

# Prismatic $F$ -crystal の変形理論と $p$ 可除群について

伊藤 和広\* (東北大学大学院理学研究科数学専攻)

Kazuhiro Ito (Mathematical Institute, Tohoku University)

## 1 概要

本稿では「代数的整数論とその周辺 2023」における筆者の講演に基づき、筆者が論文 [11], [12] で得たプリズマティック  $F$ -クリスタル (prismatic  $F$ -crystal) の変形理論についての結果を紹介する。さらにその結果を応用することで、Scholze–Weinstein による  $p$  可除群の分類定理 ([16, Theorem 14.4.1]) を、プリズマティックコホモロジーを用いて再証明できることを説明する。本稿全体を通して素数  $p$  を固定する。

背景について簡単に説明する。Bhatt–Scholze は論文 [6] にてプリズマティックコホモロジーとよばれる新しい  $p$  進コホモロジーを導入し、従来研究されてきた様々な  $p$  進コホモロジー (エタールコホモロジー, ド・ラームコホモロジー, クリスタリンコホモロジーなど) がプリズマティックコホモロジーを用いて記述できることを示した。プリズマティックコホモロジーはプリズマティックサイトとよばれる Grothendieck 位相付きの圏を用いて計算されるコホモロジーである。冒頭で述べたプリズマティック  $F$ -クリスタルとはプリズマティックサイト上のある種の層である。後述するように  $p$  可除群のプリズマティックコホモロジーがプリズマティック  $F$ -クリスタルの代表例である。プリズマティックサイトはコホモロジー論に大きな進展を与えただけでなく、プリズマティック  $F$ -クリスタルのモジュライ空間を考えることで、数論で重要な様々な空間 (志村多様体, Rapoport–Zink 空間, 局所志村多様体の整モデルなど) の研究に役立つと期待されている。

## 2 準備

本節では、主結果を述べるために必要なプリズマティック  $F$ -クリスタルに関する基本事項を説明する。本稿の目的のため、プリズマティック Dieudonné クリスタルとよばれる特殊なプリズマティック  $F$ -クリスタルに限って述べることにする。

---

\* kazuhiro.ito.c3@tohoku.ac.jp

**定義 2.1** (Bhatt–Scholze [6]) (1) **プリズム** (prism) とは以下の条件を満たす  $\delta$  環  $A$  とイデアル  $I \subset A$  の組  $(A, I)$  である.

- $I \subset A$  は Cartier 因子である. つまり  $I$  は階数 1 の有限生成射影  $A$  加群である.
- $A$  は  $(p, I)$  進完備である. すなわち自然な写像  $A \rightarrow \varprojlim_n A/(p, I)^n$  が同型である.
- ある自然数  $n$  が存在して  $(A/I)[p^\infty] = (A/I)[p^n]$  が成立する.
- $p \in (I, \phi_A(I))$  が成立する.

(2) プリズムの射  $(A, I) \rightarrow (B, J)$  とは  $\delta$  環の準同型  $A \rightarrow B$  で  $I$  を  $J$  の中にうつすものである.

上の定義で使われている用語, 記法について以下で説明を加える. プリズムについての詳細は [6, Section 3] を参照せよ.

**注意 2.2**  $\delta$  環とは  $\mathbb{Z}_{(p)}$  上の環  $A$  と  $\delta$  構造とよばれるいくつかの条件を満たす (集合としての) 写像  $\delta_A: A \rightarrow A$  の組である. 定義は [6, Definition 2.1] を参照.  $\delta$  環  $A$  は次の重要な性質を満たす: 写像

$$\phi_A: A \rightarrow A, \quad x \mapsto x^p + p\delta_A(x)$$

は環準同型であり, Frobenius 射  $A/p \rightarrow A/p, x \mapsto x^p$  の持ち上げである. 環準同型  $\phi_A$  を  $\delta$  環  $A$  の Frobenius 射とよぶ.  $\mathbb{Z}_{(p)}$  上の環  $A$  が  $p$  を非零因子として持つとき,  $\delta_A \mapsto \phi_A$  という対応によって  $A$  上の  $\delta$  構造  $\delta_A: A \rightarrow A$  のなす集合から, 環準同型  $\phi_A: A \rightarrow A$  で Frobenius 射の持ち上げであるもののなす集合への全単射が得られる ([6, Remark 2.2]).

