

対称型式とその応用

(酒井による cotangent dimension の理論)

東大 理 倉本義之

本稿は、酒井文雄氏による cotangent dimension の理論の紹介である。詳しくは [9] を参照されたい。

X を非特異完備代数多様体 (もしくはコンパクト複素多様体) とし, Ω_X^1 を X 上の正則 1-型式の芽のなす層とする. Ω_X^1 の対称積に付随して, X の cotangent dimension とよばれる不変量 $\lambda(X)$ が定義される. 小平次元 $c(X)$ による分類に $\lambda(X)$ を加えて, より精密な分類理論を作ることが目標である。

§1. ベクトル束の対称積に関する事実

X を n 次元コンパクト複素多様体とし, E を X 上のベクトル束とする。ここで, ベクトル束とは有限階局所自明連接層を意味するものとする。 $S^m E$ を E の m 階対称積とするとき,

$\Omega(X, E) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} H^0(X, S^m E)$ は自然な積によって graded ring となる。

定義. X の E -dimension $\lambda(E, X)$ とは,

$$\lambda(E, X) = \text{tr. deg. } \Omega(X, E) - \text{rank}(E),$$

$P(E)$ を projective bundle $\text{Proj}(\bigoplus_{n=0}^{\infty} S^n E)$ とし, $\mathcal{O}_{P(E)}(1)$ を $P(E)$ 上の tautological line bundle とする。

$\text{rank}(E) = r$ とおけば, $\lambda(E) \neq -r$ のとき

$\lambda(E, X) = \kappa(\mathcal{O}_{P(E)}(1), P(E)) - (r-1)$ となることが直ちにわかる。($\lambda(E, X) = -r$ のときは定義により $\kappa(\mathcal{O}_{P(E)}(1), P(E)) = -\infty$ である。)

$\dim P(E) = n+r-1$ であるから, $-r \leq \lambda(E, X) \leq n$ となる。

定義. inverse Chern class $\tilde{c}_i(E) \in H^{2i}(X, \mathbb{Z})$ とは,

$$\sum \tilde{c}_i(E) = (\sum (-1)^i c_i(E))^{-1} = (c(E^\vee))^{-1}$$

によって定義される。ことに, $c(E) = \sum c_i(E)$ は E の total Chern class, $E^\vee$ は E の dual である。
 $\tilde{c}_1(E) = c_1(E)$, $\tilde{c}_2(E) = c_1^2(E) - c_2(E)$, ... となる。

$\tilde{c}_i = c_i(\mathcal{O}_{P(E)}(1))$ と書くと次が成り立つ。

$$\sum_{i=0}^{n+r-1} [P(E)] = \tilde{c}_n(E) [X] \quad ([6])$$

命題 1. E を X 上のベクトル束とする。

ある $m > 0$ に対して $S^m E$ が *global section* で生成されるならば, $\lambda(E, X) \geq 0$. さらに, このとき $\lambda(E, X) = n \Leftrightarrow \tilde{C}_n(E) > 0$.

命題 2. $0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0$ を X 上のベクトル束の完全列とすると,

$\dim H^0(X, S^m E) \leq \sum_{P+Q=m} \dim H^0(X, S^P E' \otimes S^Q E'')$.
さらに, 列が *split* するならば等号が成り立つ.
系. $E'(\text{resp. } E'')$ が自明ならば,

$\lambda(E, X) \leq \lambda(E'', X)$ (resp. $\lambda(E, X) \leq \lambda(E', X)$).
さらに, 列が *split* すれば等号が成り立つ.

