

Hagen-Poiseuille 流の非線形不安定中立曲面

東大 理学部 物理 桑 原 真 二

§ 1. 基礎方程式

流体力学における不安定性の物理的考察は、講究録 24 の“非線形不安定性”においてのべたので³⁾、ここではその数学的面だけをのべる。

二次元、又は軸対称の流れにおいて、座標系、速度および渦度を次のようにとる。

	二 次 元	軸 対 称
座 標	(x, y, z)	$(x, r, \phi) \quad r=y$
速 度	$(u, v, 0)$	$(u, v, 0)$
渦 度	$(0, 0, \omega)$	$(0, 0, \omega)$

Navier-Stokes 方程式は、上の両座標系において次のようにかかれる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + y^{-s} \frac{\partial}{\partial y} (y^{-s} v) = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v y^s \frac{\partial}{\partial y} (y^{-s} \omega) = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + y^{-s} \vartheta (y^s \omega) \right) \quad (1.2)$$

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.3)$$

$$\vartheta = y^s \frac{\partial}{\partial y} \left(y^s \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (1.4)$$

ここで、 $s=0, 1$ は各々二次元、軸対称に対応する。 $(x, y), (u, v), t, \omega$ はそれぞれ、代表的長さ L 、代表的速度 V 、 L/V 、 V/L で無次元化してある。 $R=VL/\nu$ は Reynolds 数である (ν は動粘性率)。速度等を先ず平均 $\bar{u}$ と攪乱 $\tilde{u}$ 等に分け

$$\left. \begin{aligned} u &= \bar{u}(y) + \tilde{u}(x, y, t), & v &= \tilde{v}(x, y, t) \\ \omega &= \bar{\omega}(y) + \tilde{\omega}(x, y, t) \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

とおく。ここで平均流 (又は基本流) は平行流を仮定している。(1.5) を (1.1) ~ (1.3) に代入

すれば、各々平均流と攪乱に対する方程式をうる。

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + y^{-s} \frac{\partial}{\partial y} (y^s \tilde{v}) = 0 \quad (1.1')$$

$$\vartheta \{ y^s (\bar{u}' - R \overline{\tilde{u} \tilde{v}}) \} = 0 \quad (1.2' a)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{\omega} - (\vartheta \bar{u}) \tilde{\omega} - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + y^{-s} \vartheta y^s \right) \tilde{\omega} \\ = - \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{u} \tilde{\omega}) - \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{v} \tilde{\omega} - \overline{\tilde{v} \tilde{\omega}}) \end{aligned} \quad (1.2' b)$$

$$\bar{\omega} = -\bar{u}'(y), \quad \tilde{\omega} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \quad (1.3')$$

攪乱速度 $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ を流れの関数 $\psi(x, y, t)$ で表わし

$$\tilde{u} = y^{-s} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \tilde{v} = -y^{-s} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.6)$$

更に ψ を流れの方向の Fourier 級数に分解し

$$\psi = \phi_1(y) e^{i\alpha(x-ct)} + \phi_2(y) e^{2i\alpha(x-ct)} + \dots + c.c. \quad (1.7)$$

とおく。ここで c, c , はそれより前にある式の複素共役を表わす。上の関係をつかって、最後に平均流と攪乱に対する運動方程式 (1.2' a), (1.2' b) から

$$\vartheta \left[y^s \left\{ \bar{u}' - i\alpha R y^{-2s} (\phi \phi'^* - \phi^* \phi') \right\} \right] = 0 \quad (1.8)$$

$$(\bar{u} - c)(\vartheta - \alpha^2) \phi - (\vartheta \bar{u}) \phi - \frac{1}{i\alpha R} (\vartheta - \alpha^2)^2 \phi = 0 \quad (1.9)$$

をうる。ただし Meksyn-Stuart 流⁴⁾に Fourier 第一成分だけにとどめてある。すなわち $\phi = \phi_1$ である。(1.8), (1.9) がここで考える非線形不安定問題の基礎方程式である。非線形性は (1.8) の中括弧の中の第二項で、物理的には Reynolds 応力による攪乱の基本流へのはねかえりである。

