

微分方程式のモジュライと変形

東大・理 岩崎克則 K. Iwasaki

今日の講演のテーマは、幾何的に申しますと、任意種数の閉リーマン面上の、あるクラスの Fuchs 型射影接続のモジュライと変形を論じることです。

つまり Riemann 面上のあるクラスの Fuchs 型射影接続のモジュライ空間を構成して、その解析空間、あるいは複素多様体としての幾何学的性質を調べます。

更に考えている connections のモノドロミー保存変形をシンプレクティック幾何的な見地から調べます。また connections のモジュライ空間の Poisson 構造についても考えます。

一般に、数理解析において興味の対象となる非線型微分方程式は、何らかの意味での“線型微分方程式”の変形を記述する力学系の可積分条件として与えられます。

たとえばスペクトル保存変形とソリトン方程式、モノドロミー保存変形と Painlevé 方程式や Schlesinger 系との関係です。また格子模型と Yang-Baxter 方程式との関連もあります。

また広い意味での“線型微分方程式”の変形を考える訳ですから、そもそも線型微分方程式のモジュライを考察して、その上の力学系を考察するという順序になります。

たとえば最も一般的なスペクトル保存変形を考察する時には、“線型微分方程式”としては、1次元擬微分作用素を考えることになり、擬微分作用素のモジュライとして無限次元 Grassmannian 多様体があらわれます。

話をモノドロミー保存変形に限りましょう。

御存知かどうか分かりませんが、解析的な線型微分方程式のモノドロミー保存変形は、最近20年間の発展とともに古い歴史を持っています。

実際それは Riemann に遡ることができます。私には正確に Riemann が何を考えていたのかは分かりませんが、Riemann はモノドロミー保存変形を考えることによって、Abel 関数や theta 関数を一般化する夢を持っていたということです。

τ -関数の理論などが現われて、このような思想が実現されてきたのですが、それは最近の話で、歴史を続けましょう。

Riemann の後、射影直線上の線型常微分方程式のモノドロミー保存変形が数学的にきちんとした形で初めて論じられたのは、今世紀の初頭で、息子の Fuchs, Schlesinger, Garnier 達の仕事でした。

最近では良く知られるようになった一連の Painlevé 方程式もモノドロミー保存変形とは深いつながりがあります。

70年代の初めから、現在駒場の岡本和夫先生は、Painlevé 方程式やモノドロミー保存変形について、独り研究されていましたが、爆発的に発展したのは、70年代の中頃ソリトン理論や格子模型の理論や holonomic quantum field theory などの数理物理学との予期しない関連が明らかになってからです。

たとえば Ising 模型の correlation function が、格子の

極限移行のあとで Painlevé transcendent を使って書けたり。また極く最近 ストリング理論で Painlevé transcendent が現われたりという状況です。

モノドロミー保存変形について申しあげると、80年代の初め頃、射影直線上の一階常微分方程式系に対して Stokes 現象を含めた広い意味でのモノドロミー保存変形の理論と τ -関数の理論が三輪・神保・上野さんたちによって作られました。

また、やはり射影直線上で二階常微分方程式のモノドロミー保存変形を考えることにより、Painlevé 方程式の多変数版である Garnier 系が得られます。これはある種の Hamilton 系で、岡本・木村弘信両氏により詳しく研究されています。

代数幾何の梅村さんによると、“退化した” Garnier 系というものがある。theta 関数との関連で重要なのだそうです。“退化した”というのは、どういう意味かということ。そもそも Garnier 系はあるアフィン空間でパラメータ付けされていて、そのパラメータ空間にはアフィン・ワイル群が働いています。その基本領域の特別な点に対応する Garnier 系を“退化した” Garnier 系と呼ぶわけです。

先の学会の時に梅村さんに聞いた話ですと、今日本に来ている Cartier は、別の見地から退化した Garnier 系に到ったということです。来週の月曜日から熊本で Cartier を囲む研究集会があるので、どういう話か聞いて来たいと思っています。

