

ある種の対称デジタインについて

阪大 数基 野田隆三郎

次の parameter を持つ対称デジタインに関する二、三の話題について述べます。(以下、(*)型の対称デジタインという)。

$$(*) \quad (v, k, \lambda) = (4a^2, a(2a-1), a(a-1)).$$

(*)型の対称デジタインの存在と列和が一定であるような位数 v の Hadamard 行列の存在は同値である ([3] p206)。

$v > 2k$ であるような対称デジタインにおいて k が v に最も近いのは $v = 2k+1$ のとき、つまり Hadamard デジタインであるがとくに $v > 2k+1$ である k が v に近きものが(*)型の対称デジタインである。つまり次が成り立つ。

命題. 対称デジタイン (v, k, λ) において $v > 2k+1$ とすると $v \geq 2(k + \sqrt{m})$ (ただし $m = k - \lambda$) であってここで等号が成り立つと $a = \sqrt{m}$ の(*)型デジタインになる。

(*)型デジタインにはいろいろ話題が多くあてはまる人によ

いろいろな角度から研究されているようである。次にその二、三について解説する。

I. (*)型対称デバインの存在について

$a = 2^m$ の形の a に対しては常に存在することが知られている。最初に構成したのは P. K. Menon [4] のようである。この形のものはあと述べるように多くの面白い性質をもっていてきわめて興味深いデバインである（なお同じ a に対してデバインは一意とは限らない）。 a が 2 の中でなくとも a が偶数の場合は次の G. Szekeres の定理によりほとんど常に存在することが分る。

定理 (G. Szekeres [9])。位数 $4t$ の Hadamard 行列が存在すれば $a = 2t$ の (*)型デバインが存在する。

最後に a が奇数の時であるが存在が知られているのは $a = 3, 5$ の時だけである ([4], [8])。 $a = 3$ の時は二つ存在することが知られている。

II. 正則な自己同型群をもつ (*)型対称デバインについて

よく知られているように正則な自己同型群 H ($|H| = v$) と許す対称 (v, k, λ) デバインの存在と群 H に k 個の元よりな

2 等差集合の存在する n とは同値である。(I) で述べた (x) 型
 デュガインの例のうち $a = 2^m$ 及び $a = 3$ のもの (二つ) が $n = a$
 ような群等差集合より得られることが合っている。次の P. K.
 Menon の定理によりこのような例はこれから無限シリー
 ズで得られることが合る。

定理 (P. K. Menon [5]). $S_i \subseteq$ 群 H_i の等差集合とす
 る ($i = 1, 2$). $\bar{S}_i = H_i - S_i$, $S = (S_1, S_2) \cup (\bar{S}_1, \bar{S}_2)$ とお
 く。この時 S が直積の群 (H_1, H_2) の等差集合となるための
 必要十分条件は S_i が H_i の (x) 型の等差集合であることであ
 る。この時 S も (H_1, H_2) の (x) 型の等差集合となり S_i が a_i
 $= a_i$ ($i = 1, 2$) の (x) 型等差集合であれば S は $a = 4a_1a_2$ の (x)
 型等差集合となる。

なおこの方面では「巡回群には (x) 型の等差集合は存在しな
 いであろう」という Ryser の予想がある ([10] 参照)。

III. (x) 型対称デュガインの polarity について.

$a = 2^m$ の (x) 型対称デュガインは次のような二種の polarity と
 なっている

- (i). absolute point 一つもない。
- (ii). すべて n の $\frac{n}{2}$ 個が absolute point になる。

(以後上の (i) 及び (ii) の polarity を A_0 型 及び A_n 型 と呼ぶ).
 また次の A. Rudvalis の定理に注意する.

定理 (A. Rudvalis [7]).

(1). A_0 型の polarity を許す対称デザイン (v, k, λ) の存在
 と $\lambda = \mu$ をみたす強正則グラフ (v, k, λ, μ) の存在は同値
 である.