§ 2. Hagen-Poiseuille 流の解析

我々は、円管内の流れ、すなわち Hagen-Poiseuille 流の不安定性を考える。この流れは、線形理論では不安定性の出ない場合である。

先ず

$$\varphi = \sqrt{\alpha R} \phi \quad (2.1)$$

とおき、軸対称 ($s=1$) の場合の (1.8), (1.9) をかきあらためると

$$\bar{u} = A_0 + A_2 r^2 - i \int_0^r r^{-2} (\varphi \varphi'^* - \varphi^* \varphi') dr \quad (2.2)$$

$$(\bar{u} - c)(\vartheta - \alpha^2)\varphi - (\vartheta \bar{u})\varphi = \frac{1}{i\alpha R}(\vartheta - \alpha^2)^2 \varphi \quad (2.3)$$

となる。ここで L は管の半径をとり、 U は次の条件：

$$\int_0^1 \bar{u} r dr = 1 \quad (2.4)$$

により定まる。すなわち、平均流と流量の等しい放物形速度の軸上での速度を U ととる。

境界条件は

$$\left. \begin{aligned} r=1 \text{ で : } & \varphi = \varphi' = 0, \quad \bar{u} = 0 \\ r=0 \text{ で : } & \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \varphi = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \left(\varphi'' - \frac{1}{r} \varphi' \right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

である。最初のものは管壁での粘着条件、第二のものは軸上における $\tilde{v}$ および応力 τ_{xr} が 0 になる条件である。

我々は φ が直交関数系で展開できるものとする：

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(y) \quad (2.6)$$

ここで φ_n は

$$\varphi_n(1) = \varphi'_n(1) = 0 \quad (2.7a)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \varphi_n(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} (\varphi'' - \frac{1}{r} \varphi_n') = 0 \quad (2.7b)$$

$$\varphi_n''(1) \neq 0 \quad (2.7c)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \varphi_n'(r) \neq 0 \quad (2.7d)$$

を満足するものとする。(2.7a), (2.7b)は各 φ_n が境界条件(2.5)を満足することを, (2.7c)は管壁の perturbed shear stress が0にならない条件, (2.7d)は軸上の perturbed axial velocity が0にならない条件である。(2.7)の条件を満足する直交関数系を古典的直交各項式の中からえらべば, Jacobi の多項式 $G_n(7, 3, y^2)$ である。したがって φ_n を

$$\varphi_0 = r^2(1-r^2)^2, \quad \varphi_1 = r^2(1-r^2)^2(3-8r^2) \quad (2.8)$$

等とおく。 φ_n を二項までとり, (2.4)を使って, 先ず平均流 $\bar{u}$ を計算すると

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= 1-r^2 + af(r) & a &= a_0 a_1^* - a_0^* a_1 \\ f &= \frac{4}{3 \cdot 5 \cdot 7} \left[4-7 \{ 6-5(1-r^2) \} (1-r^2)^2 \right] (1-r^2) \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

がえられる。 $af(r)$ が Reynolds 応力による平均流の変形である。

$$\mathcal{L} \equiv (\bar{u}-c)(\vartheta-\alpha^2) - a\vartheta f - \frac{1}{i\alpha R} (\vartheta^2 - 2\alpha^2\vartheta + \alpha^4) \quad (2.10)$$

とおくと, (2.3)は φ_n の始めの二項までとり

$$a_0 \vartheta \varphi_0 + a_1 \vartheta \varphi_1 = 0 \quad (2.11)$$

となる。係数 a_0, a_1 を Galerkin の方法で定める。

$$(\varphi_n \vartheta \varphi_m) = \int_0^1 \varphi_n \vartheta \varphi_m dr \quad (2.12)$$

の表式をつかい, (2.12)に φ_0 および φ_1 をかけて積分すると

$$\left. \begin{aligned} (\varphi_0 \vartheta \varphi_0) a_0 + (\varphi_0 \vartheta \varphi_1) a_1 &= 0 \\ (\varphi_1 \vartheta \varphi_0) a_0 + (\varphi_1 \vartheta \varphi_1) a_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

をうる。(2.13)の a_0 , a_1 を消去すると

$$\begin{vmatrix} (\varphi_0 \vartheta \varphi_0) & (\varphi_0 \vartheta \varphi_1) \\ (\varphi_1 \vartheta \varphi_0) & (\varphi_1 \vartheta \varphi_1) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.14)$$