今回お話をさせて頂くのは, genus が 0 という特別の場合に, 先に申した Garnier 系を導くような変形理論のお話しです。

荒くいいますと,

M : closed Riemann surface of genus $g \geq 0$

上の Schrödinger 型微分作用素

$$L(Q) = -\frac{d^2}{dx^2} + Q(x) \quad \text{in loc. coord. expression}$$

のモジュライと変形を考えるということです。

局所的な係数 $Q(x)$ は 極を持って 構いません。ただし、目下のところ、 $L(Q)$ は Fuchs 型という条件の下で考えます。

K : canonical line bundle over M

ξ : a holomorphic line bundle over M

としますと、一般に M 上の 2 階線型微分作用素は

$$L: \mathcal{M}(\xi) \longrightarrow \mathcal{M}(\xi \otimes K^{\otimes 2})$$

と考えられますが、今考えている Schrödinger 型作用素は一階微分の項がないという特別な作用素ですから、そのような作用素が乗る line bundle ξ は一般ではいけません。当然 topological constraint が必要です。

Topological constraints on ξ

$\exists$ S-型作用素 on $\xi \iff$

$$\begin{aligned} H^2(M, \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z} \\ c_1(\xi) &= 1-g \end{aligned}$$

以下 line bundle ξ は、この条件を満たすものをひとつ固定します。また以後、単に微分作用素と

いえば、先に考えたような Schrödinger 型作用素を意味するものとしてします。

ここで terminology をはっきりさせる為に、ほとんどの人はよく御存知でしょうが、Fuchs 型方程式の初等事項を復習しましょう。

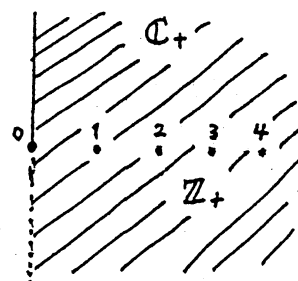
$$(\star) \quad \left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + Q(x) \right\} f = 0 \quad \text{at } x=0$$

$$1) \ x=0 : \text{reg. sing. pt.} \Leftrightarrow Q(x) \in x^{-2} \mathbb{C}\{x\}$$

$$2) \text{ 特性指数 } \lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \theta)$$

i.e. θ : 特性指数の差 $\in \mathbb{C}_+$

が定義されて、 $(\star)$ の独立な local solutions は次の形：



$$(i) \ \theta \notin \mathbb{Z}_+ \Rightarrow f_{\pm}(x) = x^{\lambda_{\pm}} g_{\pm}(x)$$

$$(ii) \ \theta \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow f_+(x) = x^{\lambda_+} g_+(x)$$

$$f_-(x) = x^{\lambda_-} g_-(x) + x^{\lambda_+} \log x \cdot h_+(x)$$

但し、

$$g_{\pm}(x), h_+(x) \in \mathbb{C}\{x\}$$

Classification of reg. sing. pts

$$\begin{array}{l} \text{reg. sing.} \left\{ \begin{array}{l} \text{generic} \Leftrightarrow (i) \\ \text{nongeneric} \left\{ \begin{array}{l} \text{logarithmic} \Leftrightarrow (ii) \text{ かつ } h_+(x) \neq 0 \\ \text{nonlogarithmic} \Leftrightarrow (ii) \text{ かつ } h_+(x) \equiv 0 \end{array} \right. \\ \Downarrow \\ (ii) \end{array} \right. \\ \parallel \\ \text{apparent 見かけ} \end{array}$$

apparent というのは、次のような意味合いから来ています。

微分方程式の *solution sheaf* は $M \setminus \{\text{sing. pts}\}$ の基本群の線型表現を定め、それは更に *projective monodromy* 表現を定めます:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(M \setminus \{\text{sing. pts}\}) & \xrightarrow{\text{LMR}} & \text{SL}(2, \mathbb{C}) \\ & \searrow \text{PMR} & \downarrow \\ & & \text{PSL}(2, \mathbb{C}) = \text{SL}(2, \mathbb{C}) / \text{中心} \end{array}$$

このとき *apparent singular point* は *projective monodromy* に何の効果も及ぼしません。即ち PMR は、表現

$$\pi_1(M \setminus \{\text{app. 以外の sing.}\}) \xrightarrow{\text{PMR}} \text{PSL}(2, \mathbb{C})$$

と見なせるのです。このため 見かけ = *apparent* と申します。

重要なことは、次が成り立つことです。

Lemma

$\theta \in \mathbb{Z}_+, \geq 2$ at an app. sing. pt.

