

Generalized Numerical Radius and ρ -Dilation

北海道教育大学札幌校 大久保 和義

1. はじめに ここでの結果は中路氏 (北海道大学・理学部) との共同研究による。

以下では A, B はヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素とする。

$\rho > 0$ に対して A が ρ -縮小作用素であるとは $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ なるヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ とその上のユニタリ作用素 U があって、

$$A^n = \rho P U^n|_{\mathcal{K}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

が成り立つこととする。ここで P は $\mathcal{K}$ から $\mathcal{H}$ への直交射影作用素である。([7] 参照) ρ -縮小作用素の特徴づけとして次のことが知られている。

Theorem A. (*B.Sz.-Nagy and C. Foias[8]*) $A \in B(\mathcal{H})$, $\rho > 0$ とする。このとき、次の条件は同値である。

(i) A が ρ -縮小作用素

(ii) $r(A) \leq \frac{\rho}{|\rho-1|}$, $\|zA\{\rho - z(\rho-1)A\}^{-1}\| \leq 1$ ($|z| < 1$)

(iii) $-2\operatorname{Re}[zA(I - zA)^{-1}] \leq \rho I$ ($|z| < 1$)

C_ρ として ρ -縮小作用素全体の集合とする。

A の ρ -半径を $w_\rho(A) = \inf\{\gamma > 0 \mid \gamma^{-1}A \in C_\rho\}$ で定義する (J.A.R.Holbrook[4] 参照)。このとき、 $w_\rho(\cdot)$ は $0 < \rho \leq 2$ でノルムになるが $2 < \rho < \infty$ のときは以下のように準ノルムにはなるがノルムではない。

$$w_\rho(A+B) \leq \frac{\rho}{2}\{w_\rho(A) + w_\rho(B)\}$$

ρ -半径は次の性質をもつ。(T.Ando[1] 参照)

$$(1) \quad w_1(A) = \|A\| : \text{the operator norm}$$

$$(2) \quad w_2(A) = w(A) : \text{the numerical radius}$$

$$(3) \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} w_\rho(A) = r(A) : \text{the spectral radius}$$

$$(4) \quad \begin{aligned} & \log w_{\lambda\rho+(1-\lambda)\sigma}(A) \\ & \leq \lambda \log w_\rho(A) + (1-\lambda) \log w_\sigma(A) \end{aligned}$$

$$(5) \quad 1 \leq \sigma \leq \rho \text{ ならば } w_\rho(A) \leq w_\sigma(A)$$

$$(6) \quad 1 \leq \sigma \leq \rho \text{ ならば } \sigma w_\sigma(A) \leq \rho w_\rho(A)$$

$$(7) \quad w_\rho(UAU^*) = w_\rho(A) \quad (\text{unitary } U)$$

$w|_\rho(\cdot)$ は Schwarz norm である。すなわち analytic function $f: \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ ($D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, $f(0) = 0$) に対して

$$(8) \quad w_\rho(A) \leq 1 \implies w_\rho(f(A)) \leq 1$$

$S \geq 0$ を有界半正値作用素とすると、C.-K.Li, N.-K.Tsing and F.Uhlig [5] より一般化された数域 $V_S(A)$ が次のように定義された。

$$(9) \quad V_S(A) = \{(Ax, x) \mid x \in \mathcal{H}, |(Sx, x)| = 1\}$$

$V_S(A)$ に関して $v_S(A)$ を次で定義する。

$$(10) \quad v_S(A) = \sup\{|(Ax, x)| \mid x \in \mathcal{H}, |(Sx, x)| = 1\}$$

特に $S = I$ のときは、 $V_I(A) = W(A) := \{(Ax, x) \mid \|x\| = 1\}$ (A の数域) で、かつ $v_I(A) = w(A)$ である。

この応用としては、 A がコンパクト作用素で $S = |A| := (A^*A)^{1/2}$ 、 $v_S(A) \leq 1$ のとき、 A が正規作用素であることが T.Ando and K.Takahashi [3] によって知られている。 $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$ に対して

$$\mathbf{w}_\lambda(A) = \sup\{|(Ax, x)| \mid \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|Ax\|^2 \leq 1\}$$

$$\mathbf{w}_\mu^+ = \sup\{\mu\|Ax\|^2 + (1-\mu)|(Ax, x)| \mid \|x\| \leq 1\}$$

として、 $\mu \geq 1$ に対して、

$$\mathbf{w}_\mu^-(A) = \sup\{\mu\|Ax\|^2 + (\mu-1)|(Ax, x)| \mid \|x\| \leq 1\}$$

