} \subset S_n$ が成立する。

$Flags(\mathbb{C}^n)$ と S_N の奇数次数のコホモロジー群が消えているので, ι_1 と ι_2 は単射であることに注意。

命題 2 次が成立する。

$$H_{T^n}^*(Flags(\mathbb{C}^n); \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}[\tau_1, \dots, \tau_n, t_1, \dots, t_n] / (e_i(\tau) - e_i(t), 1 \leq i \leq n)$$

ここに, $H_{T^n}^*(pt; \mathbb{C}) = \mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]$, $e_i(\tau)$ (resp. $e_i(t)$) は $\tau_1, \dots, \tau_n$ (resp. $t_1, \dots, t_n$) の i 次の基本対称式を表し, 各 τ_i, t_i の次数は 2 とする。

命題 2 の表示を用いて, 上の可換図式での行き先をみってみる。

$$\iota_1(\tau_i)|_w = t_{w(i)}, \quad \iota_1(t_i)|_w = t_i, \quad \pi_2(t_i) = (n+1-i)t$$

より,

$$\iota_2 \circ \pi_1(\tau_i)|_w = (n+1-w(i))t, \quad \iota_2 \circ \pi_1(t_i)|_w = (n+1-i)t$$

が分かる。ここに, $f \in \bigoplus_{w \in S_n} \mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]$ に対して, $f|_w$ は f の w 成分を表す多項式とする。このことから, $\text{Im}(\iota_2 \circ \pi_1)$ の生成元として $\iota_2 \circ \pi_1(\tau_i), \iota_2 \circ \pi_1(t_n)$ 達がとれる。 $\iota_2 \circ \pi_1(\tau_i)$ を τ_i と, $\iota_2 \circ \pi_1(t_n)$ を t と再び同じ記号を用いて書くことにすると, これら生成元は I が定める関係式を満たす。つまり, 以下を満たす:

$$\begin{aligned}
 \sum_{1 \leq i \leq n} \tau_i - \frac{n(n+1)}{2} t &= 0, \\
 (\tau_i + \tau_{i+1} - (n+k+1-i)t)(\tau_i - \tau_{i+1} - t) &= 0 \quad (1 \leq i \leq n), \\
 \prod_{1 \leq j \leq k+1} (\tau_{i_j} - (n+j-i_j)t) &= 0 \quad (1 \leq i_1 < \dots < i_{k+1} \leq n).
 \end{aligned}$$

したがって, $\mathbb{C}[\tau_1, \dots, \tau_n, t]/I$ から $\text{Im}(\iota_2 \circ \pi_1) \cong \text{Im} \pi_1$ への全射環準同型写像を得る。

まずは, この写像が同型写像であることを示す。そのために, $\mathbb{C}[\tau_1, \dots, \tau_n, t]/I$ の $\mathbb{C}$ 上の生成元について述べる。

$0 \leq i \leq k$ とし, T_i を $(n-i, i)$ 上のフィリングとする. T_i の 2 行目の箱の中の数に左から順に $j_1, j_2, \dots, j_i$ とするとき, $\tau_{T_i} = \tau_{j_1} \tau_{j_2} \dots \tau_{j_i}$ と定義する. また, $\tau_{T_0} = 1$ とする.

命題 3 $i \geq 0$ に対して, $\{t^{i-\ell} \cdot \tau_{T_\ell} \mid 0 \leq \ell \leq \min\{k, i\}, T_\ell \text{ は } (n-\ell, \ell) \text{ 上の標準ヤング盤}\}$ は $(\mathbb{C}[\tau_1, \dots, \tau_n, t]/I)_i$ の $\mathbb{C}$ 上の生成元をなす. ここに, $(\mathbb{C}[\tau_1, \dots, \tau_n, t]/I)_i$ は $\mathbb{C}[\tau_1, \dots, \tau_n, t]/I$ の全ての $2i$ 次の斉次な元の集合である.

$\mathbb{C}[\tau_1, \dots, \tau_n, t]/I$ から $\text{Im}(\iota_2 \circ \pi_1) \cong \text{Im} \pi_1$ への全射環準同型写像を思い出すと, 命題 3 の生成元をこの全射で送ったものは $\text{Im}(\iota_2 \circ \pi_1) \cong \text{Im} \pi_1$ の生成元である.