そこで $\theta = 2$ なる app. sing. pt. を基底状態 (of ground state), $\theta > 2$ なる app. sing. pt. を励起状態 (of excited state) と呼ぶことにします。

$$\text{--- app. sing. pt.} \begin{cases} \text{of ground state} \Leftrightarrow \theta = 2 \\ \text{of excited state} \Leftrightarrow \theta > 2 \end{cases}$$

今回の話では、*generic singular point* と *apparent singular point of ground state* だけが出て来て、それ以外の *regular singular point* は出て来ません。

Notation をひとつ与えておきます。微分作用素 L に対して.

Notation

$m := \#$ of generic sing. pts of L

$n := \#$ of apparent "

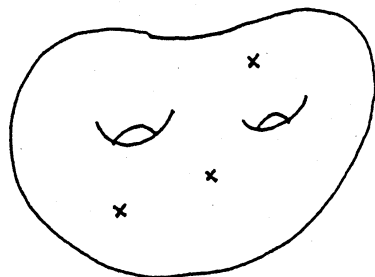
m と n が一般でも、ある程度話ができるのですが、次の仮定を設けると、非常に美しい変形理論ができます。

仮定 (#)

$$n = m + 3g - 3$$

$= m$ 個の穴あき genus $= g$ の

Riemann 面のモジュライ数



さて、我々が考える微分作用素のクラスは次のものです:

$$g=2, m=3$$

$$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m) \in (\mathbb{C}_+ \setminus \mathbb{Z}_+)^m : \text{fixed}$$

に対して,

$$E(m; \theta) = \left\{ \begin{array}{l} \text{diff. operators } L \text{ with } m+n \text{ ordered reg. sing. pts} \\ \text{s.t. (i) for } j=1, \dots, m, \text{ the } j\text{th singular pt has} \\ \text{the char. exponents } \frac{1}{2}(1 \pm \theta_j), \text{ and (ii) the last} \\ n \text{ singular points are apparent and of ground$$

とおき、更に

$$B(l) := \{ \text{順序付の } l \text{ 個の点 in } M \text{ の組} \}$$

とおきますと、次の自然な射影があります。

$$\begin{array}{ccc}
 \pi: E(m; \theta) & \xrightarrow{\quad} & B(m+n) \\
 \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\
 L & \xrightarrow{\quad} & W = (p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_n) \\
 & & \vdots \\
 & & \text{ordered regular points of } L.
 \end{array}$$

このとき, Riemann-Roch や Kodaira-Spencer, local analytic geometry の elements を Fuchs 型微分方程式の基本事項, 例えば Fuchs' criterion や Frobenius の方法などと一緒にゴチャゴチャやりますと, 次の定理が得られます。

定理 1

$E(m; \theta)$: a natural analytic space structure s.t.

(i) pure dim = $m + 2n$,

(ii) π : holo. surjection.

次に

$$M^m \times M^n \supset B(m+n) \xrightarrow{p} B(m) \subset M^m$$

proj. into the first m components

とすると, diagram

$$\begin{array}{ccc}
 & E(m; \theta) & \\
 \pi \swarrow & & \downarrow \omega \\
 B(m+n) & & B(m) \\
 p \searrow & & \\
 & B(m) &
 \end{array}$$

全部 surj.

を得ます。そこで

$$E(P; \theta) := W\text{-fiber over } P \in B(m)$$

とおくと 次の定理を得ます。

定理 2

$$\forall P \in B(m), \quad E(P; \theta) : \text{analytic subspace of } E(m; \theta) \\ \text{pure dimension} = 2n$$

次元が even であることは、後に symplectic geometry との関連で重要です。

定義

$$L \in E(m; \theta) : (ir)reducible \Leftrightarrow L \text{ の monodromy 表現が } (ir)reducible$$

reducible な作用素は moduli 空間の中ではいやらしいものなので、次の定理で安心します。

定理 3

- (i) $E(m; \theta)_{red}$ (resp. $E(P; \theta)_{red}$) : analytic subspace of $E(m; \theta)$ (" $E(P; \theta)$) of $\text{codim} \geq n-1$.
- (ii) $E(m; \theta)_{red} = \emptyset$ for θ : Zariski open

ただし、注意して欲しいのは、 $E(m; \theta)_{irr}$ は smooth かというと、そうではなくて、実は一般に singularities を含みます。どこに singularities があるか？ という問題は、実は今回の話の核心のひとつです。

