

^4He II 2 流体モデルの微視的導出

分子科学研究所

鈴木 陽子

1 序

液体 ^4He は 2.17K で 2 次の相転移を起こし、転移点以下で超流動と呼ばれる特異な性質を示す。この現象を説明する確立された理論として現象論的な 2 流体モデルがある。一方、微視的な観点からは Bose 凝縮が本質的であることがわかっている。場の理論ではこれは対称性の自発的破れとしてとらえられる。

本稿では、対称性の自発的破れを議論する場合に有効な場の理論のルジャンドル変換を ^4He 粒子系に適用することにより、 ^4He 超流動現象をミクロなハミルトニアンに基づいて系統的に研究する。具体的には、Green 関数の生成汎関数 $W[J]$ を $J(x)$ からオーダーパラメーター ϕ (ここでは J に couple した ^4He の場の演算子 $\hat{\psi}^{(t)}$ の期待値) の関数 $\Gamma[\phi]$ へとルジャンドル変換を行い、特に 2 流体モデルのすべての流体力学方程式 [1] をミクロなレベルから導出する。この際、流体力学的極限 (エネルギー ω , 運動量 $k \rightarrow 0$) において、密度、密度流、エネルギー・運動量テンソルを含む Ward-高橋 (W-T) 恒等式を用いることによって微視的な Green 関数と巨視的な物理量とを結びあわせ、この関係を使って 2 流体モデルにおける流体力学方程式を導く。ただし、本稿では散逸の効果は考えず、空間・時間に対する変化が小さいときについて考える。

このような手続きの際に $W[J]$ よりも $\Gamma[\phi]$ をもとにして議論する方が以下の理由により便利である。

1. 自発的対称性の破れ (ここでは Bose 凝縮) が起こり $\phi \neq 0$ であるとき、Goldstone モードが現れ、種々の Green 関数に特異性をもたらす。一方、 $\Gamma[\phi]$ には、ルジャンドル変換の性質により、このような特異性は含まれない。このため、流体力学的極限では Γ やその微分は regular になる。(ただし、フォノン・モードによりおこる赤外での log 発散に対する議論は [2] にある。)
2. 2 流体モデルの流体力学方程式の微視的なアプローチは [3],[4] で行われている。前者は η -ensemble、後者は quasiaverage をもちいて Bose 凝縮を取り扱い、前者は超

変数	本稿	文献 [1]
superfluid velocity	$v_s^i = -v_{si}$	v_{si}
normal fluid velocity	$v_n^i = -v_{ni}$	v_{ni}
total density	mn	ρ
superfluid density	mn_s	ρ_s
normal part density	mn_n	ρ_n
mass flow	mj_i	j_i
momentum density	T_i^0	$-j_i$
momentum flow	T_i^j	$-\Pi_{ij}$
energy density	$\mathcal{E} = T_0^0 + \mu n$	E
energy flow	$j_{\epsilon i} = T_0^i + \mu j_i$	Q_i
chemical potential	$\tilde{\mu}$	$m\mu$
entropy density	s	ρs
pressure	P	p
energy density in the frame $\mathbf{v}_s = 0$	$\mathcal{E}_n^{(0)}$	E_0
energy density in the frame $\mathbf{v}_n = 0$	$\mathcal{E}_s^{(0)}$	$\dots$

表 1: 本稿と文献 [1] における記号の比較

流体の速度 $\mathbf{v}_s$ でテイラー展開をして、後者は $\mathbf{v}_s$ の full のオーダーで導出を行っている。そして、[3] における η 、[4] における ν が本稿における probe J に対応している。しかし、[3],[4] とも $W[J]$ から $\Gamma[\phi]$ へのルジャンドル変換に相当する手続きを行わず、 $W[J]$ のまま議論してしまっているため、 $J=0$ において自発的対称性の破れがおこっているか否かについての議論が曖昧になってしまっている。一方、 $\Gamma[\phi]$ をもとにした議論ではこの問題を回避することができる。

3. $W[J]$ は J の多価関数であるため、 $\phi[J=0] \neq 0$ なる $\phi^{(0)}$ を探すためには摂動の無限次まで足しあげなければならない。この点、 $\Gamma[\phi]$ は ϕ の 1 価関数であり、 $J=0$ としても有限次まで足しあげれば、 $\Gamma[\phi]$ の停留を求めることにより $J=0$ のもとでの $\phi^{(0)} \neq 0$ を求めることができる。

なお、 $\Gamma[\phi]$ を用いたアプローチに当たるものに [5] がある。ここでは、Bogoliubov 変

換を用いて Bogoliubov 近似 (loop 展開における 1-loop 近似) 内で 2 流体モデルの流体力学方程式を導出している。

$\Gamma[\phi]$ の停留解として、超流動の解が存在することを示せば、この解を用いて超流動の存在下での物理量を求めることができる。これらの物理量を、 ϕ の勾配を用いて定義される v_s を用いて表し、それによって流体力学方程式が得られることを示す。

なお、本稿に用いられた記号と文献 [1] において用いられている記号との比較を表 1 に記した。

本稿は、枚数の都合上、結果の導出過程や議論などがかなり省略されていることをあらかじめお断りしておく。(詳細は [6, 7])

2 非平衡母関数

2.1 平衡系

オーダーパラメーター ϕ の関数として $\Gamma_\beta[\phi]$ を導入して議論する。 ϕ を

$$\begin{aligned}\phi &= \langle \hat{O} \rangle = \text{Tr} \rho_I \hat{O}, \\ \rho_I &= e^{-\beta \hat{H}} / \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}}, \quad (\text{分配関数 } Z = \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}})\end{aligned}\tag{2.1}$$

と定義したとき (2.1) に対する母関数 $W_\beta[J]$ は

$$\exp\left(\frac{1}{\hbar} W_\beta[J]\right) = \text{Tr} \exp(-\beta \hat{H}_J)$$

と定義される。但し、 $\hat{H}_J = \hat{H} - J\hat{O}$ で、 $\hat{H}$ は系を表すハミルトニアンであり、 J が $\hat{O}$ に対する probe になっている。最後に $J = 0$ とし、元の理論にもどす。関数 $W_\beta[J]$ は J を変数とする自由エネルギーにあたっている。ここで下のようにルジャンドル変換を行うことにより、 ϕ の関数 $\Gamma[\phi]$ を導入する:

$$\begin{aligned}\Gamma_\beta[\phi] &= W_\beta[J] - \beta \hbar J \cdot \phi, \\ \beta \hbar \phi[J] &= \frac{\partial W_\beta}{\partial J}.\end{aligned}$$

この $\Gamma_\beta[\phi]$ が ϕ を変数とする自由エネルギーに相当する。ここで、 $J = 0$ の条件をルジャンドル変換の恒等式に代入することによって

$$\frac{1}{\beta\hbar} \frac{\partial \Gamma_\beta}{\partial \phi} = -J = 0 \quad (2.2)$$

を得る。(2.2) の解 $\phi^{(0)} = \langle \hat{O} \rangle$ が実際に実現されるオーダーパラメーターであり、即ち、 $\Gamma_\beta[\phi]$ の極小点を調べることによって Bose 凝縮について考察することができる。このように $W_\beta[J], \Gamma_\beta[\phi]$ は自由エネルギーの意味を持つが、この他に相関関数の母関数の役割もなすことが知られている。probe J 、オーダーパラメーター ϕ を 2 変数に拡張することにより、非平衡母関数 $W[J_1, J_2], \Gamma[\phi_1, \phi_2]$ を定義することができ、これが dynamical な現象を議論するときの母関数になっている。

2.2 非平衡母関数の定義

まず非平衡母関数の定義を行なう。有限温度で演算子 $\hat{\phi}(\mathbf{x})$ の時刻 t での期待値は

$$\langle \hat{\phi}(\mathbf{x}) \rangle_t = \text{Tr} \rho_I U^\dagger(t, t_I) \hat{\phi}(\mathbf{x}) U(t, t_I) \quad (2.3)$$

である。ここで ρ_I は初期時刻 t_I での状態密度を表わし、 $U(t, t_I)$ は系のハミルトニアンを $H(t)$ としたときの時間発展演算子

$$U(t, t_I) = \text{T exp} \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_I}^t dt' \hat{H}(t') \right) \quad (2.4)$$