**注意 2.3**  $(A/I)[p^n]$  は準同型  $A/I \rightarrow A/I, x \mapsto p^n x$  の核である. また  $(A/I)[p^\infty] = \bigcup_{n \geq 1} (A/I)[p^n]$  である. 正確には, 定義 2.1 でのプリズム  $(A, I)$  は論文 [6] で bounded なプリズムとよばれるものである. 本稿で扱うプリズムは全て bounded である.

プリズムの基本的な例を挙げる. 以下では  $k$  を標数  $p$  の完全体とし  $W(k)$  は  $k$  を係数に持つ Witt ベクトルのなす環とする.  $W(k)$  は  $p$  を非零因子として持つため,  $W(k)$  の Frobenius 射に対応する  $\delta$  構造が定まる. このとき  $(W(k), (p))$  はプリズムである. より一般に次が得られる.

**例 2.4** (1)  $W(k)$  を係数に持つ形式的冪級数環  $\mathfrak{S} = W(k)[[t_1, \dots, t_n]]$  を考える. 準同型  $\phi: \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$  を係数  $W(k)$  には通常の Frobenius 射として作用し, 各変数  $t_i$  を  $t_i^p$  にうつすものとして定義する. これは Frobenius 射の持ち上げである. 環  $\mathfrak{S}$  は  $p$  を非零因子として持つため  $\phi$  に対応する  $\mathfrak{S}$  上の  $\delta$  構造が定まる. 形式的冪級数  $\mathcal{E} \in \mathfrak{S}$  で定数項が  $p$  であるものとする. このとき  $(\mathfrak{S}, (\mathcal{E}))$  はプリズムである. 本稿ではこ

のようなプリズムを **Breuil–Kisin 型のプリズム** とよぶ. ただし  $n$  は任意の 0 以上の整数をとる.

(2) 自然数  $m \geq 1$  に対し

$$\mathfrak{S}_m := W(k)[[t_1, \dots, t_n]]/(t_1, \dots, t_n)^m$$

とおく. 環  $\mathfrak{S}_m$  は  $\mathfrak{S}$  から誘導される自然な  $\delta$  構造を持つ. このとき  $(\mathfrak{S}_m, (\mathcal{E}))$  はプリズムである<sup>\*1</sup>.

もう一つ例を挙げる.  $\mathcal{O}_C$  を  $p$  進完備な高さ 1 の付値環とし, その商体  $C$  は代数的閉体であると仮定する. 簡単のため  $p$  は  $\mathcal{O}_C$  で 0 でない (つまり  $C$  は標数 0 の体) とする. 環  $\mathcal{O}_C$  は [5, Definition 3.5] の意味でのパーフェクトイド環 (perfectoid ring) である. 特に次の性質を満たす: 標数  $p$  の完全環

$$\mathcal{O}_{C^\flat} := \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_C/p$$

を係数とする Witt ベクトルのなす環  $W(\mathcal{O}_{C^\flat})$  を考える. 環準同型

$$\theta: W(\mathcal{O}_{C^\flat}) \rightarrow \mathcal{O}_C$$

で, イデアル  $(p)$  で割ると射影  $\mathcal{O}_{C^\flat} \rightarrow \mathcal{O}_C/p, (x_0, x_1, \dots) \mapsto x_0$  となるものが一意に存在する. さらに  $\theta$  の核  $\text{Ker } \theta$  は一つの非零因子  $\xi \in W(\mathcal{O}_{C^\flat})$  で生成される. 詳細は [5, Section 3] または [8, Section 2] を参照.

**例 2.5** (1) 環  $W(\mathcal{O}_{C^\flat})$  は  $p$  を非零因子として持つため, 通常 Frobenius 射  $\phi: W(\mathcal{O}_{C^\flat}) \rightarrow W(\mathcal{O}_{C^\flat})$  から  $W(\mathcal{O}_{C^\flat})$  上の  $\delta$  構造が誘導される. このとき  $(W(\mathcal{O}_{C^\flat}), \text{Ker } \theta)$  はプリズムである.