次に、 m 個の穴付き Riemann 面の基本群の射影表現のモジュライ空間について考えましょう。

$G := \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ とおきます。

各 $P = (P_1, \dots, P_m) \in B(m)$ に対して

$$R(P)_{\mathrm{irr}} := \mathrm{Hom}(\pi_1(M \setminus \{P_1, \dots, P_m\}), G)_{\mathrm{irr}} / \mathrm{Inn} G$$

とおき、これに自然な位相を入れます。

自然な位相というのは、 π_1 を *discrete 群*

既約表現全体

↑
G の内部自己
同型群

G を Lie 群として $\mathrm{Hom}(\pi_1, G)_{\mathrm{irr}}$ に *compact-open top.*

を入れ、 $\mathrm{Inn} G$ で割る所では *quotient topology* に移

行します。このとき $R(P)_{\mathrm{irr}}$ は $m + 2n$ 次元複素多様体

としての自然な構造が入ります。そこで

$$R(P; \theta)_{\mathrm{irr}} := \left\{ \begin{array}{l} \text{the circuit matrix (mod } \pm I) \text{ at } p_j \text{ induced} \\ s \in R(P)_{\mathrm{irr}} ; \text{ by } s \text{ has eigenvalues } \exp(\pm \pi \sqrt{-1} \theta_j) \\ \text{(mod } \pm 1), \text{ for } j = 1, \dots, m \end{array} \right\}$$

とおきますと、

定理 4

$\forall P \in B(m), R(P; \theta)_{\mathrm{irr}} : \text{complex manifold of dim} = 2n$
admits natural symplectic str.

この symplectic structure は Local system 係数の cohomology に対する Poincaré - Lefschetz duality から来るものですが、時間があれば後で触れることにして先に進みましょう。

次の disjoint union を考えます:

$$R(m; \theta)_{\text{irr}} = \coprod_{P \in B(m)} R(P; \theta)_{\text{irr}}$$

これは自然に $B(m)$ 上の local system です。基点 $P^0 \in B(m)$ における characteristic homomorphism は, braid 群の自然な作用で与えられる:

$$B_n(m) := \pi_1(B(m), P^0) \longrightarrow \text{Aut}(R(P^0; \theta)_{\text{irr}})$$

従って 定理 というほどでないのですが。

定理 5

$R(m; \theta)_{\text{irr}}$: $B(m)$ 上の 局所系, 特に complex mfd
of $\dim = m + 2n$

以上の準備の下にやっと projective monodromy map が定義できます:

定義

$$\begin{array}{ccc} \text{PM} : E(m; \theta)_{\text{irr}} & \longrightarrow & R(m; \theta)_{\text{irr}} \\ \omega \downarrow & & \downarrow \omega \\ L & \longrightarrow & L \text{ の 射影モノドロミー表現類} \end{array}$$

これは holomorphic map です。

この時、次の可換図式を得ます。

$$\begin{array}{ccc} & E(m; \theta)_{\text{irr}} & \xrightarrow{\text{PM}} R(m; \theta)_{\text{irr}} \\ \pi \swarrow & \downarrow \omega & \searrow \text{loc. system} \\ B(m+n) & & \\ \downarrow \rho & & \downarrow \omega \\ & B(m) & \end{array} \quad \text{全部 surj.}$$

ところで、 $E(m; \theta)_{\text{irr}}$ は必ずしも smooth でなくて、analytic space であることが分っているだけだから

「どこに singularities があるの？」

と尋ねてみるのは自然です。

それに対する賢い解答は次のような line bundle の変形族を考えることです：

$$\xi(\mathbf{r}) := K^{\otimes 2} \otimes [P_1 + \cdots + P_m - (\theta_1 + \cdots + \theta_n)]$$

$$\mathbf{r} = (P_1, \dots, P_m, \theta_1, \dots, \theta_n) \in B(m+n).$$

何故これを考えるかを説明したすと時間がなくなるので、認めて下さい。仮定 (#) $n = m + 3g - 3$ により

$$c_1(\xi(\mathbf{r})) = g - 1$$

従って Riemann-Roch の定理は次の形となります：

$$(FA) \quad \dim H^0(M, \mathcal{O}(\xi(\mathbf{r}))) = \dim H^1(M, \mathcal{O}(\xi(\mathbf{r})))$$

これを Fredholm Alternative と呼ぶことにします。一般の $\mathbf{r}$ に対しては (FA) の両辺は 0 ですが、稀に jump する点があるかもしれません。cohomology の jump する点を $A(m)$ とおきましょう：

$$A(m) := \{ \mathbf{r} \in B(m+n) ; \dim H^0(M, \mathcal{O}(\xi(\mathbf{r}))) > 0 \},$$

$$X(m) := B(m+n) \setminus A(m).$$

このとき

補題

$X(m)$: Zariski open in $B(m+n)$ s.t.