とする。ここでは、 A が ρ -縮小作用素であることを A に関係する $S \geq 0$ と $v_S(A)$ を使って、さらに、 $\mathbf{w}_\lambda(A)$, $\mathbf{w}_\mu^+(A)$, $\mathbf{w}_\mu^-(A)$ を用いて特徴づける。

また、 $w_\rho(A)$ を $|(Ax, x)|$, $\|Ax\|$, $\|x\|$ を使って表示する。

2. 結果 $\rho > 0$ に対して A が ρ -縮小作用素であるための条件として次を得る。

定理 1 $\rho > 0, \rho \neq 1$ とする。 $0 < t \leq 1$ に対して

$$(11) \quad S_t = \frac{1}{t} \frac{\rho}{2|\rho-1|} I + t \frac{\rho-2}{2|\rho-1|} |A|^2$$

とする。このとき、 A が ρ -縮小作用素であるための必要十分条件は、 $S_t \geq 0$ かつ、 $v_{S_t}(A) \leq 1$ が $0 < t \leq 1$ で成り立つことである。

証明 $\rho > 0$ とする。 $A \in C_\rho$ であるための必要十分条件は

$$\|x\|^2 + \left(1 - \frac{2}{\rho}\right) |\zeta|^2 \|Ax\|^2 - 2 \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) \operatorname{Re} \zeta (Ax, x) \geq 0$$

が成り立つことである。ここで $\zeta \in D, x \in \mathcal{H}$ である。これは

$$|\zeta| |(Ax, x)| \leq \frac{\rho}{2|\rho-1|} \|x\|^2 + \frac{\rho-2}{2|\rho-1|} |\zeta|^2 \|Ax\|^2$$

と同値であり、定理が言える。

この結果として、

系 2 $\rho > 0, \rho \neq 1$ に対して A が ρ -縮小作用素であるために必要十分条件は、 $0 < t \leq 1$ に対して $A = S_t^{1/2} B_t S_t^{1/2}$ とできることである。ここで、 B_t は $w(B_t) \leq 1$ である。 (S_t) は (11) で定義された作用素

この証明は次の定理と同様なのでそこで示す。

特に、 $0 < \rho \leq 2, \rho \neq 1$ のときは、次のことが言える。

定理 3 $0 < \rho \leq 2, \rho \neq 1$ とすると、 A が ρ -縮小作用素であるために必要十分条件は $A = S^{1/2} B S^{1/2}$ となることである。ただし、 $S = (\rho I + (\rho-2)|A|^2)/2|\rho-1|$ で、 B は $w(B) \leq 1$ を満たす。

証明 $A \in C_\rho$ とする。定理 1 で $0 < \rho \leq 2$ のとき、 $S_t (0 \leq t \leq 1)$ の最小は $t=1$ のときで、したがって S のみを考えるとよい。 $1 < \rho \leq 2$ とする。仮に、 $y (\neq 0) \in \mathcal{H}$ が $Sy = 0$ を満たすとする、 $|A|^2 y = \rho y / (2-\rho)$ となる。また、(6) より $\rho w_\rho(A) \geq \|A\|$ がいえるから、

$$1 \geq w_\rho(A) \geq \frac{\|A\|}{\rho} \geq \frac{1}{\sqrt{\rho(2-\rho)}}$$

より、 $\rho=1$ となり矛盾。よって、 $\ker S = \{0\}$ である。 $0 < \rho < 1$ のとき、 $\rho w_\rho(A) = (2-\rho)w_{2-\rho}(A)$ が知られている (T.Ando and K.Nishio [2] 参照) から、さらに、

$$\begin{aligned} & \left((2-\rho)I + ((2-\rho)-2) \left(\frac{2-\rho}{\rho} \right)^2 |A|^2 \right) / 2((2-\rho)-1) \\ &= \frac{2-\rho}{\rho} (\rho I + (\rho-2)|A|^2) / 2(1-\rho) \end{aligned}$$