(2)  $\theta([p^\flat]) = p$  を満たす元  $p^\flat \in \mathcal{O}_{C^\flat}$  が存在する. (ここで  $[p^\flat] \in W(\mathcal{O}_{C^\flat})$  は Teichmüller 持ち上げを表す.) 自然数  $m \geq 1$  に対し  $W(\mathcal{O}_{C^\flat})/[p^\flat]^m$  は  $W(\mathcal{O}_{C^\flat})$  から誘導される自然な  $\delta$  構造を持つ. このとき

$$(W(\mathcal{O}_{C^\flat})/[p^\flat]^m, \text{Ker } \theta)$$

はプリズムである. 詳細は例えば [11, Section 2] を参照.

次に Breuil–Kisin 加群について述べる.

**定義 2.6** プリズム  $(A, I)$  上の **Breuil–Kisin 加群** とは有限生成射影  $A$  加群  $M$  と  $A$  加群の準同型

$$F_M: \phi^* M \rightarrow M$$

<sup>\*1</sup> ここでは  $(\mathcal{E}) \subset \mathfrak{S}$  の  $\mathfrak{S}_m$  への像を同じ記号を用いて表している. 同様の記法を以降ことわりなく用いる.

で余核  $\text{Coker } F_M$  が  $I \cdot \text{Coker } F_M = 0$  を満たすものの組である．ここで  $\phi^* M$  は準同型  $\phi_A: A \rightarrow A$  による  $M$  の係数拡大を表す．( $I \subset A$  が Cartier 因子であるため，準同型  $F_M$  は単射である．例えば [12, Section 3.1] を参照．)

プリズム  $(W(k), (p))$  上の Breuil–Kisin 加群は  $W(k)$  上の Dieudonné 加群に他ならない．

**注意 2.7** ここでの Breuil–Kisin 加群は [1, Definition 4.24] で minuscule Breuil–Kisin 加群とよばれているものである．

次にプリズマティック Dieudonné クリスタルを説明する．以下の概念を用いる．

**定義 2.8** (Bhatt–Scholze [6])  $W(k)$  上の完備正則局所環  $R$  で剰余体が  $k$  であるものの全体のなす圏  $\mathcal{C}_{W(k)}$  を考える．射は  $W(k)$  上の局所的な準同型全体からなる．プリズム  $(A, I)$  と環準同型  $g: R \rightarrow A/I$  の組  $((A, I), g)$  全体からなる圏を  $(R)_\Delta$  とかく．環準同型  $g$  を省略して単に  $(A, I) \in (R)_\Delta$  とかくことも多い．圏  $(R)_\Delta$  (より正確にはその反対圏  $(R)_\Delta^{\text{op}}$ ) に，平坦被覆で生成される Grothendieck 位相を入れたものを  $R$  に付随する**プリズマティックサイト** (prismatic site) という．

もちろん，プリズマティックサイト  $(R)_\Delta$  は任意の環  $R$  について定義できるが，本稿では  $\mathcal{C}_{W(k)}$  の対象のみに対して考える．

**注意 2.9** プリズムの平坦被覆については [6, Definition 3.2] を参照． $(A, I)$  を  $A$  における関手は  $(R)_\Delta$  上の層をなす．この層を  $\mathcal{O}_\Delta$  とかく．(より正確には  $(R)_\Delta^{\text{op}}$  上の層というべきだが，誤解の余地がないとき「 $(R)_\Delta$  上の層」ということにする．)

**注意 2.10** 定義 2.8 において圏  $\mathcal{C}_{W(k)}$  の対象  $R$  は正則であると仮定していることに注意せよ．この正則性のもとで，Breuil–Kisin 型のプリズム  $(W(k)[[t_1, \dots, t_n]], (\mathcal{E}))$  (例 2.4) が存在して  $R$  と  $W(k)[[t_1, \dots, t_n]]/\mathcal{E}$  が  $W(k)$  上同型となる．この事実は主結果の証明で重要である．(逆に，任意の Breuil–Kisin 型のプリズム  $(W(k)[[t_1, \dots, t_n]], (\mathcal{E}))$  に対して  $W(k)[[t_1, \dots, t_n]]/\mathcal{E} \in \mathcal{C}_{W(k)}$  である．)