これは、複素の代数式

$$F(\alpha, R, a, c) = 0 \quad (2.15)$$

の形となる。線形の場合の特性方程式に相当するものである。ただし攪乱の振巾を表わす a をふくんでいる。複素式(2.15)より c を消去すると実の代数式

$$G(\alpha, R, a) = 0 \quad (2.16)$$

をうる。これは中立曲面を表わす。我々は振巾 $a \equiv a_0 a_1^* - a_0^* a_1$ の代りにもっと物理的な乱流のエネルギー

$$E = \frac{1}{2} \int_0^1 r (\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) dr \quad (2.17)$$

を用いる。

第1図は、(R, α, E)空間における中立曲面のスケッチである。第2図は中立曲線すなわち中立曲面の(R, α)面への投影である。unexpected branchとあるのは、 α の小さい所で近似が悪くなるために生じたものと考えられる。すなわち中立曲面の α の小さい側は、やぶれて開いた形をしている。第3図は中立曲面の $R = \text{const}$ における断面である。同図にある点線は中立曲面の切触面が E 軸に平行になる点をつらねたもので、中立曲線の投影前の曲面上の位置である。第4図は、臨界点における速度分布。第5図は曲面上で $R = 1, 600$, $\alpha = 7.5, 6.0, 4.5$ の場所における速度分布である。もちろん、上面と下面とでは速度分布はことになっている。これらによって、Reynolds応力による基本流の変形は相当大きいことがわかる。

臨界点における Reynolds 数 R_{cr} , 波数 α_{cr} は

$$R_{cr} = 656.741, \quad \alpha_{cr} = 5.77644 \quad (2.18)$$

となる。実験的に同じ装置で R を下から徐々に上げていった（圧力勾配を上げる）場合を考えよう。線形理論が適用可能な場合は、 $R > R_{cr}$ で流れの中にある攪乱の最も不安定な Fourier 成分が選択的に励起される。非線形性はその不安定性に本質的な役割をはたす流れにおいて、臨界点において不安定が起るためには、 α_{cr} の Fourier 成分の振巾が有限でなければならない。かかる場合には、臨界状態で層流から乱流へうつるときに、流量は有限量だけ減小する（平均圧力勾配は等しい）。したがって流量にもとずいてきめた Reynolds 数にも有限の差が生ずる。そこで、臨界状態で、同じ圧力勾配の層について Reynolds 数を計算すると

$$R_{cr}^{lam} = 1212.9 \quad (2.19)$$

をうる。これはどんな初期攪乱を入れても不安定にならない上限の層流に関する Reynolds 数である。これが、ふつう観測される臨界 Reynolds 数である。今日実験的に知られている R_{cr} は 1800 ～ 1900 である。¹⁾ 初期攪乱に適當なものを入れてやれば、あるいは、 R_{cr} がもっと下るかもしれない。

文 献

- 1) Dryden, H. L.: Turbulent Flows and Heat Transfer (1959, Princeton U.P.)
ed. by C. C. Lin 3.
- 2) Kuwabara, S.: Phys. Fluids Suppl. 10 (1967) S115.
- 3) 桑原 真二 : 数理解析研講究録 24 (1967) 59.
- 4) Meksyn, D. & J. T. Stuart: Proc. Roy. Soc. A208 (1951) 517 - 26.
- 5) Stuart, J. T.: Applied Mechanics, Proc. 10th Congr. of Appl. Mech. (1960, Stresa) ed.
by Rolla, F. & W. T. Koitor, 63.