である。(2.3) に対する母関数 W を probe を 2 種類に拡張することにより導入する

$$\exp \frac{i}{\hbar} W[J_1, J_2] = \text{Tr} \rho_I U_{J_2}^\dagger(\infty, t_I) U_{J_1}(\infty, t_I), \quad (2.5)$$

$$U_{J_\alpha}(t, t_I) = \text{T exp} \left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_I}^t dt' \hat{H}(t') - \int_{t_I}^t d^4x J_\alpha(x) \hat{\phi}(\mathbf{x}) \right) \quad (\alpha = 1, 2).$$

$J_1 = J_2$ では $W = 0$ になるので 2 種類の probe J_1, J_2 が必要になるのである。ここで添字 $\alpha = 1$ は行きの time path $t_I \rightarrow \infty$ を、 $\alpha = 2$ は帰りの time path $\infty \rightarrow t_I$ を意味している。 J_1, J_2 は最後に $J_1 = J_2 = 0$ とし、元の理論に戻すものとする。 J_1, J_2 について汎関数ルジャンドル変換を行ない $\Gamma[\phi_1, \phi_2]$ を定義する。

$$\Gamma[\phi_1, \phi_2] = W[J_1, J_2] - \int_{t_I}^\infty d^4x J_1(x) \frac{\delta W}{\delta J_1(x)} - \int_{t_I}^\infty d^4x J_2(x) \frac{\delta W}{\delta J_2(x)}, \quad (2.6)$$

$$\frac{\delta W}{\delta J_1(x)} \equiv \phi_1(x), \quad \frac{\delta W}{\delta J_2(x)} \equiv -\phi_2(x).$$

以下 Γ に着目する。ここでルジャンドル変換の恒等式に $J_1 = J_2 = 0$ の条件を代入すると

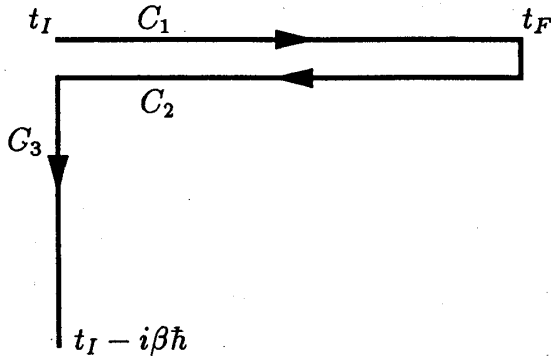


図 1: Contour paths C_1, C_2, C_3

$$(-1)^\alpha J_\alpha(x) = \frac{\delta\Gamma[\phi_1, \phi_2]}{\delta\phi_\alpha(x)} = 0 \quad (2.7)$$

となり、 Γ の停留を求める式に帰着する。(2.7) について $\phi_1(x) = \phi_2(x) = \phi^{(0)}(x)$ なる解が存在しており、このとき (2.7) は

$$\left(\frac{\delta^2\Gamma[\phi_1, \phi_2]}{\delta\phi_1(x)} \right)_{\phi_1=\phi_2=\phi^{(0)}} = 0 \quad (2.8)$$

となる。これがオーダーパラメーター $\phi^{(0)}(x)$ の時間発展を決める式、即ち運動方程式になっており、(2.8) によって求めた解 $\phi^{(0)}(x)$ が時刻 t での $\hat{\phi}(x)$ の期待値になっている。 $t = t_I$ で $\rho_I = e^{-\beta H} / \text{Tr} e^{-\beta H}$ ととったとき、虚時間 $\tau = \frac{i}{\hbar}(t - t_I)$ を導入することによって、図1のような contour path を考える: $C_1: t_I \rightarrow \infty, C_2: \infty \rightarrow t_I, C_3: t_I \rightarrow t_I - i\beta\hbar$ 。そしてこの contour path に対する時間順序積を T_C と表すことにする。このような場合において、 W 及び Γ を下のように定義する。

$$\exp \frac{i}{\hbar} W[J_1, J_2, J_3] = \text{Tr} \rho_I^J U_{J_2}^\dagger(\infty, t_I) U_{J_1}(\infty, t_I) \equiv \text{Tr} T_C \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_C dt \hat{H}_J(t) \right),$$

$$(\hat{H}_J(t) = \hat{H}_{J_\alpha}(t) \quad (t \in C_\alpha \text{ のとき})),$$

$$\begin{aligned} \Gamma[\phi_1, \phi_2, \phi_3] = & W[J_1, J_2, J_3] - \int_{t_I}^\infty d^4x J_1(x) \phi_1(x) + \int_{t_I}^\infty d^4x J_2(x) \phi_2(x) \\ & - \int_0^\beta d\tau d^3x J_3(\tau, \mathbf{x}) \phi_3(\tau, \mathbf{x}). \end{aligned}$$

このとき

$$\left(\frac{\delta\tilde{\Gamma}[\phi_1, \phi_2, \phi_3]}{\delta\phi_1(x)} \right)_{\phi_1=\phi_2=\phi_3=\phi(\text{const.})} = \left(\frac{\delta\Gamma_\beta[\phi_3]}{\delta\phi_3(x)} \right)_{\phi_3=\phi(\text{const.})} = \text{const.} \quad (2.9)$$

が成立している。但し Γ_β は

$$\Gamma_\beta[\phi_3] = W_\beta[J_3] - \int_0^\beta d\tau d^3\mathbf{x} J_3(\tau, \mathbf{x}) \frac{\delta W_\beta[J_3]}{\delta J_3(\tau, \mathbf{x})} \quad (2.10)$$

で定義される量であり、 ϕ_3 が τ によらないとき $\Gamma_\beta[\phi_3] = -\beta\hbar F_\beta[\phi_3]$ (F_β : 平衡系の自由エネルギー) である。

2.3 励起状態

以下、 J_3 は入れないで考える。(2.8) の $\phi^{(0)}$ 付近の別の解を $\phi(x) = \phi^{(0)} + \Delta\phi(x)$ とおく。ここで $\phi^{(0)}$ は平衡系の解にとることにする。(2.8) に $\phi_1 = \phi_2 = \phi^{(0)} + \Delta\phi$ を代入した後 $\Delta\phi$ で展開すると

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\delta\Gamma[\phi_1, \phi_2]}{\delta\phi_1(x)} \right)_{\phi_1=\phi_2=\phi^{(0)}+\Delta\phi} \\ &= \left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_1(x)} \right)_{\phi^{(0)}} + \sum_{\alpha=1,2} \int d^4y \left(\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_1(x)\delta\phi_\alpha(y)} \right)_{\phi^{(0)}} \Delta\phi(y) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \sum_{\alpha_1, \alpha_2} \int d^4y_1 d^4y_2 \left(\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\phi_1(x)\delta\phi_{\alpha_1}(y_1)\delta\phi_{\alpha_2}(y_2)} \right)_{\phi^{(0)}} \Delta\phi(y_1)\Delta\phi(y_2) + \dots \end{aligned} \quad (2.11)$$

さらに $\Delta\phi$ を

$$\Delta\phi(x) = \Delta\phi^{(1)}(x) + \Delta\phi^{(2)}(x) + \dots, \quad (\Delta\phi^{(n)} \sim \mathcal{O}[(\Delta\phi^{(1)})^n]) \quad (2.12)$$

とおいた後、(2.12) を (2.11) に代入し $\Delta\phi^{(1)}$ の power で表わすと、これが、on-shell 展開になる [8]-[12]。 $\Delta\phi^{(1)}$ の power ごとにゼロとおく。 $\Delta\phi^{(1)}$ のゼロ次の項は (2.8) よりゼロとなるのは明らか。 $\Delta\phi^{(1)}$ の 1 次からは、励起モードを決める式

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} d^4y \left(\Gamma_{11}^{(2)}(x, y) + \Gamma_{12}^{(2)}(x, y) \right)_0 \Delta\phi^{(1)}(y), \quad (2.13)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{(2)}(x, y) = \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_\alpha(x)\delta\phi_\beta(y)}$$

