

## 特異な非対称差分行列のSOR法

大阪女子大学 石原 和夫 (Kazuo Ishihara)

1. SOR法.  $A = D - L - U = (a_{ij})$ ,  $1 \leq i, j \leq n$  とし,  $D, -L, -U$  は  $A$  の対角, 狭義の下三角, 狭義の上三角成分,  $a_{ii} \neq 0$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $J = D^{-1}(L + U)$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  を  $J$  の固有値,  $\omega$  を加速係数,  $H_\omega = (D - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D + \omega U]$ ,  $\rho(J) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$ ,  $\gamma(J) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\lambda_i|; \lambda_i \neq 1\}$ ,  $\delta(J) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\lambda_i|; |\lambda_i| \neq 1\}$ , とする.  $Ax = b$  のSOR法は  $x_{k+1} = H_\omega x_k + \omega(D - \omega L)^{-1}b$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  となる。

補題1 [1, 6]. (i)  $A$  が convergent ( $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = O$ )  $\Leftrightarrow \rho(A) < 1$ .

(ii)  $\rho(A) = 1$  とする.  $A$  が semiconvergent ( $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k$  が存在)  $\Leftrightarrow \gamma(A) < 1$  かつ  $A$  の固有値 1 に関するすべての elementary divisor が linear.

仮定1.  $A$  が consistently ordered かつ 2-cyclic である.

仮定2.  $\det A = 0$  かつ  $J$  の固有値 1 に関するすべての elementary divisor が linear である.

補題2 [6].  $A$  は仮定1を満たす正則行列,  $J$  の固有値はすべて実数で  $\rho(J) < 1$  とする.  $\Rightarrow H_\omega$  は convergent ( $\rho(H_\omega) < 1$ ,  $0 < \omega < 2$ ),  $\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(J)^2}}$  は  $\rho(H_{\omega_{\text{opt}}}) = \min_{0 < \omega < 2} \rho(H_\omega)$  となる.

補題3 [1, 2].  $A$  は仮定1と2を満たす特異行列,  $J$  の固有値はすべて実数で  $\rho(J) = 1$  とする.  $\Rightarrow H_\omega$  は semiconvergent ( $\gamma(H_\omega) < 1$ ,  $0 < \omega < 2$ ),  $\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \delta(J)^2}}$  は  $\gamma(H_{\omega_{\text{opt}}}) = \min_{0 < \omega < 2} \gamma(H_\omega)$  となる.  $b \in \text{Im} A$  の時,  $x_k$  は  $Ax = b$  の解に収束する。

2. Neumann 境界条件の差分行列. 次のような2点境界値問題を考える.

$$(1) \quad \begin{cases} y''(x) = p(x)y'(x) + r(x), & a \leq x \leq b, \\ y'(a) = \alpha, & y'(b) = \beta. \end{cases}$$

ここで  $p(x), r(x)$  は連続とする.  $[a, b]$  を  $(n-1)$  等分し,  $h = \frac{b-a}{n-1}$ ,  $x_i = a + (i-1)h$ ,  $1 \leq i \leq n$ . (1) を中心差分により近似し,  $y(x_i)$  の近似解を  $v_i$  とすれば (1) の差分方程式は  $Av = b$  となる ( $\det A = 0$ ).

定理 1.  $h \cdot \max_{a \leq x \leq b} |p(x)| < 2$  とする.  $\Rightarrow H_\omega$  は semiconvergent ( $\gamma(H_\omega) < 1$ ,  $0 < \omega < 2$ ) で  $\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \delta(J)^2}}$  は  $\gamma(H_{\omega_{\text{opt}}}) = \min_{0 < \omega < 2} \gamma(H_\omega)$  となる. さらに,  $h = \frac{b-a}{n-1}$  が十分小ならば,  $\omega_{\text{opt}} \approx \frac{2}{1 + \sin \frac{\pi}{n-1}}$ .