例 1. (a) E を $\mathbb{P}_1$ 上の階数 2 のベクトル束とする。ある整数 P, Q があって, $E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(P) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(Q)$ となることが知られているがこのとき

$$\lambda(E, \mathbb{P}_1) = \begin{cases} 1 & P > 0 \text{ または } Q > 0 \text{ のとき} \\ 0 & P = Q = 0 \text{ のとき} \\ -1 & P = 0, Q < 0 \text{ または } P < 0, Q = 0 \text{ のとき} \\ -2 & P < 0, Q < 0 \text{ のとき} \end{cases}.$$

(b) C を楕円曲線とし, F_r を *unique extension*

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow F_r \rightarrow F_{r-1} \rightarrow 0, \quad r=2, 3, \dots$$

とする。こゝに, $F_1 = \mathcal{O}_C$. Atiyah [1] により

$S^m(F_2) = F_{m+1}$, すべての r に対して
 $\dim H^0(C, F_r) = 1$ 。よって $\lambda(F_2, C) = -1$ 。

命題 3. $0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0$ を X 上のベクトル束の完全列とすると, 次の *spectral sequence* が存在する。

$$E_1^{p,q} = H^q(X, \wedge^p E' \otimes S^{m+p} E) \Rightarrow H^{p+q}(X, S^m E'') \\ (-m \leq p \leq 0) .$$

命題 4. $f: X \rightarrow Y$ をコンパクト複素多様体 X, Y の間の *surjective morphism* とし, E を Y 上のベクトル束とすると,

$$\lambda(f^*E, X) = \lambda(E, Y) .$$

命題 5. $f: X \rightarrow Y$ をコンパクト複素多様体 X, Y の間の *fiber space* とし, E を X 上のベクトル束とすると,

$$\lambda(E, X) \leq \lambda(E_Y, X_Y) + \dim Y .$$

ここに, $X_Y = f^{-1}(Y)$ は *general fiber*, E_Y は E の X_Y への制限とする。

命題 6. E, F をコンパクト複素多様体 X, Y 上のベクトル束とすると,

$$\lambda(\pi_X^* E \oplus \pi_Y^* F, X \times Y) = \lambda(E, X) + \lambda(F, Y) .$$

ここに, π_X, π_Y は直積 $X \times Y$ から X, Y への射影とする。

§2. Cotangent Dimension と Fiber Spaces

X を n 次元コンパクト複素多様体とする。

Ω'_X を X 上の正則 1-型式の芽の層とする。

定義. $Q_m(X) = \dim H^0(X, S^m \Omega'_X)$ (cotangent m -genus)

$$\lambda(X) = \lambda(\Omega'_X, X) \quad (\text{cotangent dimension}).$$

次のような事実が定義から直ちにわかる。

$$-\dim X \leq \lambda(X) \leq \dim X.$$

$$Q_m(X) \sim O(m^{n-1+\lambda}) \quad (\text{漸近的}).$$

$$\lambda(X) = -\dim X \iff \text{すべての } m > 0 \text{ に対して}$$

$$Q_m(X) = 0.$$

$$\Omega'_X \text{ が自明} \Rightarrow Q_m(X) = \binom{m+n-1}{m} \quad (\Rightarrow \lambda(X) = 0).$$

$$\Omega'_X \text{ が ample} \Rightarrow \lambda(X) = \dim X.$$

命題 7. $f: X \rightarrow Y$ をコンパクト複素多様体 X, Y の間の generically surjective meromorphic map とすると, 各整数 $m > 0$ に対し injection

$$f^*: H^0(Y, S^m \Omega'_Y) \hookrightarrow H^0(X, S^m \Omega'_X)$$

が存在し,

$$\lambda(X) + \dim X \geq \lambda(Y) + \dim Y$$

が成り立つ。さらに, $\dim X = \dim Y$ で f が bimeromorphic ならば, f^* は isomorphism である。

系. $Q_m(X)$, $\lambda(X)$ は X の bimeromorphic invariants である。

注意. X が特異点をもつ複素空間のとき, X の非特異モデル X^* をとって $Q_m(X) = Q_m(X^*)$, $\lambda(X) = \lambda(X^*)$ と定義することができる。