$p: B(m+n) \supset X(m) \rightarrow B(m)$: surj.

$g=0$ の時 $A(m) = \emptyset$, $g=1$ の時も $A(m)$ は具体的に書き表わせます。

今後 $E(m; \emptyset)_{\text{irr}}$ のかわりに

$$\mathcal{E}(m; \emptyset)_{\text{irr}} := \pi^{-1}(X(m)) \subset E(m; \emptyset)_{\text{irr}}$$

を考えます。この時 前の可換図式を修正して

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{E}(m; \emptyset)_{\text{irr}} & \xrightarrow{\text{PM}} R(m; \emptyset)_{\text{irr}} \\
 \pi \swarrow & \downarrow \omega & \searrow \text{loc. sys.} \\
 X(m) & & \\
 \downarrow p & & \\
 & B(m) &
 \end{array}$$

すべて surj.

が得られます。

筆記体の Σ の上では, PM は綺麗に振舞います。

定理 6

$\text{PM}: \mathcal{E}_{\text{irr}} \xrightarrow{\text{PM}} R_{\text{irr}}$ は locally biholomorphic

特に $\mathcal{E}_{\text{irr}}$ は complex manifold.

証明の鍵は meromorphic connections に対するある種の gauge equivalence relation と cohomology に対する semi-continuity theorem です。

定義

局所系 $R_{\text{irr}} \rightarrow B$ の局所水平切断が定義する R_{irr} 上の foliation を local biholo. PM で引戻して得られる $\mathcal{E}_{\text{irr}}$ 上の foliation を monodromy preserving foliation とよぶ: MPF.

ところで、 $\mathcal{E}(m; \theta)_{\text{irr}}$ ではなく、より広い $\mathcal{E} = \mathcal{E}(m; \theta)$ の構造を、別の見地からより詳しく調べることができます。それは、前に導入した *line bundles* の変形族 $\mathcal{E}(r)$ 、但し $r \in X = X(m)$ に associate した、ある種の Cousin 問題 を考えるという立場です。この立場に立て、たとえば次の定理を示すことができます:

定理 7

$\mathcal{E}$: admits a natural complex manifold structure s.t.

$\pi: \mathcal{E} \rightarrow X$: holo. affine b'dle of $\text{rk} = n$.

この complex str. は $\mathcal{E}_{\text{irr}}$ 上では前のものと一致する.

Cousin 問題 を考えるときに、前に述べた *Fredholm Alternative* が威力を発揮します。実際それは、Cousin 問題 の可解性と解の一意性が同値であるといっているからです:

$H^1 = 0 \iff \text{Cousin 問題の可解性}$

$H^0 = 0 \iff \quad \quad \quad \text{解の一意性}$

だいぶ時間がおしつまって参りましたから、ここで議論のワーフをして、いきなり

定理 8

$\exists$ closed 2-form Ω on $\mathcal{E}$ which determines a symplectic structure on each ω -fiber $\mathcal{E}(p; \theta)$ over $p \in B(m)$.

定理 9

The monodromy preserving foliation is an Ω -Lagrangian foliation on E_{irr} which is transverse to each W -fiber.

この transversality は monodromy 保存変形における変形パラメーターの空間として $B = B(m)$ がとれることを示している。空間 B の座標を用いて定理 9 の内容を微分方程式の形に書き下してみると、ある非線型方程式系が得られる。これが genus g に拡張した意味での Garnier 系である。

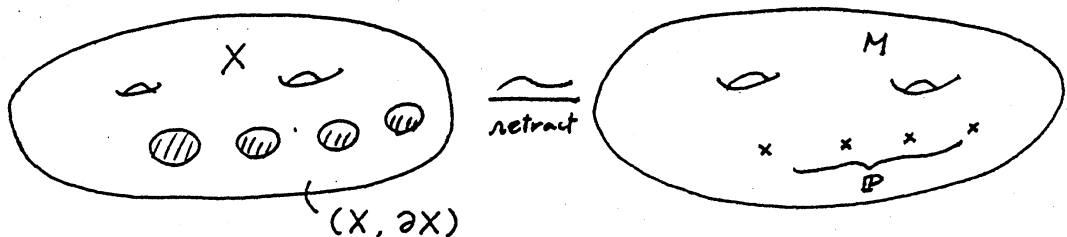
定理 10

E admits a Poisson structure.