以下では  $R \in \mathcal{C}_{W(k)}$  とする．

**定義 2.11** ([7], [1])  $R$  上の**プリズマティック Dieudonné クリスタル** (prismatic Dieudonné crystal) とは  $(R)_\Delta$  上の  $\mathcal{O}_\Delta$  加群の層  $\mathcal{M}$  と射  $\varphi_{\mathcal{M}}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  の組で以下を満たすものである．

- 任意の  $(A, I) \in (R)_\Delta$  に対して  $\varphi_{\mathcal{M}}: \mathcal{M}(A, I) \rightarrow \mathcal{M}(A, I)$  は  $\varphi_{\mathcal{M}}(ax) = \phi_A(a)\varphi_{\mathcal{M}}(x)$  ( $a \in A, x \in \mathcal{M}(A, I)$ ) を満たす準同型である．さらに  $\mathcal{M}(A, I)$  と

$\varphi_{\mathcal{M}}$  が誘導する  $A$  加群の準同型  $\phi^*(\mathcal{M}(A, I)) \rightarrow \mathcal{M}(A, I)$  の組はプリズム  $(A, I)$  上の Breuil–Kisin 加群 (定義 2.6) である.

- $(R)_{\Delta}$  の任意の射  $(A, I) \rightarrow (B, J)$  に対し, 自然な  $B$  加群の準同型

$$\mathcal{M}(A, I) \otimes_A B \rightarrow \mathcal{M}(B, J)$$

は同型である.

**例 2.12** Anschütz–Le Bras によって  $\mathrm{Spec} R$  上の  $p$  可除群のなす圏から  $R$  上のプリズマティック Dieudonné クリスタルのなす圏への関手

$$\mathcal{G} \mapsto \mathcal{M}(\mathcal{G}) := \mathcal{E}xt_{(R)_{\Delta}}^1(\underline{\mathcal{G}^{\mathrm{op}}}, \mathcal{O}_{\Delta})$$

が構成されている. さらに Anschütz–Le Bras はこの関手が圏同値であることを証明している. この結果はより一般に quasisyntomic 環とよばれる環のクラスに対して適用できる. 詳細は論文 [1] を参照. 本稿の主結果の証明では, Anschütz–Le Bras が構成した関手を用いるが, 圏同値になるという事実を用いる必要はない. 注意 3.9 を参照.

### 3 主結果

まず冒頭でも述べた Scholze–Weinstein による  $p$  可除群の分類定理を述べる. 例 2.5 での記号を用いる.

**定理 3.1** (Scholze–Weinstein [16, Theorem 14.4.1])  $\mathrm{Spec} \mathcal{O}_C$  上の  $p$  可除群のなす圏はプリズム  $(W(\mathcal{O}_{C^b}), \mathrm{Ker} \theta)$  上の Breuil–Kisin 加群のなす圏と圏同値である.

本節では, 上の定理をプリズマティックコホモロジーを用いて証明できることを説明する. より正確には, 以下の結果が得られる. 引き続き例 2.5 での記号を用いる.

**定理 3.2** ([11]) 任意の自然数  $m \geq 1$  に対し,  $\mathrm{Spec} \mathcal{O}_C/p^m$  上の  $p$  可除群のなす圏はプリズム  $(W(\mathcal{O}_{C^b})/[p^b]^m, \mathrm{Ker} \theta)$  上の Breuil–Kisin 加群のなす圏と圏同値である.

**注意 3.3**  $m$  についての極限をとることで, 定理 3.1 は定理 3.2 から従うことが簡単にわかる. Scholze–Weinstein による定理 3.1 の元の証明は論文 [15] の結果を用いたものであり, リジッド幾何学が中心的な役割を果たしている.

**注意 3.4**  $\mathrm{Spec} \mathcal{O}_C/p$  上の  $p$  可除群のなす圏がプリズム  $(W(\mathcal{O}_{C^b})/[p^b], \mathrm{Ker} \theta)$  上の Breuil–Kisin 加群のなす圏と圏同値であることは Lau の結果 [13, Theorem 5.7] によって既に知られていた.