がでる。但し、ここでは $t_I \rightarrow -\infty$ にとった。ここで恒等式

$$\sum_{\alpha_2} \int d^4y \Gamma_{\alpha_1\alpha_2}^{(2)}(x, y) (-1)^{\alpha_2+\alpha_3+1} W_{\alpha_2\alpha_3}^{(2)}(y, z) = \delta_{\alpha_1, \alpha_3} \delta^4(x - z), \quad (2.14)$$

$$\sum_{\alpha, \beta=1,2} \left(W_{\alpha\beta}^{(2)}(x, y) \right)_{J_1=J_2} = 0, \quad (2.15)$$

$$W_{\alpha\beta}^{(2)}(x, y) \equiv \frac{\delta^2 W}{\delta J_\alpha(x) \delta J_\beta(y)}$$

を用いることによって

$$-\delta^4(x-z) = \int d^4y \left(\Gamma_{11}^{(2)}(x,y) + \Gamma_{12}^{(2)}(x,y) \right) \left(W_{11}^{(2)}(y,z) + W_{12}^{(2)}(y,z) \right) \Big|_{J_1=J_2=J}$$

が得られる。

$$\left(W_{11}^{(2)}(y,z) + W_{12}^{(2)}(y,z) \right)_{J_1=J_2=J} \equiv \left(W_R^{(2)}(y,z) \right)_J = \frac{i}{\hbar} \theta(y^0 - z^0) \langle [\hat{\phi}(y), \hat{\phi}(z)] \rangle_J$$

なので、結局 $(\Gamma_{11}^{(2)} + \Gamma_{12}^{(2)})_0 = (W_R^{(2)})_{J=0}^{-1}$ となり、(2.13) のゼロ固有値方程式を解くということは、遅延 Green 関数の極を求めることになる。定常で一様な系を考えているとき、 $(\Gamma_{\alpha\beta}^{(2)}(x,y))_0$ は $x-y$ の関数になる。よって (2.13) をフーリエ変換することにより

$$\left(\Gamma_{11}^{(2)}(\omega, \mathbf{p}) + \Gamma_{12}^{(2)}(\omega, \mathbf{p}) \right)_0 \Delta \phi^{(1)}(\omega, \mathbf{p}) = 0$$

が得られ、このゼロ固有値方程式より $\omega = \omega(\mathbf{p})$ の分散関係を知ることができる。また、 $\phi^{(0)} \neq 0$ のとき、自発的対称性の破れが起きている状態の上での励起を調べることができる。

3 ^4He 粒子系への適用

2 で述べた議論を ^4He 粒子系へ具体的に適用する。 ^4He 粒子系のモデルハミルトニアンは

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \int d^3\mathbf{x} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu \right) \hat{\psi}(\mathbf{x}) \\ & + \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{y} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{y}) U_0(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \hat{\psi}(\mathbf{y}) \hat{\psi}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$U_0(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = U_0(\mathbf{y}-\mathbf{x}), \quad [\hat{\psi}(t, \mathbf{x}), \hat{\psi}^\dagger(t, \mathbf{y})] = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

であり、 $\hat{\psi}(\mathbf{x})$ が ^4He 粒子の場の演算子である。モデルハミルトニアン (3.1) は

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}) \rightarrow e^{i\theta} \hat{\psi}(\mathbf{x}), \quad \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}) \rightarrow e^{-i\theta} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}), \quad (3.2)$$

に対して不変である。この不変性を破る probe 項を $\hat{H}$ に加え、 $\hat{H}_{J_\alpha}$ を定義する。

$$\hat{H}_{J_\alpha} = \hat{H} - \int d^3\mathbf{x} \left(J_\alpha(\mathbf{x}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}) + \bar{J}_\alpha(\mathbf{x}) \hat{\psi}(\mathbf{x}) \right). \quad (3.3)$$

このとき、 $\langle \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}) \rangle \equiv \phi^\dagger$, $\langle \hat{\psi}(\mathbf{x}) \rangle \equiv \phi$ がオーダーパラメーターとなり、 $J(\mathbf{x})$, $\bar{J}(\mathbf{x})$ がそれに対する probe になる。 $J, \bar{J}$ は最後にゼロにとる。 $\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi(\mathbf{r})} \Big|_{\phi^{(0)}} = 0$ なる $\phi^{(0)} \neq 0$ が $T < T_c$ (T_c : 臨界温度) で存在していることは loop 展開での 1-loop 近似内では確かめることができる。

さらに数密度演算子 $\hat{n}(\mathbf{x}) = \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}) \hat{\psi}(\mathbf{x})$, $\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) = \frac{\hbar}{2mi} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}) \vec{\nabla} \hat{\psi}(\mathbf{x})$ (但し、 $A \vec{\nabla} B \equiv A \nabla B - (\nabla A) B$) に対する probe 項を加える。

$$\hat{H}_{J_\alpha, K_\alpha, \mathbf{K}_\alpha} = \hat{H}_{J_\alpha} - \int d^3\mathbf{x} (K_\alpha(x) \hat{n}(\mathbf{x}) + \mathbf{K}_\alpha(x) \cdot \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{x})). \quad (3.4)$$

probe $K, \mathbf{K}$ も最後にゼロにとる。以下、

$$\begin{aligned} \hat{j}_\mu &= (\hat{n}, \hat{\mathbf{j}}) = (\hat{n}, \hat{j}_i), \quad K^\mu = (K, \mathbf{K}) = (K, K^i), \quad (i = 1, 2, 3) \\ \hat{\psi}^i &= (\hat{\psi}^\dagger, \hat{\psi}), \quad J^i = (J, \bar{J}), \quad \phi^i = (\phi^\dagger, \phi) \quad (i = 1, 2) \end{aligned}$$

とし、 $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3)$, $A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3) = (A^0, -A^1, -A^2, -A^3)$, $AB = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^0 B^0 - A^i B^i$ の表記法を用いることにする。この $H_{J_\alpha, K_\alpha^\mu}$ をもとにして、母関数 $W[J_\alpha^\mu, K_\alpha^\mu]$ を導入し、(2.6) と同様にして、 J_α^μ から ϕ_α^i ヘルジャンドル変換を行う。このとき、probe K_α^μ についてはルジャンドル変換を行わない。このときのグラフ・ルールはよく知られており [13, 14]、

$$\begin{aligned} \Gamma[\phi_\alpha^i, K_\alpha^\mu] &= \int d^4x \mathcal{L}[\psi_\alpha^i = \phi_\alpha^i, K_\alpha^\mu] + \frac{1}{2} i \hbar \text{Tr} \ln (I^{(2)-1}(x, y))_{\psi_\alpha^i = \phi_\alpha^i} \\ &+ (2\text{-loop 以上の 1 粒子既約 (1PI) 真空グラフ}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

となっている。ここで $\mathcal{L}$, I はそれぞれハミルトニアン $\hat{H}_{J_\alpha=0, K}$ から導かれるラグランジアン密度、及び作用である。(3.5) の最後の項において、プロパゲーターは $(I^{(2)-1})_{\psi_\alpha^i = \phi_\alpha^i}$ 、vertex は $(I^{(n)})_{\psi_\alpha^i = \phi_\alpha^i}$ ($n \geq 3$)、但し

$$I_{\alpha_1 i_1, \dots, \alpha_n i_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^n I[\psi_\alpha^i]}{\delta \psi_{\alpha_1}^{i_1}(x_1) \cdots \delta \psi_{\alpha_n}^{i_n}(x_n)}$$

で与えられている。1 粒子既約グラフとは任意の 1 本のプロパゲーターを切っても 2 つに分かれないグラフのことである。すなわち、 Γ は、1PI グラフのみ含んでいるため、regular 部分しか含んでおらず、hydrodynamic 展開において Goldstone モードからおこる特異性が現れなくなる。これが、 Γ を母関数とした定式化の 1 つの特徴である。

3.1 $\hat{j}_\mu$ の期待値

粒子流密度 $\hat{j}_\mu$ の期待値は

$$\begin{aligned} j_\mu(x) &= \langle \hat{j}_\mu(x) \rangle = (n(x), \mathbf{j}(x)) \\ &= \left. \frac{\delta W}{\delta K_1^\mu(x)} \right|_{J^i = K^\mu = 0} = - \left. \frac{\delta W}{\delta K_2^\mu(x)} \right|_{J^i = K^\mu = 0} \end{aligned} \quad (3.6)$$

で与えられる。(3.6) は、恒等式

$$\frac{\delta W}{\delta K_\alpha^\mu(x)} = \frac{\delta \Gamma}{\delta K_\alpha^\mu(x)} \quad (3.7)$$