が成り立つから、このときも $\ker S = \{0\}$ であることがわかる。したがって、 $v_S(A) \leq 1$ であるための必要十分条件は

$$|(S^{-1/2}AS^{-1/2}x, x)| \leq (x, x) \quad (x \in \mathcal{H})$$

であり、 $B = S^{-1/2}AS^{-1/2}$ とするとこの不等式は

$$A = S^{1/2}BS^{1/2}, \quad w(B) \leq 1$$

となる。

系 4 $\rho > 0, \rho \neq 1$ とする。 $t \geq w_\rho(A)$ であるとき、

$$(12) \quad |(Ax, x)| \leq t \frac{\rho}{2|\rho-1|} \|x\|^2 + \frac{1}{t} \frac{\rho-2}{2|\rho-1|} \|Ax\|^2 \quad (x \in \mathcal{H})$$

が成り立つ。逆に、ある t_0 があって、 $t \geq t_0$ に対して (12) が成り立てば、 $t_0 \geq w_\rho(A)$ である。

この事実は後で用いる。

系 5

(1) $0 \leq \mu \leq 1, 1 \leq \rho = 2/(\mu+1) \leq 2$ とする。このとき、 A が ρ -縮小作用素であることと $w_\mu^+(A) \leq 1$ であることが同値である。

(2) $1 \leq \mu, 0 < \rho = 2/(\mu+1) \leq 1$ とする。このとき、 A が ρ -縮小作用素であることと $w_\mu^-(A) \leq 1$ であることが同値である。

証明 定理 3 での考察より、 $w_\rho(A) \leq 1$ であるための必要十分条件は

$$\frac{2-\rho}{2|\rho-1|} \|Ax\|^2 + |(Ax, x)| \leq \frac{\rho}{2|\rho-1|} \|x\|^2 \quad (x \in \mathcal{H})$$

である。この不等式は

$$\mu \|Ax\|^2 + \lambda |(Ax, x)| \leq \|x\|^2$$

と同値になる。ここで $\mu = (2-\rho)/\rho, \lambda = 2|\rho-1|/\rho$ である。仮に $1 < \rho \leq 2$ なら $\mu + \lambda = 1$, もし $0 < \rho < 1$ なら $\mu - \lambda = 1$ である。

$\mu \|A\|^2 + \lambda w(A) \leq 1$ ($\mu + \lambda = 1$ ($0 \leq \mu \leq 1$) または $\mu - \lambda = 1$ ($1 \leq \mu < \infty$)) とする。仮に $\rho = 2/(\mu+1)$ ならば $w_\rho(A) \leq 1$ が系 5 から言えるが、逆は言えない。

系 6 $0 < \rho \leq 2$ とする。このとき $w_\rho(A) \leq 1$ であるための必要十分条件は $w(\mu|A|^2 + \lambda^{i\theta}A) \leq 1$ ($0 < \theta \leq 2\pi$)。ここで $\mu + \lambda = 1, \mu = \frac{2}{\rho} - 1$ または $\mu - \lambda = 1, \mu = \frac{2}{\rho} - 1$ とする。

定理 7 $0 \leq \lambda \leq 1$ とする。

(1) $\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1$, $\rho = 2\lambda/(2\lambda - 1) \geq 2$ とするとき、 A が ρ -縮小作用素である必要十分条件は $w_\lambda(tA) \leq 1$ ($0 < t \leq 1$) となることである。

(2) $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$, $1 \leq \rho = 2(\lambda - 1)/(2\lambda - 1) \geq 2$ かつ A が可逆とすると、 A^{-1} が ρ -縮小作用素である必要十分条件は $w_\lambda(tA) \leq 1$ ($t \geq 1$) となることである。

この証明は定理 1 を用いてできる。

定理 8 $0 < \rho$, $\rho \neq 1$ とする。このとき、

$$(13) \quad w_\rho(A) = \frac{|\rho - 1|}{\rho} \sup\{|(Ax, x)| + \sqrt{D} \mid \|x\| = 1, D \geq 0\}$$