定理 1. $f: X \rightarrow Y$ をコンパクト複素多様体の間の不分岐被覆とすると,

$$\lambda(X) = \lambda(Y).$$

証明 $\Omega_X^1 = f^* \Omega_Y^1$ より, 命題 4 を使えばよい。

定理 2. X, Y をコンパクト複素多様体とするとき,

$$\lambda(X \times Y) = \lambda(X) + \lambda(Y).$$

証明 $\Omega_{X \times Y}^1 = \pi_X^* \Omega_X^1 \oplus \pi_Y^* \Omega_Y^1$ より, 命題 6 から従う。

注意. $\bar{X}$ をコンパクト複素多様体, D を $\bar{X}$ 上の単純正規交叉型因子とする。 $X = \bar{X} - D$ とする。

$$\overline{Q}_m(X) = \dim H^0(\bar{X}, S^m(\Omega_{\bar{X}}^1(\log D))) \quad (\text{logarithmic})$$

cotangent m -genus),

$\bar{\lambda}(X) = \lambda(\Omega'_{\bar{X}}(\log D), \bar{X})$ (logarithmic cotangent dimension)

と定義する。

fiber space とはコンパクト複素多様体の間の surjective morphism $f: X \rightarrow Y$ で general fiber が連結であるものを意味するものとする。

定理 3. $f: X \rightarrow Y$ を fiber space とすると,

$$\lambda(\Omega'_{X,Y}, X_Y) \leq \lambda(X_Y).$$

ここに X_Y は general fiber, $\Omega'_{X,Y}$ は Ω'_X の X_Y への制限とする。さらに, この fiber space が generically locally trivial ならば等号が成り立つ。

証明 conormal bundle $N_{X_Y/X}^\vee$ は自明束 I であるから, 完全列

$$0 \rightarrow I \rightarrow \Omega'_{X,Y} \rightarrow \Omega'_{X_Y} \rightarrow 0$$

がある。よって命題 2 の系からはいめの主張が出る。あとは, 上の完全列の extension class はこの family の y での Kodaira-Spencer class に対応するので, それが split することとこの

fiber space が generically locally trivial になること
とが同値である のに 注意すればよい。

定理 4. $f: X \rightarrow Y$ を fiber space とするとき,

$$\lambda(X) \leq \lambda(X_Y) + \dim Y .$$

ここに, X_Y は general fiber .

証明 命題 5 と 定理 3 より 直ちに 出る。

定理 5. $f: X \rightarrow Y$ を fiber space とし,
 $\lambda(Y) = \dim Y$ と 仮定すると,

$$\lambda(X) = \lambda(\Omega^1_{X/Y}, X_Y) + \lambda(Y) .$$

ここに X_Y は general fiber .

証明 λ に関する 藤田の結果 ([5] Proposition 1.)
 を使って 示される。詳細は略す。

系. $f: X \rightarrow Y$ を F を fiber とする fiber bundle
 とし, $\lambda(Y) = \dim Y$ と 仮定すれば,

$$\lambda(X) = \lambda(F) + \lambda(Y) .$$

例 2. B を 種数 ≥ 2 の 曲線, $f: S \rightarrow B$ を
 B 上の 楕円曲面 とする。 C を f の general fiber
 とする。完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \Omega^1_{S|C} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

に対し, 次の 2 つ の 場合 が 考え られる。

(i) $\lambda(\Omega^1_{S|C}, C) = 0$, このとき列は split する。

(ii) $\lambda(\Omega^1_{S|C}, C) = -1$, このとき列は non-trivial extension を与える。 (例 1.(b) 参照)

この事と定理 3, 5 より

$$\lambda(S) = \begin{cases} 1 & \text{constant moduli (constant } j\text{-invariant)} \\ 0 & \text{non-constant moduli} \\ & \text{(non-constant } j\text{-invariant)} \end{cases}$$

がわかる。

注意. 楕円曲面の family $\pi: S \rightarrow T$ で, 各 fiber S_t が 種数 ≥ 2 の曲線 B_t 上の楕円曲線になっているものとする。 $j(t_0)$ が constant, $j(t)$ が一般に non-constant であると仮定する。ここに $j(t)$ は S_t の j -invariant とする。すると $\lambda(S_{t_0}) = 1$, $\lambda(S_t) = 0$ となり, cotangent dimension が deformation invariant ではないということの例を与える。