より、 Γ を使った形

$$j_\mu(x) = \frac{\delta \Gamma}{\delta K_1^\mu(x)} \Big|_{\phi^i = \phi^i(0), K^\mu} = - \frac{\delta \Gamma}{\delta K_2^\mu(x)} \Big|_{\phi^i = \phi^i(0), K^\mu} \quad (3.8)$$

で表すことができる。

3.2 $j - j$ の相関関数

粒子流密度の相関関数は、

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar} (-1)^{\alpha+\beta} \left(\langle T_C \hat{j}_\mu(x) \hat{j}_\nu(y) \rangle_{\text{conn.}} \right)_{\substack{t_x \in C_\alpha \\ t_y \in C_\beta}} &= \frac{\delta^2 W[J_\alpha^\mu, K_\alpha^\mu]}{\delta K_\alpha^\mu(x) \delta K_\beta^\nu(y)} \\ &\equiv \frac{i}{\hbar} (-1)^{\alpha+\beta} \langle T_C \hat{j}_{\alpha\mu}(x) \hat{j}_{\beta\nu}(y) \rangle_{\text{conn.}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

で与えられる。これを Γ を使った表現で表す。 $\phi^i = \phi^i[J^i, K^\mu]$ より、 J^i を固定したもとの K^μ -微分は、

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta K_\alpha^\mu(x)} \Big|_J &= \frac{\delta}{\delta K_\alpha^\mu(x)} \Big|_\phi + \left(\frac{\delta \phi_\delta^i(w)}{\delta K_\alpha^\mu(x)} \right)_J \cdot \frac{\delta}{\delta \phi_\delta^i(w)} \\ &= \frac{\delta}{\delta K_\alpha^\mu(x)} \Big|_\phi + \sum_{\gamma, \delta} (-1)^{\gamma+\delta} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta K_\alpha^\mu(x) \delta \phi_\gamma^j(z)} \cdot \frac{\delta^2 W}{\delta J_\gamma^j(z) \delta J_\delta^i(w)} \cdot \frac{\delta}{\delta \phi_\delta^i(w)} \Big|_K, \end{aligned} \quad (3.10)$$

という形に書き直すことができるので (3.9) は、恒等式 (3.7) を $K_\beta^\nu(y)$ で微分することにより、

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar} (-1)^{\alpha+\beta} \langle T_C \hat{j}_{\alpha\mu}(x) \hat{j}_{\beta\nu}(y) \rangle_{\text{conn.}} &= \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta K_\alpha^\mu(x) \delta K_\beta^\nu(y)} \\ &- \sum_{\gamma, \delta} \int d^4 z d^4 w \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta K_\alpha^\mu(x) \delta \phi_\gamma^j(z)} \cdot \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi \delta \phi} \right)_{ji}^{-1(\gamma\delta)}(z, w) \cdot \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_\delta^i(w) \delta K_\beta^\nu(y)}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2}, \quad (3.12)$$

Diagram 1: A circle with two external lines on the left and right. Inside the circle is the label $\Gamma_{K_\alpha^\mu K_\beta^\nu}^{(2)}$.

Diagram 2: Two circles connected by a horizontal line. The left circle has two external lines on the left and is labeled $\Gamma_{K_\alpha^\mu \phi_\gamma^j}^{(2)}$. The right circle has two external lines on the right and is labeled $\Gamma_{\phi_\delta^i K_\beta^\nu}^{(2)}$. The connecting line is labeled $\left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi \delta \phi} \right)_{ji}^{-1(\gamma\delta)}$.

となる。ここで (3.11) については恒等式 (2.14) を用いた。(3.11) 及びそのグラフ表現 (3.12) においては、第 1 項が regular 部分を与え、第 2 項が singular 部分を与えており、停留解

$\phi^{i(0)}$ で評価したときの流体力学的極限での特異性は $(\Gamma_{\phi\phi}^{(2)})_0^{-1}$ において現れている。この因子 $(\Gamma_{\phi\phi}^{(2)})_0^{-1}$ により、第2項から励起モード $\omega = \omega(k)$ のところでのピークが見られる。

ここで、 $(\mu, \nu) = (i, j)$ ($i, j = 1, 2, 3$) のときに着目し、 Γ による定式化によって ^4He 粒子の密度 n を常流体成分と超流体成分とに分けることができることを示す。(3.11) で $((\alpha, \beta) = (1, 1)) + ((\alpha, \beta) = (1, 2))$ をとると、

$$\begin{aligned} W_{R K^i K^j}^{(2)0}(x, y) &\equiv W_{K_1^i K_1^j}^{(2)0}(x, y) + W_{K_1^i K_2^j}^{(2)0}(x, y) \\ &= \frac{i}{\hbar} \theta(t_x - t_y) \langle [\hat{j}_i(x), \hat{j}_j(y)] \rangle_{\text{conn.}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$= \Gamma_{R K^\mu K^\nu}^{(2)0}(x, y) - \int d^4 z d^4 w \Gamma_{R K^\mu \phi^i}^{(2)0}(x, z) (\Gamma_{R \phi\phi}^{(2)0})_{lm}^{-1}(z, w) \Gamma_{R \phi^m K^\nu}^{(2)0}(w, y) \quad (3.14)$$

を得る。 W や Γ における上付き添字 0 は、 x に依存しない停留解 $\phi^i = \phi^{i(0)}$ で評価することを意味している。ハミルトニアン (3.1) から導かれる作用 I の、 $\psi \rightarrow e^{i\theta} \psi, \psi^\dagger \rightarrow e^{-i\theta} \psi^\dagger$ の変換に対する不変性から、様々な W-T 恒等式を得ることができる。

(例)

$$\partial_0 n(x) + \nabla \cdot \mathbf{j}(x) = 0 \quad \dots \text{current 保存則}, \quad (3.15)$$

$$(\text{operator 形式で } \partial_0 \hat{n}(x) + \nabla \cdot \hat{\mathbf{j}}(x) = 0), \quad (3.16)$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{k^i k^j}{k^2} W_{R K^i K^j}^{(2)0}(k^0 = 0, \mathbf{k}) = \frac{n}{m} \equiv \frac{\rho}{m^2} \quad \dots \text{f-sum rule.} \quad (3.17)$$

ここで $\lim_{k \rightarrow 0} \lim_{k^0 \rightarrow 0}$ ($k^0 = 0$ とした後、 $k \rightarrow 0$ をとる) において、(3.13) を

$$W_{R K^i K^j}^{(2)0}(k) = \left(\delta_{i,j} - \frac{k^i k^j}{k^2} \right) W^{(t)}(k) + \frac{k^i k^j}{k^2} W^{(l)}(k) \quad (3.18)$$

の形に分解する。但し、添字 $(l), (t)$ はそれぞれ longitudinal 部分と transverse 部分を表す。 $W_{R K^i K^j}^{(2)0}$ の regular 部分は特異性を持っていないので $\lim_{k \rightarrow 0} \lim_{k^0 \rightarrow 0}$ においては、 $\delta_{i,j} = (\delta_{i,j} - k_i k_j / k^2) + k_i k_j / k^2$ に比例する。つまり、regular 部分は longitudinal 部分も transverse 部分も含んでいる。一方、singular 部分に含まれる $\Gamma_{R K^i \phi^l}^{(2)0}, \Gamma_{R \phi^m K^j}^{(2)0}$ は j_i-, j_j -vertex より、それぞれ k_i, k_j に比例し、 $(\Gamma_{R \phi\phi}^{(2)0})^{-1}$ は $1/k^2$ の特異性を持っている。このため、singular 部分は $k_i k_j / k^2$ に比例し、longitudinal 部分のみを含む。更に、 $\phi^{i(0)} = 0$ ($T > T_c$) のとき、 $\Gamma_{R K^i \phi^l}^{(2)0}, \Gamma_{R \phi^m K^j}^{(2)0}$ が $\phi^{(t)}$ -微分からあらわれる $\phi^{(t)(0)}$ の因子を持つため singular 部分はゼロになり、regular 部分が常流体の部分を担当しているといえる。以上より常流体、及び超流体の密度は、

$$\lim_{k \rightarrow 0} W^{(l)(r)}(k^0 = 0, \mathbf{k}) = \lim_{k \rightarrow 0} \Gamma^{(l)}(k^0 = 0, \mathbf{k}) = \lim_{k \rightarrow 0} \Gamma^{(t)}(k^0 = 0, \mathbf{k}) = \frac{n_n}{m} \equiv \frac{\rho_n}{m^2},$$