ただし、 $D = |(Ax, x)|^2 - \frac{\rho(\rho-2)}{(\rho-1)^2} \|Ax\|^2$ とする。

証明 系 4 より、 $t \geq w_\rho(A)$ とすると $\lambda \|x\|^2 t^2 - |(Ax, x)|t + (1 - \lambda) \|Ax\|^2 \geq 0$ ($x \in \mathcal{H}$) となる。ここで $\lambda = \rho/2|\rho - 1|$ 。 $D \geq 0$ と仮定すると、

$$w_\rho(A) \leq \frac{|(Ax, x)| - \sqrt{D}}{2\lambda \|x\|^2}$$

または、

$$w_\rho(A) \geq \frac{|(Ax, x)| + \sqrt{D}}{2\lambda \|x\|^2}$$

である。

$$t_0 = \sup_{x \neq 0} \frac{|(Ax, x)| + \sqrt{D}}{2\lambda \|x\|^2}$$

とおくと、 $t \geq t_0$ ならば

$$\lambda \|x\|^2 t^2 - |(Ax, x)|t + (1 - \lambda) \|Ax\|^2 \geq 0$$

が $x \in \mathcal{H}$ でいえる。系 4 から、 $w_\rho(A) \leq t_0$ となる。

$0 < \rho \leq 2$ のとき、 $| (Ax, x) | - \sqrt{D} \leq 0$ だから、 $w_\rho(A) \geq t_0$ がいえて、 $w_\rho(A) = t_0$ となる。

$\rho > 2$ のとき、 $x_0 \in \mathcal{H}$ で

$$w_\rho(A) \leq \frac{|(Ax_0, x_0)| - \sqrt{D}}{2\lambda \|x_0\|^2}$$

をみたすとする、系 4 から

$$|(Ax_0, x_0)| \leq t\lambda \|x_0\|^2 + \frac{1}{t}(1 - \lambda) \|Ax_0\|^2$$

($t > \{|(Ax_0, x_0)| - \sqrt{D}\}/2\lambda\|x_0\|^2$) がいえる。一方で、もし、 $t > \{|(Ax_0, x_0)| - \sqrt{D}\}/2\lambda\|x_0\|^2$ ならば、

$$\lambda\|x_0\|^2 t^2 - |(Ax_0, x_0)|t + (1 - \lambda)\|Ax_0\|^2 < 0$$

となり、これは矛盾する。したがって、

$$w_\rho(A) \geq \frac{|(Ax, x)| + \sqrt{D}}{2\lambda\|x\|^2}$$

がすべての $x \in \mathcal{H}$ について成り立つ。ゆえに、 $\rho > 2$ でも $w_\rho(A) = t_0$ がいえる。

系 9 $0 < \rho \leq 2$ とすると、次の不等式が成り立つ。

$$\max \left\{ 2 \left| 1 - \frac{1}{\rho} \right| w(A), \sqrt{\frac{2-\rho}{\rho}} \|A\| \right\} \leq w_\rho(A) \leq 2 \left| 1 - \frac{1}{\rho} \right| w(A) + \sqrt{\frac{2-\rho}{\rho}} \|A\|$$

先に注意したように、 $0 < \rho \leq 2$ では $\rho w_\rho(A) = (2 - \rho)w_{2-\rho}(A)$ が成り立つから、 $1 \leq \rho \leq 2$ でこの不等式がいえることを示すとよいことがわかる。定理 8 から簡単にこの不等式は示される。また、 $1 < \rho \leq 2$ で、左辺の不等式はすでに知られている不等式

$$w(A) \leq w_\rho(A), \|A\| \leq \rho w_\rho(A)$$

より、良くないが、左辺との関連で挙げておいた。

定理 10

(1) $0 < \rho \leq 2$ とする。このとき、

$$w_\rho(A) = \frac{2}{\rho} \sup_{\|x\|=1} \sup_{0 \leq t \leq 1} \{ \sqrt{\rho(2-\rho)} \|Ax\| \sqrt{t(1-t)} + |\rho - 1| |(Ax, x)| t \}$$

(2) $\rho > 2$ のとき、

$$w_\rho(A) = \frac{2}{\rho} \sup_{\|x\|=1, D \geq 0} \inf_{t \geq 1} \{ -\sqrt{\rho(2-\rho)} \|Ax\| \sqrt{t(t-1)} + |\rho - 1| |(Ax, x)| t \}$$