(2). A_n 型の polarity を許す対称デザイン (v, k, λ) の存在
 と $\lambda = \mu - 2$ をみたす強正則グラフ $(v, k-1, \lambda, \mu)$ の存在
 は同値である.

更にいずれの場合も グラフ の自己同型群はデザインの自
 己同型群と一致する.

(強正則グラフについては [1] 参照.)

この定理により $q = 2^m$ の $(*)$ 型デザインには定理にいう二
 つの (異なる) 強正則グラフが関連していることが分る. 実際
 このグラフは両方とも rank 3 群と自己同型群をもっている.
 (更にデザインの対称性は二重可移自己同型群を許している).
 $q = 3$ の時のデザインは二種類あるといつたが一方は A_0 型の
 polarity を他方は A_n 型の polarity を許している. いずれ
 も rank 3 自己同型群をもっている. 他 $(*)$ 型デザインでど
 うなっているかは興味深い問題であるが何も分っていない.

⑤ ④ A_0 型及び A_v 型の両方の polarity を持つ対称デザイン (v, k, λ) のみならず parameter 上の制約が Rudvalis [7] によって与えられているがこれはまだ不完全のようで
 ⑥ 型デザインはすべてこれとみたしている (Rudvalis は上の
 ような二重の polarity を持つ対称デザインは $q = 2^m$ の
 ⑥ 型に限るだろうと予想している)。

IV. System of linked symmetric designs について.

pairwise incidence relation が定義されている集合,
 $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_f$ 達の集まり $\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_f\}$ が次の (1),
 (2) をみたすときこれを system of linked symmetric designs
 という (P. J. Cameron [2] による)。

- (1) pair (Ω_i, Ω_j) は対称デザインとなる. ($1 \leq i, j \leq f$)
 (2) triple $(\Omega_i, \Omega_j, \Omega_k)$ に対し i, j, k だけで定まる次
 のような整数 t_{ij}^k, u_{ij}^k が存在する:

$a \in \Omega_i, b \in \Omega_j$ に対して

$$\# \{ c \in \Omega_k \mid c-a, c-b \} = \begin{cases} t_{ij}^k, & a-b \text{ の時} \\ u_{ij}^k, & \text{その他.} \end{cases}$$

(ここで $a-b$ は $a \neq b$ が incident であることを示す)。

要は上の t_{ij}^k, u_{ij}^k が i, j, k のとり方によらず一定であ

る時 homogeneous system ということにする. Wielandt 数
 が $\frac{1}{2}$ 以上であるような二重可移群の存在は system の存在と
 意味することには注意ある. どのような対称デザインが system
 を構成しうるかはよく知られていない. 筆者の知る限りでは
 system の存在が知られているのは $a = 2^m$ の対称デザインのみ
 のだけである.

定理 (16). $\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_f\}$ と各 (Ω_i, Ω_j) が (α)
 型対称デザインであるような homogeneous system とする.
 この時 $f \leq \frac{1}{2}v$ (但し $v = |\Omega_i|$) でここで等号が成り
 立つための必要十分条件は pair $(\Omega_1, \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \dots \cup \Omega_f)$
 が 3-デザインであることである.

$a = 2^m$ の時は上の定理で等号を達成する system の存在する
 ことが知られている. また $a = 2$ の時はこの 3-デザインに
 二重可移に働く (system の) 自己同型群が存在している.

参 考 文 献

- [1] H. Enomoto, 数理科学 121 (1973).
- [2] P. J. Cameron, Math. Z. 128, 1-14 (1972).

- [3] M. Hall, Combinatorial Theory.
- [4] P. K. Menon, Proc. Amer. Math. Soc. 11, 368-376.
(1960)
- [5] " " 13, 739-745.
(1962)
- [6] R. Noda, in preparation
- [7] A. Rudvalis, Math. Z. 120, 224-230 (1971)
- [8] E. Spence, J. Combinatorial Theory¹¹, 299-302 (1970)
- [9] G. Szekeres, J. Combinatorial Theory 6, 219-221 (1969)
- [10] K. Yamamoto, 数理解析研究所講義録 178.