(3.19)

$$\begin{aligned}
 & \lim_{k \rightarrow 0} W^{(l)(s)}(k^0 = 0, k) \\
 &= - \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k^i k^j}{k^2} \Gamma_{R K^i \phi^j}^{(2)0}(k^0 = 0, k) \left(\Gamma_{R \phi \phi}^{(2)0}(k^0 = 0, k) \right)_{lm}^{-1} \Gamma_{R \phi^m K^j}^{(2)0}(k^0 = 0, k) \\
 &= \frac{n_s}{m} \equiv \frac{\rho_s}{m^2},
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

と定義できる。但し、 $n_n(\rho_n)$ 及び $n_s(\rho_s)$ はそれぞれ常流体と超流体の数密度（密度）を表している。(3.17), (3.19), (3.20) より n は

$$n = n_n + n_s, \tag{3.21}$$

のように分解することができる。また、上述の議論から $W_{R K^i K^j}^{(2)0}$ の regular 部分は、

$$\Gamma_{R K^i K^j}^{(2)0}(k \rightarrow 0) = \delta_{i,j} \frac{n_n}{m} = \delta_{i,j} \frac{\rho_n}{m} \tag{3.22}$$

と表すことができる。

3.3 superflow がある場合

$\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_1^i(x)} \Big|_{\phi_1 = \phi_2 = \phi^{(0)}} = 0$ の解の 1 つとして

$$\begin{cases} \phi_Q^{(0)}(x) = e^{-iQx} (\phi^{(0)} + \mathcal{O}(Q^2)) \equiv e^{-iQx} \tilde{\phi}^{(0)} \\ \phi_Q^{\dagger(0)}(x) = e^{iQx} (\phi^{\dagger(0)} + \mathcal{O}(Q^2)) \equiv e^{iQx} \tilde{\phi}^{\dagger(0)} \end{cases} \tag{3.23}$$

が存在する。但し $Q = (Q^0, \mathbf{Q})$, $Qx = Q^0 t - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}$ ($Q: \text{const.}$) であり、 $\phi^{i(0)}$ は流れがない系における解である。超流動の速度を $\mathbf{v}_s = \frac{\hbar \mathbf{Q}}{m} = -\frac{\hbar}{m} \nabla(Qx)$ と定義する。このときの結果は derivative 展開の最低次の結果を $\mathbf{v}_s \rightarrow \mathbf{v}_s(x)$ と置き換えることによって与えることが知られている [15, 7]。また、この解については、グラフ・ルール (3.5) を用いることにより以下のことを知ることができる。

(i) $\frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} = \beta \hbar V n = (\text{一定})$ の条件のもとで

$$Q^0 = \frac{1}{\hbar} \varepsilon_Q^0 + \mathcal{O}(Q^2, \beta) + \dots, \quad \varepsilon_Q^0 = \frac{\hbar^2 Q^2}{2m}.$$

(ii) $T = 0$ で $\tilde{\phi}^{i(0)} = \phi^{i(0)}$, $Q^0 = \frac{\hbar Q^2}{2m}$.

解 (3.23) の上で物理量を評価することにより、超流動が存在する場合についての考察を行うことができる。このように Γ は流れのある系を考えるとときにも有効である。

3.4 流体力学方程式 — $\mathbf{v}_s$ が小さいとき

この節では微視的な見地から超流動の流体力学方程式の導出を行う。このためにまず、エネルギー・運動量テンソル $\hat{T}_\mu{}^\nu$ を導入し、期待値 j_μ 及び $T_\mu{}^\nu$ を 3.3 節の解 $\phi_Q^{i(0)}(x)$ の上で評価する。以下、ハミルトニアン (3.1) において、相互作用は

$$U_0(x-y) = U_0\delta^4(x-y), \quad U_0 > 0$$

として考える。また、常流体の速度 $\mathbf{v}_n$ は $\mathbf{v}_n = 0$ とおく。

3.4.1 エネルギー・運動量テンソル

作用:

$$I = \int d^4x \hat{\psi}^\dagger(x) \left(i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla_x^2 + \mu \right) \hat{\psi}(x) - \frac{1}{2} \int d^4x \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}^\dagger(x) U_0 \hat{\psi}(x) \hat{\psi}(x) \quad (3.24)$$

は変換 $x^\rho \rightarrow x'^\rho \equiv x^\rho - \epsilon^\rho$ (ϵ は任意の微小ベクトル) に対して不変性を持つ。この変換に対する Noether カレントが $T_\mu{}^\nu$ に対応している。 $T_\mu{}^\nu$ を具体的に表すと

$$\hat{T}_0^0(x) = \hat{\psi}^\dagger(x) \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \mu \right) \hat{\psi}(x) + \frac{1}{2} U_0 \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}(x) \hat{\psi}(x) = \hat{\mathcal{H}}(x), \quad (3.25)$$

$$\hat{T}_0^i(x) = (\partial^i \hat{\psi}^\dagger(x)) \frac{\hbar^2}{2m} (\partial_0 \hat{\psi}(x)) - \hat{\psi}^\dagger(x) \frac{\hbar^2}{2m} \partial^i \partial_0 \hat{\psi}(x), \quad (3.26)$$

$$\hat{T}_i^0(x) = i\hbar \hat{\psi}^\dagger(x) \partial_i \hat{\psi}(x), \quad (3.27)$$

$$\hat{T}_i^j(x) = (\partial^j \hat{\psi}^\dagger(x)) \frac{\hbar^2}{2m} (\partial_i \hat{\psi}(x)) - \hat{\psi}^\dagger(x) \frac{\hbar^2}{2m} \partial^j \partial_i \hat{\psi}(x) - \delta_i^j \hat{\mathcal{L}}(x). \quad (3.28)$$

但し $\hat{\mathcal{H}}(x)$ はハミルトニアン密度である。また、この場合のカレント保存則

$$\partial_\mu \hat{T}_\nu{}^\mu(x) = 0 \quad (3.29)$$

がエネルギー・運動量保存則に対応している。

次に $T_\mu{}^\nu$ を含めた W-T 恒等式を考える。このため、 $\hat{T}_\mu{}^\nu$ についても probe 項を導入する。

$$\hat{H}_{J,K^\mu,\eta_\nu{}^\mu,\eta_h} = \hat{H}_J - \int d^3\mathbf{x} K^\mu(x) \hat{j}_\mu(x) - \int d^3\mathbf{x} \eta_\nu{}^\mu(x) \hat{T}_\mu{}^\nu(x) - \int d^3\mathbf{x} \eta_h(x) \hat{h}(x). \quad (3.30)$$

但し、最後の項は後の議論のため後の議論のため導入したものであり、 $\hat{h}(x)$ は

$$\hat{h}(x) = \frac{i\hbar}{2} \hat{\psi}^\dagger(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \hat{\psi}(x). \quad (3.31)$$

で与えられる。 K^μ と同様に計算の最後に η_ν^μ, η_h をゼロにすることによりもとの系を回復させる。ハミルトニアン $\hat{H}_{J_\alpha^i, K_\alpha^\mu, \eta_{\nu(\alpha)}^\mu, \eta_{h(\alpha)}}$ をもとにした母関数 $W[J_\alpha^i, K_\alpha^\mu, \eta_{\nu(\alpha)}^\mu, \eta_{h(\alpha)}]$ を導入し、更に J_α^i から ϕ_α^i へはルジャンドル変換を行い、他の probe はそのまま変換をしないでおくことにより $\Gamma[\phi_\alpha^i, K_\alpha^\mu, \eta_{\nu(\alpha)}^\mu, \eta_{h(\alpha)}]$ を導入する。作用 I の並進対称性から T_μ^ν に関する種々の W-T 恒等式を得ることができる。これらの $k \rightarrow 0$ の極限は、位相変換不変性における sum-rule に対応する T_μ^ν についての恒等式にあたる。