ただし、 $D = |(Ax, x)|^2 - \frac{\rho(\rho-2)}{(\rho-1)^2} \|Ax\|^2$ とする。

証明 (1) $0 < \rho \leq 2$ とする。 $\|x\| = 1$ なる $x \in \mathcal{H}$ に対して $g(t, x) = \sqrt{\rho(2-\rho)} \|Ax\| \sqrt{t(1-t)} + |\rho - 1| \cdot |(Ax, x)| t$ とおく。このとき、

$$\begin{aligned} & 2 \left(\frac{d}{dt} g(t, x) \right) \sqrt{t(1-t)} \\ &= \sqrt{\rho(2-\rho)} \|Ax\| (1-2t) + 2|\rho - 1| \cdot |(Ax, x)| \sqrt{t(1-t)} \end{aligned}$$

となり、 $\frac{d}{dt}g(t, x)|_{t=t_0} = 0$, $0 \leq t_0 \leq 1$ である必要十分条件は

$$t_0 = \frac{1}{2} + \frac{|(Ax, x)|}{2\sqrt{D}}$$

であり、したがって、

$$\sqrt{t_0(1-t_0)} = \frac{\sqrt{\rho(2-\rho)}\|Ay\|}{2|\rho-1|\sqrt{D}}$$

となる。ここで $D = |(Ax, x)|^2 - \frac{\rho(\rho-2)}{(\rho-1)^2}\|Ax\|^2$ とする。ゆえに

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\rho} \sup_{\|x\|=1} \sup_{0 \leq t \leq 1} \{ \sqrt{\rho(2-\rho)}\|Ay\|\sqrt{t(1-t)} + |\rho-1| \cdot |(Ax, x)|t \} \\ &= \frac{2}{\rho} \sup_{\|x\|=1} \left\{ \sqrt{\rho(2-\rho)}\|Ax\| \times \frac{\sqrt{\rho(2-\rho)}\|Ax\|}{2|\rho-1|\sqrt{D}} + |\rho-1| \cdot |(Ax, x)| \times \left(\frac{1}{2} + \frac{|(Ax, x)|}{2\sqrt{D}} \right) \right\} \\ &= \frac{|\rho-1|}{\rho} \sup_{\|x\|=1} \{ |(Ax, x)| + \sqrt{D} \} \end{aligned}$$

(2) も $f(t, x) = -\sqrt{\rho(\rho-2)}\|Ax\|\sqrt{t(t-1)} + (\rho-1)|(Ax, x)|t$ とおいて、(1) と同様な考察で示される。

定理 10 のことから、R.Mathias and K.Okubo[6] の次の表示が得られる。

系 11 $0 < \rho \leq 2$ とする。このとき、 $w_\rho(A) = \frac{2}{\rho}w(C_\rho \otimes A)$ となる。ここで、

$$C_\rho = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\rho(2-\rho)} \\ 0 & 1-\rho \end{bmatrix} \text{ である。}$$

REFERENCES

1. T.Ando, ρ -dilation and ρ -radius (Japanese), Sugaku **28** (1976), 107-120.
2. T.Ando and K.Nishio, Convexity properties of operator radii associated with unitary ρ -dilations, Michigan Math. J. **20** (1973), 303-307.
3. T.Ando and K.Takahashi, On operators with unitary ρ -dilations, Ann. Pol. Math. **66** (1997), 11-14.
4. J.A.R.Holbrook, On the power-bounded operators of Sz.-Nagy and Foiaş, Acta Sci. Math. (Szeged) **29** (1968), 299-310.
5. C.K.Li, N.K.Tsing and F.Uhling, Numerical ranges of operator on an indefinite inner product space, Electronic J.Lin Alg. **1** (1996), 1-17.
6. Mathias and K.Okubo, The induced norm of the Schur multiplication operator with respect to the operator radius, Linear and Multilinear Algebra **37** (1994), 114-124.
7. B.Sz.-Nagy and C.Foiaş, On certain classes of power bounded operators in Hilbert space, Acta Sci. Math. **27** (1966), 17-25.
8. B.Sz.-Nagy and C.Foiaş, Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space, North-Holland, Amsterdam, 1970.