以下でプリズマティック Dieudonné クリスタルに対する変形理論を述べる.

**定義 3.5**  $M_0$  を  $(W(k), (p))$  上の Breuil–Kisin 加群とする.  $R \in \mathcal{C}_{W(k)}$  をとる.  $R$  上の  $M_0$  の変形とは  $R$  上のプリズマティック Dieudonné クリスタル  $\mathcal{M}$  (定義 2.11) と  $(W(k), (p))$  上の Breuil–Kisin 加群の同型  $\mathcal{M}(W(k), (p)) \simeq M_0$  の組である.

以下で説明するように  $R$  上の  $M_0$  の変形は多くの情報を持った対象である.

**注意 3.6**  $R$  上の  $M_0$  の変形  $\mathcal{M}$  をとる. 例 2.5 において  $\mathcal{O}_C$  が  $W(k)$  上の代数であるとする. このとき自然なプリズムの射

$$(W(k), (p)) \rightarrow (W(\mathcal{O}_{C^\flat})/[p^\flat], \text{Ker } \theta)$$

が存在する. この射によって  $M_0$  を  $(W(\mathcal{O}_{C^\flat})/[p^\flat], \text{Ker } \theta)$  上に基底変換したものを同じ記号  $M_0$  で表す. プリズム  $(A, I) := (W(\mathcal{O}_{C^\flat})/[p^\flat]^m, \text{Ker } \theta)$  を考える. このとき  $A/I = \mathcal{O}_C/p^m$  に注意せよ.  $W(k)$  上の準同型  $g: R \rightarrow \mathcal{O}_C/p^m$  で  $R$  の極大イデアルを  $(p) \subset \mathcal{O}_C/p^m$  にうつすものの全体からなる集合を

$$\text{Hom}(R, \mathcal{O}_C/p^m)_e$$

とかく.  $g \in \text{Hom}(R, \mathcal{O}_C/p^m)_e$  が与えられると,  $((A, I), g) \in (R)_\Delta$  とみなせ,  $(A, I)$  上の Breuil–Kisin 加群  $\mathcal{M}(A, I)$  が得られる. この Breuil–Kisin 加群を  $\mathcal{M}_g := \mathcal{M}(A, I)$  とかく.  $\mathcal{M}_g$  は自然に  $M_0$  の変形とみなせる. つまり自然な射  $(W(\mathcal{O}_{C^\flat})/[p^\flat]^m, \text{Ker } \theta) \rightarrow (W(\mathcal{O}_{C^\flat})/[p^\flat], \text{Ker } \theta)$  による  $\mathcal{M}_g$  の基底変換が  $M_0$  と自然に同型である. 以上から  $g \mapsto \mathcal{M}_g$  という構成によって集合の写像

$$\text{ev}_{\mathcal{M}}: \text{Hom}(R, \mathcal{O}_C/p^m)_e \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (A, I) \text{ 上の Breuil–Kisin 加群で} \\ M_0 \text{ の変形であるものの同型類} \end{array} \right\}$$

が得られる.

以下の定理が論文 [11] で得られたプリズマティック Dieudonné クリスタルの変形理論についての主結果であり, 普遍変形の存在とその性質を記述するものである.

**定理 3.7** ([11])  $M_0$  を  $(W(k), (p))$  上の Breuil–Kisin 加群とする. このとき, 以下の性質を持つ  $R^{\text{univ}} := W(k)[[t_1, \dots, t_d]]$  上の  $M_0$  の変形  $\mathcal{M}^{\text{univ}}$  が存在する. ここで  $d$  は  $M_0$  から定まる 0 以上の整数である (注意 3.8 参照).

(1) 任意の  $R \in \mathcal{C}_{W(k)}$  に対して基底変換から誘導される写像

$$\text{Hom}(R^{\text{univ}}, R)_e \rightarrow \{ R \text{ 上の } M_0 \text{ の変形の同型類} \}, \quad h \mapsto h^*(\mathcal{M}^{\text{univ}})$$

は全単射である.