(例)

$$\lim_{k \rightarrow 0} \Gamma_R^{(2)0}{}_{\eta_{i(1)}^0 K^i}(k^0 = 0, k) = \frac{1}{m} \delta_l^i (h)_0 \equiv \frac{1}{m} \delta_l^i h^{(0)}, \quad (3.32)$$

$$\Gamma_{\eta_{0(\alpha)}^l K_\beta^l}^{(2)0}(k^0, k = 0) = 0, \quad (3.33)$$

$$\lim_{p, q \rightarrow 0} \sum_{\beta, \gamma} \Gamma_{\eta_{i(1)}^j K_\beta^l K_\gamma^m}^{(3)0}(p^0 = q^0 = 0; p, q) = \frac{n_n}{m} (\delta_j^i \delta_l^m - \delta_l^i \delta_j^m - \delta_m^i \delta_j^l), \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} & \lim_{k_2, k_3, k_4 \rightarrow 0} \sum_{\beta, \gamma, \epsilon} \Gamma_{\eta_{i(1)}^0 K_\beta^l K_\gamma^m K_\epsilon^n}^{(4)0}(k_2^0 = k_3^0 = k_4^0 = 0; k_2, k_3, k_4) \\ &= \frac{1}{m} \delta_n^i \lim_{k_2, k_3 \rightarrow 0} \Gamma_{\eta_{h(1)} K_\beta^l K_\gamma^m}^{(3)0}(k_2^0 = k_3^0 = 0; k_2, k_3) \\ &+ \frac{1}{m} \delta_m^i \lim_{k_2, k_4 \rightarrow 0} \Gamma_{\eta_{h(1)} K_\beta^l K_\epsilon^n}^{(3)0}(k_2^0 = k_4^0 = 0; k_2, k_4) \\ &+ \frac{1}{m} \delta_l^i \lim_{k_3, k_4 \rightarrow 0} \Gamma_{\eta_{h(1)} K_\gamma^m K_\epsilon^n}^{(3)0}(k_3^0 = k_4^0 = 0; k_3, k_4), \end{aligned} \quad (3.35)$$

etc.

これらの恒等式を用いることによって、微視的な Green 関数と巨視的な物理量をつなげることができる。微視的な観点から流体力学方程式を得ることができる。

3.4.2 粒子流密度

粒子流密度 $\langle \hat{j}(x) \rangle_t$ を(3.23)の解 $\phi_Q^i(x)$ 上で評価する:

$$j_i(x; v_s) = \langle \hat{j}_i(x) \rangle_{\phi_Q^{(0)}} = \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta K_1^i(x)} \right)_{\phi_Q^{(0)}}. \quad (3.36)$$

グラフ・ルール(3.5)を用いることによって、 $j_i(x; v_s)$ を v_s のべきで展開すると、以下の結果が得られる。

$$j_i(x; v_s) = j_i(x; v_s = 0) + \left(\frac{\partial}{\partial v_s^{i_1}} \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta K_1^i(x)} \right)_{\phi_Q^{(0)}, K^\mu=0} \right)_{v_s=0} v_s^{i_1} + \mathcal{O}(v_s^2)$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ -m\Gamma_{R\ K^i K^{i1}}^{(2)\tilde{0}}(k=0) + n\delta_{i,i1} \right\} v_s^{i1} + \mathcal{O}(v_s^2) \\
&= (-n_n + n)v_s^i + \mathcal{O}(v_s^2) \\
&= n_s v_s^i + \mathcal{O}(v_s^2).
\end{aligned} \tag{3.37}$$

ここで添字 $\tilde{0}$ は、解が $\tilde{\phi}^{(0)}$ かつ化学ポテンシャルが $\tilde{\mu} \equiv \mu + \hbar Q^0 - \varepsilon_Q^0$ で評価されていることを意味しており、2行目から3行目を導く際には (3.22) を用いた。またゼロ温度のときには (3.37) は

$$j_i(x; v_s) = v_s^i n \tag{3.38}$$

となることを示すことができ、これによりゼロ温度においては $n_s = n$ となっていることがわかる。

3.4.3 超流動のあるときのエネルギー・運動量テンソル

前節と同様にして、エネルギー・運動量テンソルについても、期待値を超流動がある解 $\phi_Q^{(0)}$ の上で評価する:

$$T_\mu{}^\nu(x; v_s) = \langle \hat{T}_\mu{}^\nu(x) \rangle_{\phi_Q^{(0)}} = \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta \eta_{\nu(1)}^\mu(x)} \right)_{\phi_Q^{(0)}} \tag{3.39}$$

(3.5) において $\hat{T}_\mu{}^\nu, \hbar$ に対する source 項を加えたときのグラフ・ルールを用いると、下記の結果が得られる。

$$T_i{}^0(x; v_s) = -mn_s v_s^i + \mathcal{O}(v_s^2), \tag{3.40}$$

$$T_i{}^j(x; v_s) = -\delta_i{}^j P + mn_s v_{si} v_s^j + \mathcal{O}(|v_s|^3), \tag{3.41}$$

$$T_0{}^i(x; v_s) = \hbar Q^0 v_s^i n_s + \mathcal{O}(|v_s|^4), \tag{3.42}$$

但し、 P は圧力で熱力学ポテンシャルを用いて

$$P = -\frac{\Omega}{V} = \frac{i\Gamma_\beta[\phi_Q^{(0)}]}{\beta\hbar V} = \frac{i\tilde{\Gamma}[\tilde{\phi}^{(0)}]}{\beta\hbar V}, \quad \tilde{\Gamma}[\tilde{\phi}^{(0)}] \equiv \Gamma[\phi_Q^{(0)}], \tag{3.43}$$

であらわされる。(3.40) ~ (3.42) を導出する際、恒等式 (3.32) ~ (3.35) を用いた。(3.41) が運動量流速密度テンソルの表式を与えている。

3.4.4 化学ポテンシャル

母関数 Γ を $\phi_\alpha^\dagger(x) = e^{if(x)} \tilde{\phi}_\alpha^\dagger$, $\phi_\alpha(x) = e^{-if(x)} \tilde{\phi}_\alpha$ 上で評価したとき、 Γ はグラフ・ルールを用いて

$$\begin{aligned}\Gamma &= \Gamma[\tilde{\phi}_\alpha^i, \mu, \hbar \partial_i f, -\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla f) \cdot (\nabla f), \nabla^2 f, \nabla f, \dots] \\ &= \Gamma[\tilde{\phi}_\alpha^i, \mu + \hbar \partial_i f - \frac{\hbar^2}{2m}(\nabla f) \cdot (\nabla f), \nabla^2 f, \nabla f, \dots],\end{aligned}\quad (3.44)$$

となることがわかる。 x に依存する化学ポテンシャルを

$$\tilde{\mu}(x) = \mu + \hbar \partial_i f(x) - \frac{\hbar^2}{2m}(\nabla f(x)) \cdot (\nabla f(x)) \quad (3.45)$$

とおくと、(3.44) より

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \tilde{\mu}(x)} = n(x) \quad (3.46)$$

となる。ここで超流動の速度を

$$\mathbf{v}_s(x) = -\frac{\hbar}{m} \nabla f(x) \quad (3.47)$$

と定義する。 $f(x) = Qx$ のとき 3.3 節で定義した $\mathbf{v}_s$ に明らかに一致する。また、(3.45), (3.47) を用いると、 $\mathbf{v}_s$ が化学ポテンシャルの勾配によって運動を示すことを示す式:

$$m \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v}_s^2 + \tilde{\mu}(x) \right) = 0 \quad (3.48)$$

を得ることができる。

3.4.5 エネルギー・流速密度

エネルギー密度 $\mathcal{E}$ は $\mathbf{v}_s = 0$ のとき、

$$\mathcal{E} = \langle \hat{\mathcal{H}} \rangle + \mu \langle \hat{n} \rangle \quad (3.49)$$

で与えられる。これより、エネルギー密度演算子 $\hat{\mathcal{E}}(x)$ を

$$\hat{\mathcal{E}}(x) \equiv \hat{T}_0^0(x) + \mu \hat{n}(x) = \hat{\mathcal{H}} + \mu \hat{n}(x), \quad (3.50)$$