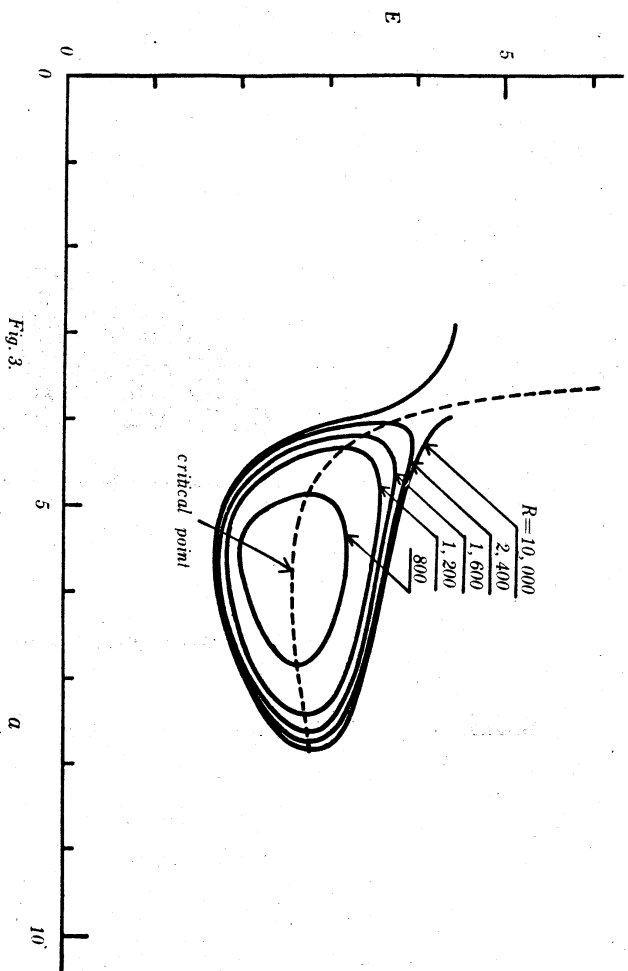


Fig. 3.