(2) 任意の  $W(k)$  上の  $\mathcal{O}_C$  と任意の  $m \geq 1$  に対して, 注意 3.6 での写像

$$\mathrm{ev}_{\mathcal{M}^{\mathrm{univ}}} : \mathrm{Hom}(R^{\mathrm{univ}}, \mathcal{O}_C/p^m)_e \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} (W(\mathcal{O}_{C^b})/[p^b]^m, \mathrm{Ker} \theta) \text{ 上の} \\ \text{Breuil-Kisin 加群で} \\ M_0 \text{ の変形であるものの同型類} \end{array} \right\}$$

は全単射である.

(3) 任意の  $R \in \mathcal{C}_{W(k)}$  をとる. Breuil-Kisin 型のプリズム  $(\mathfrak{S}, (\mathcal{E}))$  で  $R = \mathfrak{S}/\mathcal{E}$  となるものをとる (注意 2.10 参照). 任意の  $m \geq 1$  に対して例 2.4 でのプリズム  $(\mathfrak{S}_m, (\mathcal{E}))$  を考える. このとき, 注意 3.6 と同様にして定義される写像

$$\mathrm{ev}_{\mathcal{M}^{\mathrm{univ}}} : \mathrm{Hom}(R^{\mathrm{univ}}, R_m)_e \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} (\mathfrak{S}_m, (\mathcal{E})) \text{ 上の Breuil-Kisin 加群で} \\ M_0 \text{ の変形であるものの同型類} \end{array} \right\}$$

は全単射である. ここで  $R_m = \mathfrak{S}_m/\mathcal{E}$  であり  $R$  を極大イデアルの  $m$  乗で割ったものに等しい.

ただし  $\mathrm{Hom}(R^{\mathrm{univ}}, R)_e$  と  $\mathrm{Hom}(R^{\mathrm{univ}}, R_m)_e$  はそれぞれ局所的な  $W(k)$  上の準同型  $R^{\mathrm{univ}} \rightarrow R$ ,  $R^{\mathrm{univ}} \rightarrow R_m$  全体からなる集合である.

**注意 3.8**  $P^1 \subset \phi^*(M_0)/p\phi^*(M_0)$  を  $F_{M_0}$  から誘導される準同型  $\phi^*(M_0)/p\phi^*(M_0) \rightarrow M_0/pM_0$  の核とする. この部分空間  $P^1$  を  $M_0$  の **Hodge フィルトレーション** とよぶ.  $\phi^*(M_0)/p\phi^*(M_0)$  と  $P^1$  の  $k$  上のベクトル空間としての次元をそれぞれ  $n, s$  とおくと, 定理 3.7 において  $d = s(n-s)$  が成り立つ. 実際, 定理の証明では  $R^{\mathrm{univ}}$  を  $W(k)$  上の Grassmann 多様体  $\mathrm{Gr}(n, s)$  の適当な点における局所環の完備化とみなして  $\mathcal{M}^{\mathrm{univ}}$  を構成する.

定理 3.2 がどのようにして定理 3.7 から導かれるかを簡単に説明する. 詳細は [11, Section 6] を参照. まず, 注意 3.4 で述べた Lau の結果を用いることで, 定理 3.2 は以下の主張に帰着できることがわかる:  $\mathcal{G}_0$  を  $\mathrm{Spec} k$  上の  $p$  可除群とし,  $M_0$  を  $\mathcal{G}_0$  に付随する Dieudonné 加群とする.  $\mathcal{G}^{\mathrm{univ}}$  を  $\mathcal{G}_0$  の普遍変形とする ([10, Corollaire 4.8] 参照). このときプリズマティック Dieudonné クリスタル  $\mathcal{M}(\mathcal{G}^{\mathrm{univ}})$  (例 2.12 参照) は  $M_0$  の変形であり, 定理 3.7 で与えられる  $M_0$  の普遍変形  $\mathcal{M}^{\mathrm{univ}}$  と同型である. この主張は  $\mathcal{M}^{\mathrm{univ}}$  と  $\mathcal{M}(\mathcal{G}^{\mathrm{univ}})$  のそれぞれの「接空間でのふるまい」を比較することで証明できる.