と定義する。このとき、エネルギー保存則

$$\partial_0 \hat{\mathcal{E}}(x) + \partial_i \hat{j}_e^i(x) = 0 \quad (3.51)$$

を満たすようなエネルギー流速密度 $\hat{j}_e^i(x)$ は (3.16), (3.29) より

$$\hat{j}_e^i(x) \equiv \hat{T}_0^i(x) + \mu \hat{j}_i(x) \quad (3.52)$$

と定義できる。(3.37) と (3.42) より $j_e^i(x; \mathbf{v}_s)$ は $\mathbf{v}_s$ で展開すると、

$$j_e^i(x; \mathbf{v}_s) = (\hbar Q_0 + \mu) n_s v_s^i \quad (3.53)$$

$$= (\tilde{\mu} + \frac{1}{2} m v_s^2) n_s v_s^i \quad (3.54)$$

となる。これは、超流動流体力学方程式でよく知られている式である。

3.4.6 エントロピー保存則

(3.43) を用いると、圧力 P は

$$dP = s dT + n d\mu + \frac{1}{\beta \hbar V} \left\{ \left(\frac{\partial i \tilde{\Gamma}}{\partial (\hbar Q^0)} \right)_{\tilde{\phi}^{(0)}} d(\hbar Q^0) + \left(\frac{\partial i \tilde{\Gamma}}{\partial v_s^i} \right)_{\tilde{\phi}^{(0)}} dv_s^i + \left(\frac{\partial i \tilde{\Gamma}}{\partial \tilde{\phi}^i} \right)_{\tilde{\phi}^{(0)}} d\tilde{\phi}^i \right\} \quad (3.55)$$

の関係を満たしている。(3.55) の $\{\}$ 内の最後の項は停留条件からゼロになる。ここでグラフ・ルールを用いることにより得られる式:

$$\frac{1}{\beta \hbar V} \left(\frac{\partial i \tilde{\Gamma}}{\partial v_s^i} \right)_{\tilde{\phi}^{(0)}} = -m j_i + \mathcal{O}(v_s^2), \quad \frac{1}{\beta \hbar V} \left(\frac{\partial i \tilde{\Gamma}}{\partial \hbar Q^0} \right)_{\tilde{\phi}^{(0)}} = \left(\frac{\partial i \tilde{\Gamma}}{\partial \mu} \right) = n \quad (3.56)$$

を (3.55) に代入することにより、

$$dP = s dT + n d\mu + n d(\hbar Q^0) - m n_s v_s^i dv_s^i \quad (3.57)$$

が得られる。但し s はエントロピー密度で

$$s \equiv \frac{1}{V} \frac{\partial (i \Gamma[\phi] / \beta \hbar)}{\partial T} = \frac{1}{V} \frac{\partial (i \tilde{\Gamma}[\tilde{\phi}] / \beta \hbar)}{\partial T} \quad (3.58)$$

で定義される。一方グラフ・ルールより $\mathbf{v}_s$ の full のオーダーで、

$$-\mathcal{E} = P - \mu n - T s - \hbar Q^0 n \quad (3.59)$$

が得られる。(3.59) の全微分をとり、(3.57) を用いると、 $d\mathcal{E}$ は

$$\begin{aligned} d\mathcal{E} &= T ds + (\hbar Q^0 + \mu) dn + m n_s v_s^i dv_s^i \\ &= T ds + \left(\frac{1}{2} m v_s^2 + \tilde{\mu} \right) dn + m j_i dv_s^i \end{aligned} \quad (3.60)$$

と表される。局所平衡仮定をもちいて、エネルギー保存則 (3.51) は

$$\begin{aligned}
 0 &= \partial_0 \mathcal{E} + \partial_i j_e^i \\
 &= T \frac{\partial s}{\partial t} + \left(\frac{1}{2} m v_s^2 + \tilde{\mu} \right) \frac{\partial n}{\partial t} + m j_i \frac{\partial v_s^i}{\partial t} + \partial_i \left[\left(\tilde{\mu} + \frac{1}{2} m v_s^2 \right) j_i \right] \\
 &= T \frac{\partial s}{\partial t},
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

となり、エントロピー保存則が得られる。

3.5 流体力学方程式— $\mathbf{v}_s$ の高次も含めて考えたとき

前節までの議論を $\mathbf{v}_s$ の高次も含めた議論に拡張する。

3.5.1 $n_s(\mathbf{v}_s^2), n_n(\mathbf{v}_s^2)$ の定義

$\mathbf{v}_s$ の高次を考えたときの超流体の密度 n_s を、高次の項も含めた粒子流密度 $j_i(x; \mathbf{v}_s)$ を用いて、

$$j_i(x; \mathbf{v}_s) = n_s v_s^i + \cdots \equiv n_s(\mathbf{v}_s) v_s^i \tag{3.62}$$

$$\lim_{\mathbf{v}_s \rightarrow 0} n_s(\mathbf{v}_s^2) = n_s \quad ((3.37) \text{ で得られたもの}) \tag{3.63}$$

と定義する。また常流体の密度 n_n は

$$n_n(\mathbf{v}_s^2) = n - n_s(\mathbf{v}_s^2) \tag{3.64}$$

で定義する。

3.5.2 エネルギー・運動量テンソル

(3.62), (3.64) の $n_s(\mathbf{v}_s^2), n_n(\mathbf{v}_s^2)$ を用いて $T_\mu{}^\nu(x; \mathbf{v}_s)$ 、及び $j_e^i(x; \mathbf{v}_s)$ を求める。3.4節の議論を高次に拡張することにより低次のみで考えたときの結果 (3.40) ~ (3.42) の $T_\mu{}^\nu(x; \mathbf{v}_s, n_s)$ 、(3.54) の $j_e^i(x; \mathbf{v}_s, n_s)$ における n_s を $n_s(\mathbf{v}_s^2)$ で置き換えたものが得られる。更に、(3.56) が full のオーダーで成り立つことを用いて、エントロピー保存則を得ることができる。

このように、 $\mathbf{v}_s$ の高次も含めて評価すると、最低次で現れる超流体の密度 n_s を $n_s(\mathbf{v}_s^2)$ に置き換えた 2 流体モデルの関係式が成立する。

以上をまとめると

$$n = n_n + n_s,$$

$$j_i(x; \mathbf{v}_s) = n_s v_s^i,$$

$$T_i^0(x; \mathbf{v}_s) = -m n_s v_s^i,$$

$$T_i^j(x; \mathbf{v}_s) = -\delta_i^j P + m n_s v_s^i v_s^j,$$

$$T_0^i(x; \mathbf{v}_s) = \hbar Q^0 v_s^i n_s,$$

$$j_\epsilon^i(x; \mathbf{v}_s) = (\tilde{\mu} + \frac{1}{2} m v_s^2) n_s v_s^i,$$

$$P = -\mathcal{E} + T s + \left(\frac{1}{2} m v_s^2 + \tilde{\mu} \right) n,$$

$$d\mathcal{E} = T ds + \left(\frac{1}{2} m v_s^2 + \tilde{\mu} \right) dn + m j_i dv_s^i,$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = 0,$$

$$m \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} m v_s^2 + \tilde{\mu}(x) \right) = 0,$$

が、 $\mathbf{v}_s$ の低次のみ考えたときにも高次も含めて考えたときにも成立する。

また、(3.16), (3.11), (3.51) の期待値を $\phi_Q^{(0)}$ 上で評価することにより、derivative 展開の最低次のオーダーで、数・エネルギー・運動量の保存則は

$$\partial_0 n(x; \mathbf{v}_s) + \partial_i j_i(x; \mathbf{v}_s) = 0, \quad (3.65)$$

$$\partial_0 \mathcal{E}(x; \mathbf{v}_s) + \partial_i j_\epsilon^i(x; \mathbf{v}_s) = 0, \quad (3.66)$$

$$\partial_0 T_\mu^0(x; \mathbf{v}_s) + \partial_i T_\mu^i(x; \mathbf{v}_s) = 0, \quad (3.67)$$

で与えられることがわかる。

3.6 ガリレイ変換

ここまでは、常流体の速度 $\mathbf{v}_n = 0$ として、考えてきた。ここで、ガリレイ変換を用いることにより、 $\mathbf{v}_n$ (但し、 $\mathbf{v}_n$ は一定) を導入する。 $\mathbf{v}_n$ で動く系を F_0 、実験室系を F とする。系 F での超流体の速度が $\mathbf{v}_s$ 、常流体の速度が $\mathbf{v}_n$ のとき、系 F_0 での超流体と常流体の速度はそれぞれ $\mathbf{v}_s^{(0)} = \mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n$, $\mathbf{v}_n^{(0)} = 0$ となる。 F_0 から F へガリレイ変換を生成する演算子 $U_{\mathbf{v}_n}$ は

$$U_{\mathbf{v}_n} = \exp \left(\frac{Q_{\mathbf{v}_n}}{\hbar} \right), \quad (3.68)$$

$$Q_{\mathbf{v}_n} = i \int d^3\mathbf{x} [-v_n^i t m \hat{j}_i + v_n^i x^i m \hat{n}] \quad (3.69)$$