定理 6. X をコンパクト複素多様体, a を X の meromorphic function field の超越次数とすると,

$$\lambda(X) \leq a(X).$$

証明 [11] Theorem 3.8 より直ちに出来る。

Conjecture Λ . X を非特異完備代数多様体
(あるいはコンパクト複素多様体) とすると,

$$\Lambda_+ : \lambda(X) \leq \kappa(X) \quad \text{if } \kappa(X) \geq 0.$$

$$\Lambda_{-\infty} : \lambda(X) \leq \dim X - 2 \quad \text{if } \kappa(X) = -\infty.$$

Λ_+ は次の特別な場合 Λ_0 から従う。

Conjecture Λ_0 . $\kappa(X) = 0 \Rightarrow \lambda(X) \leq 0$.

- X が Kähler で $H^2(X, \mathbb{Q})$ において $c_1(X) = 0$ のとき Λ_0 が成り立つ。(Kobayashi [7])
- 代数曲面に対して Λ が成り立つ。
- ある m に対し $|mK|$ に base point がなければ Λ_+ は成り立つ。(前原-藤田)
- 次の Conjecture M には反例があることが上野健爾氏により指摘された。

Conjecture M. $f: X \rightarrow Y$ を fiber space とするとき,
 $\lambda(Y) \neq -\dim Y$ ならば

$$\lambda(X) \leq \lambda(X_Y) + \lambda(Y).$$

ここに, X_Y は general fiber.

反例 (上野) X を $\lambda(X) = \dim X$ なる非特異射影代数多様体とする。 X の Lefschetz pencil によ

る map: $X \rightarrow \mathbb{P}_1$ の不定点を除去して, surjective morphism $f: X' \rightarrow \mathbb{P}_1$ を得る。ことに X' は X に birational で, $\lambda(X') = \lambda(X)$ 。楕円曲線 E と分岐被覆 $\pi: E \rightarrow \mathbb{P}_1$ をとり, fiber product

$X'' = E \times_{\mathbb{P}_1} X'$ をつくる。 $\Phi: X'' \rightarrow X'$, $g: X'' \rightarrow E$ を射影とする。

$$\begin{array}{ccc} X'' & \xrightarrow{\Phi} & X' \\ g \downarrow & & \downarrow \\ E & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}_1 \end{array}$$

fiber space $g: X'' \rightarrow E$ を考えると, general fiber

$g^{-1}(y)$ に対し明らかに $\lambda(g^{-1}(y)) \leq \dim X'' - 1$ 。

E は楕円曲線だから $\lambda(E) = 0$ 。また,

$\dim X'' = \dim X' = \dim X$ だから命題 7 より

$\lambda(X'') \geq \lambda(X')$ 。よって $\lambda(X'') = \lambda(X) = \dim X$ 。

すなわち,

$$\lambda(X'') = \dim X > \dim X - 1 \geq \lambda(g^{-1}(y)) = \lambda(g^{-1}(y)) + \lambda(E)$$

§3. アーベル多様体の部分多様体と

射影空間の完全交叉部分多様体

この節では部分多様体を考察する。

命題 8. X をコンパクト複素多様体 Y の部分多様体とすると, 次の spectral sequence が

ある。

$$\begin{aligned} E_1^{p,q} &= H^q(X, \bar{\Lambda}^p N_{X/Y}^\vee \otimes S^{m+p} \Omega_{Y|X}^1) \\ &\Rightarrow H^{p+q}(X, S^m \Omega_X^1) . \end{aligned}$$

証明 完全列 $0 \rightarrow N_{X/Y}^\vee \rightarrow \Omega_{Y|X}^1 \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow 0$ に命題3を適用する。

A をアーベル多様体, X をその n 次元部分多様体とすると, 上野 [11] p. 116 の議論により, $Q_m(X) \geq \binom{m+n-1}{m}$ がわかる。よって $\lambda(X) \geq 0$ 。