Cross Sections of Neutral Surface for Hagen-Poiseuille Flow

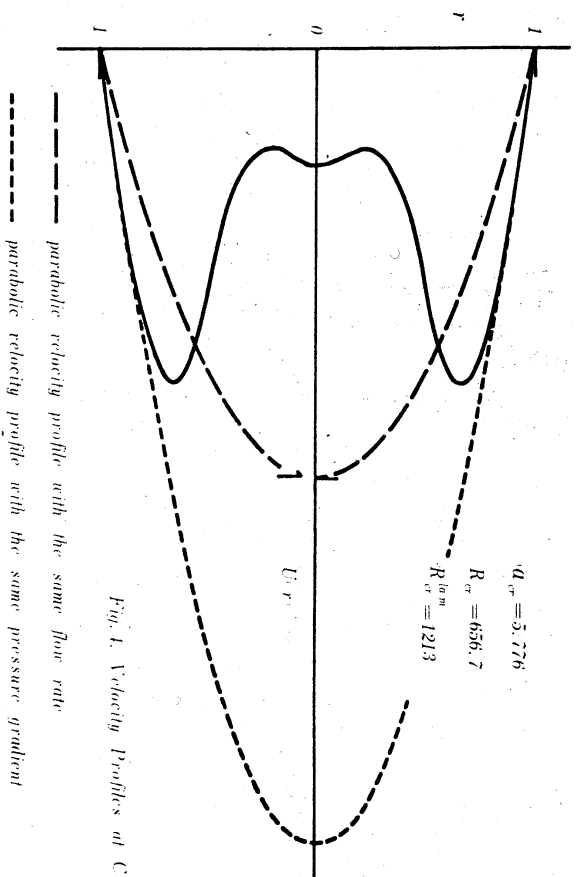


Fig. 4. Velocity Profiles at Critical Condition

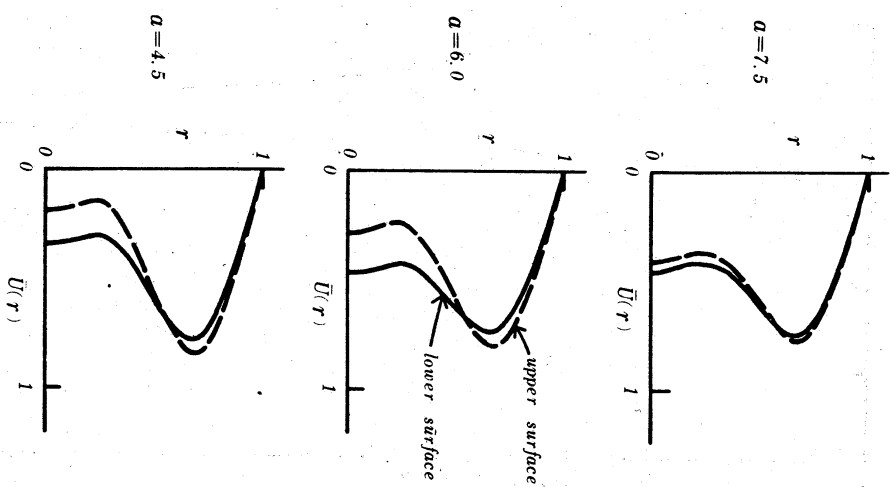


Fig. 5. Mean Flow Velocity Profiles at $R=1,600$

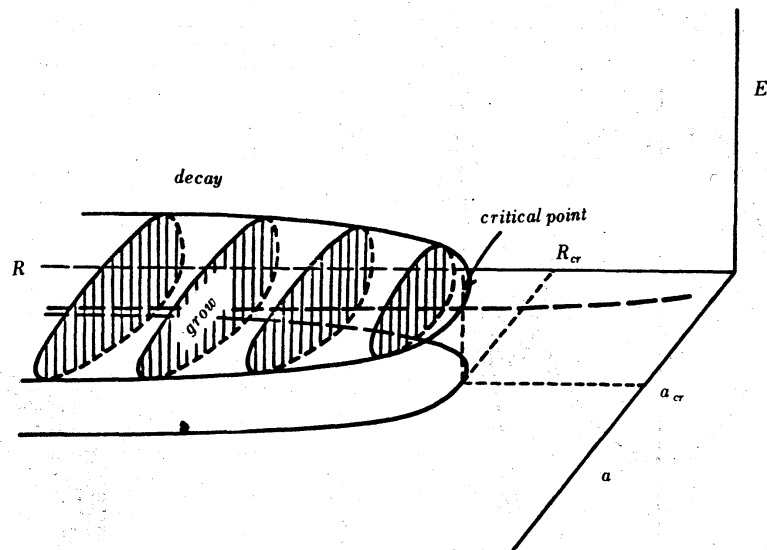


Fig. 1. Neutral Surface for Hagen-Poiseuille Flow

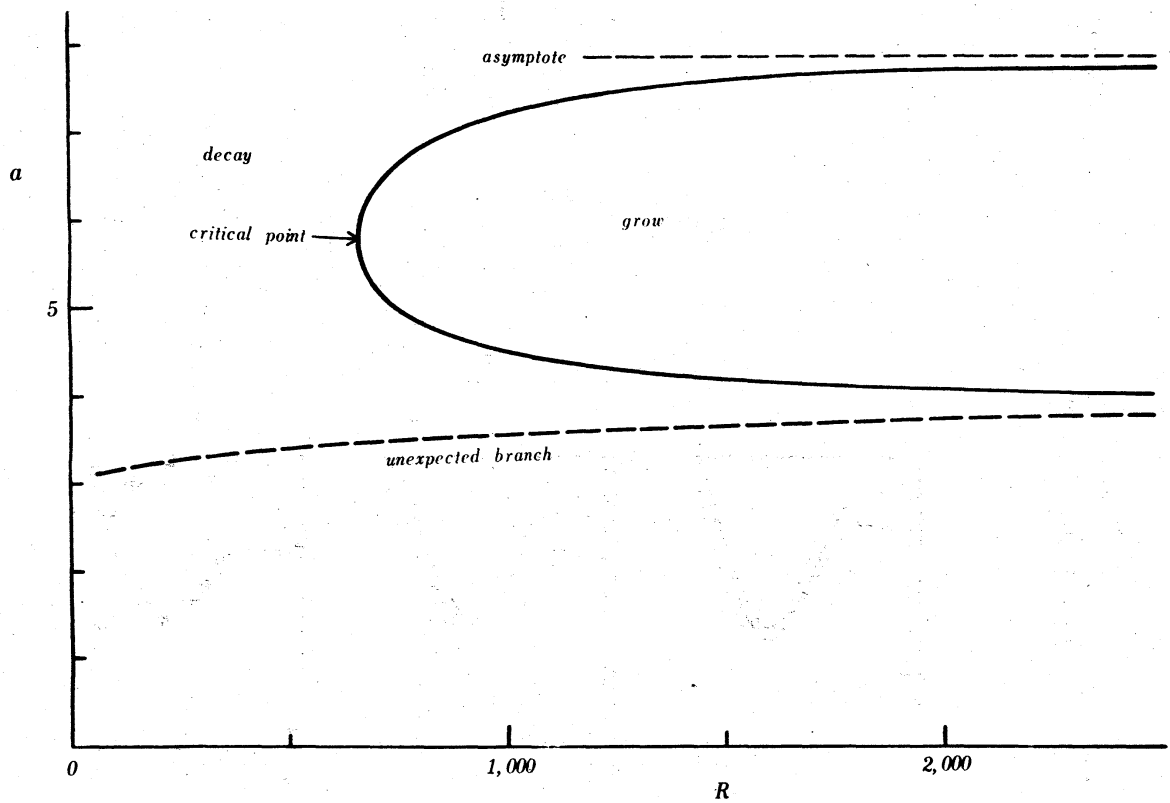


Fig. 2. Neutral Curve for Hagen-Poiseuille Flow