で与えられている [3]。

$$\begin{aligned} \langle \hat{O}_i(x) \rangle_{\mathbf{v}_s^{(0)}} &= \text{Tr}\{\rho_I \hat{O}_i(x)\} = \text{Tr}\{U_{\mathbf{v}_n} \rho_I U_{\mathbf{v}_n}^{-1} \cdot U_{\mathbf{v}_n} \hat{O}_i(x) U_{\mathbf{v}_n}^{-1}\} \\ &= \text{Tr}\{\rho_{IV_n} \hat{O}'_i(t, \mathbf{x} + \mathbf{v}_n t)\} = \langle \hat{O}'_i(t, \mathbf{X}) \rangle_{\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_n} = \langle f_i(\hat{O}(t, \mathbf{X})) \rangle_{\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_n}, \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_s &= \mathbf{v}_s^{(0)} + \mathbf{v}_n, \quad \mathbf{X} = \mathbf{x} + \mathbf{v}_n t, \quad \rho_{IV_n} = U_{\mathbf{v}_n} \rho_I U_{\mathbf{v}_n}^{-1}, \\ \hat{O}'_i(t, \mathbf{X}) &= U_{\mathbf{v}_n} \hat{O}_i(x) U_{\mathbf{v}_n}^{-1} = f_i(\hat{O}(t, \mathbf{X})) \end{aligned} \quad (3.71)$$

を用いて、前節まで得られた結果の $\mathbf{v}_s$ を $\mathbf{v}_s^{(0)}$ としたものをガリレイ変換すると

$$\langle \hat{j}_i(t, \mathbf{X}) \rangle_{\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_n} = n_s v_s^i + n_n v_n^i, \quad (3.72)$$

$$\langle \hat{T}_i^0(t, \mathbf{X}) \rangle_{\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_n} = -m(n_s v_s^i + n_n v_n^i), \quad (3.73)$$

$$\langle \hat{T}_i^j(t, \mathbf{X}) \rangle_{\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_n} = m n_s v_s^i v_s^j + m n_n v_n^i v_n^j - \delta_i^j P, \quad (3.74)$$

$$\langle \hat{\mathcal{E}}(t, \mathbf{X}) \rangle_{\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_n} = \mathcal{E}_s^{(0)}(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n) + v_n^i m n_s (v_s^i - v_n^i) + \frac{1}{2} m v_n^2 n, \quad (3.75)$$

$$\langle \hat{j}_e^i(t, \mathbf{X}) \rangle_{\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_n} = (\tilde{\mu} + \frac{1}{2} m v_s^2)(n_s v_s^i + n_n v_n^i) + T s v_n^i + m n_n v_n^i \{\mathbf{v}_n \cdot (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)\}, \quad (3.76)$$

$$P = -\mathcal{E}_n^{(0)} + T s + \tilde{\mu} n + m n_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2, \quad (3.77)$$

$$d\mathcal{E}_n^{(0)}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) = T ds + \tilde{\mu} dn + m(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) \cdot d[n_n(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)], \quad (3.78)$$

を得ることができる。但し、

$$\mathcal{E}_s^{(0)}(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n) \equiv \langle \hat{\mathcal{E}}(t, \mathbf{x}) \rangle_{\mathbf{v}_s^{(0)}}$$

であり、 $\mathcal{E}_n^{(0)}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)$ は超流動の速度がゼロの系におけるエネルギー、また超流体の密度、常流体の密度、化学ポテンシャル $\tilde{\mu}$ は

$$n_s = n_s((\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n)^2), \quad n_n = n_n((\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n)^2), \quad (3.79)$$

$$\tilde{\mu} = \mu + \hbar Q_0 - \frac{1}{2} m (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n)^2, \quad (3.80)$$

で与えられている。化学ポテンシャル $\tilde{\mu}$ が満たす式 (3.48) は系 F においても成立していることは容易に確かめることができる。また、保存則 (3.65) ~ (3.67)、更に (3.47) のように $\mathbf{v}_s$ がスカラーの勾配で与えられていることと (3.48) を用いることにより、 $\mathbf{v}_n$ が存在するときのエントロピー保存則

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla_X \cdot (s \mathbf{v}_n) = 0, \quad (3.81)$$

を得ることができる。なお、保存則 (3.65) ~ (3.67) は、系 F においても成り立つ。

このようにして、 $\mathbf{v}_n$ が存在するときの超流動流体力学の方程式 (3.72) ~ (3.78)、及び (3.65) ~ (3.67), (3.47) (但し、 $x \rightarrow X \equiv (t, \mathbf{X})$, $\langle \rangle_{\mathbf{v}_s^{(0)}} \rightarrow \langle \rangle_{\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_n}$ としたもの) を得ることができる。

4 今後の課題

本稿の議論において、 $\mathbf{v}_s$ を一定として考えた。得られた結果を $\mathbf{v}_s \rightarrow \mathbf{v}_s(x)$ と置き換えれば、 $\mathbf{v}_s$ が x に依存しているときの derivative 展開の最低次をとっていることになる。 $\nabla \mathbf{v}_s$ の高次について (散逸の効果) は今後の課題である。

また、常流体の速度 $\mathbf{v}_n$ はガリレイ変換を用いて導入したが、場の理論の枠組みの中で第一原理から $\mathbf{v}_n(x)$ を導入することもこれからの課題である。

謝辞

本研究を行うにあたり、指導していただいた慶應義塾大学理工学部福田礼次郎教授に深く感謝いたします。

参考文献

- [1] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1959.
- [2] Y. A. Nepomnyashchii and A. A. Nepomnyashchii, *Soviet Phys. -JETP* **48**, 493 (1978); *JETP Lett.* **21**, 1 (1975).
- [3] P. C. Hohenberg and P. C. Martin, *Ann. Phys. (NY)* **34**, 291 (1965).
- [4] N. N. Bogolyubov, Jr., M. Yu. Kovalevskii, A. M. Kurbatov, S. V. Peletminskii and A. N. Tarasov, *Usp. Fiz. Nauk.* **159**, 585 (1989). [*Soviet Phys.-Usp.* **32**, 1041 (1989)].
- [5] A. E. Glassgold, A. N. Kaufman and K. M. Watson, *Phys. Rev.* **120**, 660 (1960).

- [6] R. Fukuda, M. Komachiya, S. Yokojima, Y. Suzuki, K. Okumura and T. Inagaki,
Novel Use of Legendre Transformation in Field Theory and Many Particle Systems
— *On-shell Expansion and Inversion Method* —, Suppl. Prog. Theor. Phys. **121**,
Chap. 14 (1995).
- [7] Y. Suzuki and R. Fukuda, "Microscopic Derivation of Two-Fluid Model of ^4He
through Legendre Transformation", (submitted to Ann. Phys.)
- [8] R. Fukuda, Prog. Theor. Phys. **78**, 1487 (1978).
- [9] R. Fukuda, M. Komachiya and M. Ukita, Phys. Rev. **D38**, 3747 (1988).
- [10] M. Komachiya, M. Ukita and R. Fukuda, Phys. Rev. **D42**, 2792 (1990).
- [11] R. Fukuda, in *Proceedings of 1991 Nagoya Spring School on Dynamical Symmetry*
Breaking p 223, ed. by K. Yamawaki.
- [12] Y. Suzuki and R. Fukuda, Phys. Rev. **E53**, 4632 (1996)
- [13] C. De Dominicis and P. C. Martin, J. Math. Phys. **5**, 14 (1964); **5**, 31 (1964).
- [14] G. Jona-Lasinio, Nuovo Cimento **34**, 1790 (1964);
R. Jackiw, Phys. Rev. **D9**, 1686 (1974);
M. Cornwall, R. Jackiw and E. Tomboulis, Phys. Rev. **D10**, 2428 (1974);
R. Fukuda and E. Kyriakopoulos, Nucl. Phys. **B85**, 345 (1975).
- [15] R. Fukuda, Prog. Theor. Phys. **77**, 825 (1987); 845 (1987).