定理7. X をアーベル多様体 A の部分多様体とする。normal bundle $N_{X/A}$ が ample ならば,

$$\lambda(X) = \min(\dim X, \operatorname{codim} X) .$$

証明 case (i) $\dim X > \operatorname{codim} X$. $\Omega_{A|X}^1$ は自明束 I であるから, spectral sequence

$$\begin{aligned} E_1^{p,q} &= H^q(X, \bar{\Lambda}^p N_{X/A}^\vee \otimes S^{m+p} I) \Rightarrow H^{p+q}(X, S^m \Omega_X^1) \\ &\quad (-m < p < 0) \end{aligned}$$

がある。 $N_{X/A}$ を ample と仮定したから, Sommese の消滅定理 ([10] Proposition (1.14)) により,

$$E_1^{p,q} = 0 \quad \text{for } p < 0, \quad p+q \leq (\dim X - \operatorname{codim} X) - 1 .$$

$$\text{よって, } E_{\infty}^{p,-p} = \begin{cases} 0 & \forall p < 0 \\ H^0(X, S^m I) & \forall p = 0 \end{cases}$$

従って, $Q_m(X) = \binom{m + \dim A - 1}{m}$. ゆえに,
 $\lambda(X) = \operatorname{codim} X$.

case (ii) $\dim X \leq \operatorname{codim} X$.

$\tilde{C}(\Omega'_X) = \tilde{C}(\Omega'_A|_X) \subset (N_{X/A})$ であるから,

$\tilde{C}_n(\Omega'_X) = C_n(N_{X/A})$. ことに $n = \dim X$. $N_{X/A}$ は ample で, $\dim X \leq \operatorname{codim} X = \operatorname{rank} N_{X/A}$ 故に,
 $C_n(N_{X/A}) > 0$ (Bloch-Gieseker [3]). Ω'_X が global section で生成されるから, 命題 1 より
 $\lambda(X) = \dim X$ を得る. Q.E.D.

次に射影空間内の完全交叉部分多様体を考えよう。 X を $\mathbb{P}_{n+r}$ 内の r 個の超曲面の完全交叉とし, 各超曲面の次数を $d_1, \dots, d_r$ とすると,

$$N = N_{X/\mathbb{P}_{n+r}} = H^{d_1} \oplus \dots \oplus H^{d_r}.$$

ここに H は $\mathbb{P}_{n+r}$ の超平面束の X への制限とする。 $k \leq r$ に対し,

$$\bigwedge^k N^\vee = \bigoplus_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq r} H^{-d_{i_1} - \dots - d_{i_k}}.$$

[8] p. 521 によれば, $H^i(X, S^m \Omega'_{\mathbb{P}|X} \otimes H^t) = 0$

for $i < n$, $m \geq t + 2$.

よって, 命題 8 の spectral sequence において,

$$E_1^{p,q} = H^q(X, \wedge^p N^V \otimes S^{m+p} \Omega^1_{P|X}) = 0 \text{ for } q \neq n.$$

ゆえに $m < n$ ならば, $E_1^{p,-p} = 0$, $E_\infty^{p,-p} = 0$

for $-m \leq p \leq 0$. よって $m < n$ に対して,

$Q_m(X) = 0$ となる。同様にして $n > r$ ならば

$Q_m(X) = 0$ for all m が示される。まとめると,

定理 8. X を射影空間 P_N 内の完全交叉部分多様体とすると, $m < \dim X$ に対し $Q_m(X) = 0$.

$\dim X > \operatorname{codim} X$ とすれば, すべての m に対して

$Q_m(X) = 0$ (即ち, $\lambda(X) = -\dim X$).