命題 4 $\text{Im}(\iota_2 \circ \pi_1)$ の元 $t^{k-\ell} \cdot \tau_{T_\ell}$ ($0 \leq \ell \leq k, T_\ell$ は $(n-\ell, \ell)$ 上の標準ヤング盤) は $\mathbb{C}$ 上 1 次独立である.

命題 3 と命題 4 より, $(\text{Im}(\iota_2 \circ \pi_1))_i$ の次元と $(\mathbb{C}[\tau_1, \dots, \tau_n, t]/I)_i$ の次元が一致することが分かる. ここに, $(\text{Im}(\iota_2 \circ \pi_1))_i$ は $\text{Im}(\iota_2 \circ \pi_1)$ の全ての $2i$ 次の斉次な元の集合である. 実際 $0 \leq i \leq k$ のとき, 命題 4 より $(\text{Im}(\iota_2 \circ \pi_1))_i$ の次元は $\sum_{0 \leq \ell \leq i} f^{(n-\ell, \ell)}$ に一致する. 一方, $\mathbb{C}[\tau_1, \dots, \tau_n, t]/I$ から $\text{Im}(\iota_2 \circ \pi_1)$ への全射環準同型写像があるので, $(\mathbb{C}[\tau_1, \dots, \tau_n, t]/I)_i$ の次元は $\dim(\text{Im}(\iota_2 \circ \pi_1))_i = \sum_{0 \leq \ell \leq i} f^{(n-\ell, \ell)}$ 以上である. しかし, 命題 3 より $(\mathbb{C}[\tau_1, \dots, \tau_n, t]/I)_i$ の次元は $\sum_{0 \leq \ell \leq i} f^{(n-\ell, \ell)}$ 以下なので, $(\mathbb{C}[\tau_1, \dots, \tau_n, t]/I)_i$ の次元は $\sum_{0 \leq \ell \leq i} f^{(n-\ell, \ell)}$ である. $i > k$ に対しても同様に $(\text{Im}(\iota_2 \circ \pi_1))_i$ の次元と $(\mathbb{C}[\tau_1, \dots, \tau_n, t]/I)_i$ の次元が $\sum_{0 \leq \ell \leq k} f^{(n-\ell, \ell)}$ で一致することが分かる. したがって, 上でみた $\mathbb{C}[\tau_1, \dots, \tau_n, t]/I$ から $\text{Im}(\iota_2 \circ \pi_1) \cong \text{Im} \pi_1$ への全射環準同型写像は同型写像である.

次に, π_1 の全射性を示す. ($k = 0, 1, 2$ のときは [1] から分かる.) 定理 2 よりシュプリンガー多様体 $\mathcal{S}_N$ の奇数次のコホモロジーは消えているので, セールのスペクトル系列を用いると, $\mathbb{C}[t]$ 加群として $H_{\mathcal{S}_1}^*(\mathcal{S}_N; \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}[t] \otimes H^*(\mathcal{S}_N; \mathbb{C})$ を得る. (特にこれは $\mathbb{C}$ 上線形空間として同型である.) したがって, このことと命題 1 を合わせると次を得る.

$$\dim H_{\mathcal{S}_1}^{2i}(\mathcal{S}_N; \mathbb{C}) = \sum_{0 \leq \ell \leq i} \dim H^{2\ell}(\mathcal{S}_N; \mathbb{C}) = \sum_{0 \leq \ell \leq \min\{i, k\}} f^{(n-\ell, \ell)}.$$

したがって, これは $\text{Im} \pi_1$ の i 次の部分空間の次元に一致するので, $\text{Im} \pi_1 = H_{\mathcal{S}_1}^*(\mathcal{S}_N; \mathbb{C})$ を得る. 以上の議論から定理 1 が得られる.

参考文献

- [1] B. Dewitt and M. Harada, Poset pinball, highest forms, and $(n-2, 2)$ Springer varieties, arXiv:1012.5265v2.
- [2] J. S. Tymoczko. Linear conditions imposed on flag varieties. Amer. J. Math., 128(6):1587-1604, 2006.