ところで、projective monodromy map

$$PM: E_{\text{irr}} \rightarrow R_{\text{irr}}$$

があったが、 R_{irr} も Poisson manifold であった。こちらの方は簡単に説明できます: $P \in B(m)$, $\rho \in R(P)_{\text{irr}}$



$$\partial X = S^1 \amalg \cdots \amalg S^1 \quad (m \text{ 回})$$

P_g : principal b'dle associated to g over X

$L_g := P_g \times_{\text{Ad}} \text{Lie } G$: loc. sys. over X

$$T_{\mathcal{P}} R(\mathcal{P})_{\text{irr}} \cong \text{Ker} [H^1(X; L_{\mathcal{P}}) \xrightarrow[\text{restriction.}]{j^*} H^1(\partial X; L_{\mathcal{P}})]$$

と自然に同一視できますが、一方 local system $L_{\mathcal{P}}$ を付与された空間対 $(X, \partial X; L_{\mathcal{P}})$ の cohomology exact seq.

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H^0(\partial X; L_{\mathcal{P}}) &\xrightarrow{\delta^*} H^1(X, \partial X; L_{\mathcal{P}}) \xrightarrow{i^*} \\ &\rightarrow H^1(X, L_{\mathcal{P}}) \xrightarrow{j^*} H^1(\partial X; L_{\mathcal{P}}) \cdots \end{aligned}$$

により、

$$T_{\mathcal{P}} R(\mathcal{P})_{\text{irr}} \cong \frac{H^1(X, \partial X; L_{\mathcal{P}})}{\delta^* H^0(\partial X; L_{\mathcal{P}})}$$

もいえる。このとき Poincaré - Lefschetz duality :

$$H^1(X; L_{\mathcal{P}}) \otimes H^1(X, \partial X; L_{\mathcal{P}}) \rightarrow \mathbb{C}$$

は $T_{\mathcal{P}} R(\mathcal{P})_{\text{irr}}$ 上の skew-symmetric bilinear form を induce する。これにより 各 $R(\mathcal{P})_{\text{irr}}$ は almost symplectic manifold 又は symplectic manifold である。これから自然に $R(m)_{\text{irr}}$ は Poisson manifold. そこで

定理11

定理10の Poisson str. on Σ_{irr} は Poisson str. on R_{irr} の PM による pull-back に他ならない。

この定理からさまざまのことがわかるのですが、時間もすぎたのでこれで終わることにします。

REFERENCES

- [Ga] R. Garnier, Solution du probleme de Riemann pour les systemes differentiels lineaires du second ordre, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) 43 (1926) 177-307.
- [Go] W.M. Goldman, The symplectic nature of the fundamental groups of surfaces, Adv. in Math. 54 (1984) 200-225.
- [Gu] R. Gunning, Lecture on Riemann surfaces, Mathematical notes, No.2, Princeton University Press, Princeton, 1966.
 _____ Lecture on vectorbundles over Riemann surfaces, Mathematical notes, No.6, Princeton University Press, Princeton, 1967.
- [I] K. Iwasaki, Moduli and deformation for Fuchsian projective connections on a Riemann surface, University of Tokyo preprint series, 89-16 (1989).
 _____ Fuchsian moduli on a curve, - its Poisson structure and the Poincare-Lefschetz duality --, preprint.
- [JMU] M. Jimbo, T. Miwa and K. Ueno, Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients, I, -- General theory and - functions, Physica 2D (1981) 306-352.
- [KO] H. Kimura and K. Okamoto, On the polynomial Hamilton structure of the Garnier system, J. Math. Pures et Appl. 63 (1984) 129-146.
- [LM] P. Lieberman and C.M. Marle, Symplectic geometry and analytic mechanics, Reidel Publ. 1987.
- [O] K. Okamoto, Isomonodromic deformation and Paimleve equations, and the Garnier system, J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo, Sect IA, Math. 33 (1986) 575-618.