注意. $\dim X \leq \operatorname{codim} X$ のときは, $Q_m(X)$ は消えないことがある。

§4. 代数曲面の分類

この節では cotangent dimension λ による代数曲面の分類を論ずる。 $\kappa = -\infty, 0$ の場合以外は分類は完成していない。 $\kappa = 1, 2$ については, $-2 \leq \lambda \leq \kappa$ の各 λ に対しその例が存在する。

(A) $\kappa = -\infty$. この class の曲面 S は, ある代数曲線 C に対し $P_1 \times C$ に birational である。定理 2 より, $\lambda(S) = \lambda(P_1) + \lambda(C) = \lambda(C) - 1$ だから,

$$\lambda(S) = \begin{cases} -2 & C = P^1 \text{ のとき} \\ -1 & C \text{ が楕円曲線のとき} \\ 0 & C \text{ の種数} \geq 2 \text{ のとき} \end{cases}.$$

(B) $\kappa = 0$. (i) アーベル曲面と超楕円曲面

アーベル曲面については明らかに $\lambda = 0$.
超楕円曲面はアーベル曲面を不分離被覆に
もつから, $\lambda = 0$.

(ii) K3 曲面とエンリケス曲面

$\S 3$ にて P_3 内の 4 次曲面について $\lambda = -2$ である
ことをみた。一般には小林による次の結果が
ある。

定理 ([7]) S を Kähler K3 曲面とすると,

$$\lambda(S) = -2.$$

より一般に彼は X が単連結なコンパクト Kähler
多様体で K_X が自明なとき, すべての m に対し
て $Q_m(X) = 0$ となることを示している。

エンリケス曲面は K3 曲面を二重不分離被
覆にもつから $\lambda = -2$.

(C) $\kappa = 1$, $\lambda = 0, 1$. $\S 2$ の例 2 の楕円曲面が,
この class の曲面の例になっている。

$$(D) \begin{cases} \kappa=1, \lambda=-2, -1 \\ \kappa=2, \lambda=-2, -1, 0 \end{cases}$$

次のような曲線の直積の quotient が, これらの classes に属する。即ち, C', C'' を2つの曲線とし, それぞれが C_0', C_0'' の2重被覆になっているとする。 ι', ι'' を対応する involutions とし, $\iota = \iota' \times \iota''$ とおく。 S を $C' \times C'' / \langle \iota \rangle$ の極小非特異モデルとする。 C', C'', C_0', C_0'' の種数に応じて S は上の各場合の実例を与える。

(E) $\kappa=2, \lambda=-2$. $\kappa=2$ なる P_3 内の超曲面はすべてこの class に属する (定理8)。この class の曲面の quotient で $\kappa=2$ なるものもすべてこの class に属する (命題7)。たとえば, Godeaux 曲面など。

(F) $\kappa=2, \lambda=1$. 3次元アーベル多様体の超曲面で $\kappa=2$ なるものはこの class に属する (定理7)。

(G) $\kappa=2, \lambda=2$. $\tilde{C}_2 = C_1^2 - C_2 > 0$ なる曲面はこの class に属する (Bogomolov [4])。この class の曲面の被覆曲面はすべてこの class に属

する。

$\tilde{c}_2 > 0$ なる曲面の例としては, $\mathbb{P}^2 + r$ ($r \geq 2$) 内の一般の完全交差曲面, 種数 ≥ 2 なる 2 つの曲線の直積などがある。

なお, $\tilde{c}_2 < 0$ で $\kappa=2$, $\lambda=2$ なる例もたくさんある。即ち, $\tilde{c}_2 > 0$ なる曲面 S 上の ample line bundle L をとり, $|2mL|$ の非特異因子 B_m をとる。 B_m 上で分岐する二重被覆 $\pi: \tilde{S} \rightarrow S$ を構成すると, 十分大きい m に対し $\tilde{c}_2(\tilde{S}) < 0$, $\kappa(\tilde{S}) = \lambda(\tilde{S}) = 2$ となる。

§ 付録 $\mathbb{P}^2 - \{\text{lines}\}$ の $\bar{\kappa}$ による分類

開代数曲面の最も簡単な例として $\mathbb{P}^2 - \{\text{lines}\}$ がある。Itaka [2] において $\mathbb{P}^2 - \{\text{lines}\}$ の研究がなされているが, その $\bar{\kappa}$ による分類に $\bar{\lambda}$ による分類を加えてみる。 $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_8$ を $\mathbb{P}^2$ 内の直線とし, $\Delta = \bigcup_{i=0}^8 \Delta_i$, $S = \mathbb{P}^2 - \Delta$ とすると, $\bar{\kappa}(S)$ 及び $\bar{\lambda}(S)$ の値は次の表のようになる。