**注意 3.9** 例 2.12 で述べたように, 任意の  $R \in \mathcal{C}_{W(k)}$  に対して関手  $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{M}(\mathcal{G})$  が  $\mathrm{Spec} R$  上の  $p$  可除群のなす圏から  $R$  上のプリズマティック Dieudonné クリスタルのなす圏への圏同値であることを Anschütz-Le Bras が証明した. この事実を用いると  $\mathcal{M}^{\mathrm{univ}}$  と  $\mathcal{M}(\mathcal{G}^{\mathrm{univ}})$  が同型であることはすぐにわかる. さらに, 定理 3.7 の (1) で述べた性質を持つ  $M_0$  の変形が存在することを, この事実と  $p$  可除群の変形理論の帰結として得ることもできる. しかし Anschütz-Le Bras の証明では Scholze-Weinstein による定理 3.1 が使われて

いることに注意されたい. 論文 [11] では定理 3.7 を  $p$  可除群を用いずに証明している. その結果として定理 3.1 の別証明が得られるのである.

**注意 3.10** より一般に, 論文 [11] では任意の  $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}_p$  上の簡約群  $G$  とその minuscule な余指標  $\mu$  に対して, 定理 3.7 と同じ主張が**プリズマティック  $G$ - $\mu$ -ディスプレイ** (prismatic  $G$ - $\mu$ -display) とよばれる対象について成立することを証明している. その応用として, 不分岐な局所志村データに付随する局所志村多様体の整モデルが形式的に滑らか (formally smooth) であることを証明した. より正確な主張及び先行研究については [11, Section 5] を参照. この事実は Pappas–Rapoport によって予想されていた ([14, Conjecture 3.3.5]).

プリズマティック  $G$ - $\mu$ -ディスプレイは Drinfeld, Bhatt–Lurie によって独立に導入された**プリズマティック  $F$ -ゲージ** (prismatic  $F$ -gauge) とよばれる概念 ([9], [3], [4], [2] など を参照) と深く関係している. これについての詳細は論文 [12] を参照されたい.

## 4 定理 3.7 の証明について

最後に定理 3.7 の証明について簡単に説明する. 証明の詳細は [11, Section 4] を参照. 以下の定理が本質的に用いられる. この定理は  $R$  の次元が 1 以下の場合は [1, Theorem 5.12] で証明されており, 一般の場合は論文 [12] で証明されている.

**定理 4.1** ([1, Theorem 5.12], [12]) 任意の  $R \in \mathcal{C}_{W(k)}$  と, Breuil–Kisin 型のプリズム  $(\mathfrak{S}, (\mathcal{E}))$  で  $R = \mathfrak{S}/\mathcal{E}$  となるものをとる. このとき対応  $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}(\mathfrak{S}, (\mathcal{E}))$  によって  $R$  上のプリズマティック Dieudonné クリスタルのなす圏と  $(\mathfrak{S}, (\mathcal{E}))$  上の Breuil–Kisin 加群のなす圏が圏同値となる.

Breuil–Kisin 型のプリズム

$$(\mathfrak{S}^{\mathrm{univ}}, (\mathcal{E}^{\mathrm{univ}})) := (W[[t_1, \dots, t_{d+1}]], (p - t_{d+1}))$$

を考える.  $t_{d+1}$  を  $p$  にうつすことで自然な同型  $\mathfrak{S}^{\mathrm{univ}}/\mathcal{E}^{\mathrm{univ}} \simeq R^{\mathrm{univ}}$  が得られる. 定理 4.1 より  $M_0$  の  $R^{\mathrm{univ}}$  上の変形を与えることと,  $(\mathfrak{S}^{\mathrm{univ}}, (\mathcal{E}^{\mathrm{univ}}))$  上の Breuil–Kisin 加群で  $M_0$  の変形であるものを与えることは同値である. 実際には, Breuil–Kisin 加群としての変形を与えることの方が実用上ずっと簡単である. 以降では  $M_0$  の  $(\mathfrak{S}^{\mathrm{univ}}, (\mathcal{E}^{\mathrm{univ}}))$  上の Breuil–Kisin 加群としての変形  $M$  で, 対応する  $R^{\mathrm{univ}}$  上の変形が定理 3.7 の条件を満たすものをどのように構成するかを説明する.