3. 周期境界条件の差分行列. 次のような 2 点境界値問題を考える.

$$(2) \quad \begin{cases} y''(x) = p(x)y'(x) + r(x), & a \leq x \leq b, \\ y(a) = y(b), & y'(a) = y'(b). \end{cases}$$

ここで  $p(x)$ ,  $r(x)$  は連続とする.  $[a, b]$  を  $n$  等分し,  $h = \frac{b-a}{n}$ ,

$$x_i = \begin{cases} a + (j-1)h, & \text{if } i = 2j-1, \\ b - jh, & \text{if } i = 2j, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

を mesh type II とする. (2) の中心差分による差分方程式は  $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$  となる ( $\det A = 0$ ).

定理 2.  $n$  は偶数, mesh type II,  $h \cdot \max_{a \leq x \leq b} |p(x)| < 2$ ,  $\prod_{i=1}^n \{1 + \frac{1}{2}p(x_i)h\} = \prod_{i=1}^n \{1 - \frac{1}{2}p(x_i)h\}$  とする.  $\Rightarrow H_\omega$  は semiconvergent ( $\gamma(H_\omega) < 1$ ,  $0 < \omega < 2$ ) で  $\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \delta(J)^2}}$  は  $\gamma(H_{\omega_{\text{opt}}}) = \min_{0 < \omega < 2} \gamma(H_\omega)$  となる. さらに,  $h = \frac{b-a}{n}$  が十分小ならば,  $\omega_{\text{opt}} \approx \frac{2}{1 + \sin \frac{2\pi}{n}}$ .

定理 3.  $n$  は偶数, mesh type II,  $h \cdot \max_{a \leq x \leq b} |p(x)| < 2$ ,  $J$  は複素固有値をもつとする.  $\Rightarrow 0 < \omega < \omega_{\text{max}}$  で  $H_\omega$  は semiconvergent となる  $\omega_{\text{max}} < 2$  が存在し,  $\gamma(H_{\omega_{\text{opt}}}) = \min_{0 < \omega < \omega_{\text{max}}} \gamma(H_\omega)$  となる  $\omega_{\text{opt}}$  が存在する. さらに,  $h = \frac{b-a}{n}$  が十分小ならば,  $\omega_{\text{max}} \approx 2$ ,  $\omega_{\text{opt}} \approx \frac{2}{1 + \sin \frac{2\pi}{n}}$ .

注意. 境界値問題 (1), (2) の解は次の例のように存在しないこともある.

$$(3) \quad \begin{cases} y''(x) = 2, & 0 \leq x \leq 1, \\ y'(0) = 0, & y'(1) = 0, \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} y''(x) = 2, & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = y(1), & y'(0) = y'(1). \end{cases}$$

また解  $y(x)$  が存在する時は,  $y(x) + c$  も解となる ( $c$  は任意定数). 特に (1) の場合,  $y'(x)$  を初期値問題  $y''(x) = p(x)y'(x) + r(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ ,  $y'(a) = \alpha$  の解とし,  $y'(b) \neq \beta$  となる時 (1) の解  $y(x)$  は存在しない. なお (3), (4) の差分方程式  $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$  は  $\mathbf{b} \notin \text{Im} A$  すなわち inconsistent な方程式となり, SOR 法は semiconvergence しないことが言える.

## 参考文献

- [1] Bermann, A. and Plemmons, R. J., Nonnegative matrices in the mathematical sciences, Academic Press, 1979.
- [2] Hadjidimos, A., On the optimization of the classical iterative schemes for the solution of complex singular linear systems, SIAM J. Alg. Disc. Meth., 6 (1985), 555 – 566.
- [3] Ishihara, K., Projected successive overrelaxation method for finite element solutions to the Dirichlet problem for a system of nonlinear elliptic equations, J. Comput. Appl. Math., 38 (1991), 185 – 200.
- [4] Ishihara, K. and Yamamoto, M., Optimum relaxation parameter of SOR iterations for discrete Neumann type arising from two-point boundary value problems, Math. Japon., 39 (1994), 385 – 393.
- [5] Ishihara, K. and Yamamoto, M., On the optimum SOR iterations for finite difference approximation to periodic boundary value problems, Math. Japon., 41 (1995), 199 – 209.
- [6] Varga, R. S., Matrix iterative analysis, Prentice-Hall, 1962.