Δ の型	$\bar{\kappa}$	$\bar{\lambda}$
I $\times$	$-\infty$	-2
II $\times$	0	0
II $_{\frac{1}{2}}$ $\times$ $g \geq 3$	1	1
III その他	2	$\begin{cases} 1 & \text{if } g=3 \\ 2 & \text{if } g \geq 4 \end{cases}$

証明 $S = \bar{S} - D$, $\bar{S}$ は非特異完備曲面, D は $\bar{S}$ の単純正規交叉型因子とする。I, II は容易にわかるので, $\bar{\kappa}(S) \geq 1$ とする。このとき $\Omega'_{\bar{S}}(\log D)$ は global section で生成される。よって命題 1 により $\bar{\lambda}(S) \geq 0$ で,

$$\bar{\lambda}(S) = 2 \iff C_1^2(\Omega'(\log D)) - C_2(\Omega'(\log D)) > 0.$$

$$C_1^2(\Omega'(\log D)) = \bar{C}_1^2, \quad C_2(\Omega'(\log D)) = \bar{C}_2 \quad \text{と書く。}$$

$\{P_1, \dots, P_g\}$ を Δ 上の重複度 3 以上の点の集合とし, λ_j を P_j における Δ の重複度とすると,

[2] P.7~8 により,

$$(*) \quad \bar{C}_1^2 - \bar{C}_2 = \frac{1}{2}(g-2)(g-1) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^g (\lambda_j - 2)(\lambda_j - 3).$$

これより, II $_{\frac{1}{2}}$ 及び III で $g=3$ のとき (すなわち Δ が一般の位置の 4 本の直線よりなるとき)

に $\bar{C}_1^2 - \bar{C}_2 = 0$ がわかる。よってこのとき,

$\bar{\lambda}(S) < 2$ であり, $\bar{\lambda}(S) \geq 1$ なることは直接確かめられて $\bar{\lambda}(S) = 1$ がわかる。Ⅲで $g \geq 4$ なる場合に $\bar{c}_1^2 - \bar{c}_2 > 0$ なることは(*)から g に関する帰納法で示される。

参考文献

- [1] Atiyah, M.: Vector bundles over an elliptic curve.
Proc. London Math. Soc. (3) 7, 27 (1957)
414-452
- [2] Iitaka, S.: Geometry on Complements of Lines
in $\mathbb{P}^2$. Tokyo Journal of Math. vol.1, No.1,
1-19
- [3] Bloch, S. & Gieseker, D.: The positivity of the
Chern classes of an ample vector bundles.
Invent. Math. 12 (1971) 112-117
- [4] Bogomolov, F.A.: Families of curves on a
surface of general type. Soviet Math.
Dokl. 18 (1977) 1041-1044
- [5] Fujita, T.: Some remarks on Kodaira
dimensions of fiber spaces. Proc. Japan
Acad. 53 Ser. A (1977) 28-30
- [6] Gieseker, D.: P-Ample bundles and their
Chern classes. Nagoya Math. J. 43
(1971) 91-116

- [7] Kobayashi, S. : The first Chern class and holomorphic symmetric tensor fields.
To appear.
- [8] ———. & Ochiai, T. : On complex manifolds with positive tangent bundles. J. Math. Soc. Japan 22 (1970) 499-525
- [9] Sakai, F. : Symmetric powers of the cotangent bundle and classification of algebraic varieties. To appear.
- [10] Sommese, A. J. : Complex subspaces of homogenous complex manifolds I.
Submanifolds of abelian varieties. Math. Ann. 233 (1978) 229-256
- [11] Ueno, K. : Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces.
Lecture Notes in Math. 439, Springer (1975)