構成の鍵となるのは Breuil–Kisin 加群に対する **Grothendieck–Messing 変形理論** である.  $(A_m, I_m) := (\mathfrak{S}_m, (\mathcal{E}))$  または  $(A_m, I_m) := (W(\mathcal{O}_{C^b})/[p^b]^m, \mathrm{Ker} \theta)$  とおく.  $M'$  を  $(A_m, I_m)$  上の Breuil–Kisin 加群とする. このとき Grothendieck–Messing 変形理論により,  $M'$  の  $(A_{m+1}, I_{m+1})$  上への変形を与えることと,  $M'$  の Hodge フィルトレーション

の  $A_{m+1}/I_{m+1}$  上への持ち上げを与えることが同値となる．詳細は [11, Section 3] を参照．この事実を用いることで  $M$  の候補を見つけることができる．

どのように定理 3.7 の (1), (2), (3) を確認するのかを説明する．論理の順番としては, (2), (3), (1) の順に証明する．より正確には, (2) の写像が全単射であることを証明する際に, 集合としての全単射であるということだけではなく, ある種の線形性を満たすことも証明する．この議論では  $\mathcal{O}_C$  が十分多くの  $p$  乗根を持つことが本質的に使われる．この (2) よりも精密な主張から (3) が自動的に導かれる．最後に (1) は (3) と定理 4.1 から導かれる．

## 謝辞

「代数的整数論とその周辺 2023」にて講演の機会を与えてくださった千田雅隆先生, 三枝洋一先生, 甲斐亘先生に感謝を申し上げます．

## 参考文献

- [1] J. Anschütz and A.-C. Le Bras. Prismatic Dieudonné theory. *Forum Math. Pi*, 11:Paper No. e2, 92, 2023.
- [2] B. Bhatt. Prismatic  $F$ -gauges, 2022.  
<https://www.math.ias.edu/~bhatt/teaching/mat549f22/lectures.pdf>.
- [3] B. Bhatt and J. Lurie. Absolute prismatic cohomology, 2022. [arXiv:2201.06120](https://arxiv.org/abs/2201.06120).
- [4] B. Bhatt and J. Lurie. The prismatization of  $p$ -adic formal schemes, 2022. [arXiv:2201.06124](https://arxiv.org/abs/2201.06124).
- [5] B. Bhatt, M. Morrow, and P. Scholze. Integral  $p$ -adic Hodge theory. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 128:219–397, 2018.
- [6] B. Bhatt and P. Scholze. Prisms and prismatic cohomology. *Ann. of Math. (2)*, 196(3):1135–1275, 2022.
- [7] B. Bhatt and P. Scholze. Prismatic  $F$ -crystals and crystalline Galois representations. *Camb. J. Math.*, 11(2):507–562, 2023.
- [8] K. Česnavičius and P. Scholze. Purity for flat cohomology. *Ann. of Math. (2)*, 199(1):51–180, 2024.
- [9] V. Drinfeld. Prismatization, 2022. [arXiv:2005.04746](https://arxiv.org/abs/2005.04746).
- [10] L. Illusie. Déformations de groupes de Barsotti-Tate (d’après A. Grothendieck). *Astérisque*, (127):151–198, 1985. Seminar on arithmetic bundles: the Mordell conjecture (Paris, 1983/84).

- [11] K. Ito. Deformation theory for prismatic  $G$ -displays, 2023. [arXiv:2306.05361](#).
- [12] K. Ito. Prismatic  $G$ -displays and descent theory, 2023. [arXiv:2303.15814](#).
- [13] E. Lau. Dieudonné theory over semiperfect rings and perfectoid rings. *Compos. Math.*, 154(9):1974–2004, 2018.
- [14] G. Pappas and M. Rapoport.  $p$ -adic shtukas and the theory of global and local Shimura varieties. *Camb. J. Math.*, 12(1):1–164, 2024.
- [15] P. Scholze and J. Weinstein. Moduli of  $p$ -divisible groups. *Camb. J. Math.*, 1(2):145–237, 2013.
- [16] P. Scholze and J. Weinstein. *Berkeley lectures on  $p$ -adic geometry*, Vol. 389 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2020.