

ベクトルバンドル上の微分作用素に対する超準的可解性について

(On nonstandard solvability for differential operators on vector bundles)

静岡大学 工学部 明山 浩 (Hiroshi AKIYAMA)

1 序

本稿では超準解析 (nonstandard analysis) を用いて, ベクトルバンドル上の微分作用素 A に対するある種の可解性の問題を扱う. すなわち, 主に $Au = T$ (T は generalized section) の形の方程式について, 解の概念をひろげて“超準的な解”も考察の対象に入れれば, このような方程式が超準的な解を持つためには, 明らかに必要な両立条件 (後述の (C1)) が十分条件でもあること, また, その条件がみたされるときには, 基本解のような役割を果たす超準的な切断が存在すること, などを述べる. §3 の内容は主に [2] によっている.

つぎのような設定で考える. (M, g) を $(\sigma$ -コンパクトな) C^∞ リーマン多様体とし, $\pi_E: E \rightarrow M$ と $\pi_F: F \rightarrow M$ を M 上の C^∞ エルミート・ベクトルバンドルとする. h_E, h_F をそれぞれ E, F のファイバー計量とする. また, F^* を F の双対バンドル, $|\wedge_M|$ を M 上の密度の複素直線バンドルとする. $A: \Gamma_0^\infty(E) \rightarrow \Gamma^\infty(F)$ を E のコンパクトな台をもつ C^∞ 切断の空間 $\Gamma_0^\infty(E)$ から F の C^∞ 切断の空間 $\Gamma^\infty(F)$ への $\mathbb{C}$ -線形作用素とし, 次の条件をみたす formal adjoint $A^\#: \Gamma_0^\infty(F) \rightarrow \Gamma^\infty(E)$ を持つとする:

すべての $\varphi \in \Gamma_0^\infty(F)$ に対し, $A^\#\varphi$ は E の L^2 切断 ($\|A^\#\varphi\|_E < \infty$).

ここに

$$\|A^\#\varphi\|_E = (A^\#\varphi, A^\#\varphi)_E^{1/2}, \quad (A^\#\varphi, A^\#\varphi)_E = \int_M h_E(A^\#\varphi, A^\#\varphi) dv_g$$

で, $dv_g \in \Gamma^\infty(|\wedge_M|)$ は Riemannian volume density を表す. (たとえば A は微分作用素とか properly supported な擬微分作用素.)

F の **generalized section** とは, 空間 $\Gamma_0^\infty(F^* \otimes |\wedge_M|)$ 上の連続線形汎関数のことである ([3]) が, F の generalized sections の空間を $\Gamma^{-\infty}(F)$ と表そう.

さて, $T \in \Gamma^{-\infty}(F)$ とし, 方程式

$$Au = T \tag{1.1}$$

を次の意味で考える：

$$(u, A^\# \varphi)_E = (T, \varphi)_F \quad \text{for all } \varphi \in \Gamma_0^\infty(F). \quad (1.2)$$

ここで、 $(T, \varphi)_F$ は F の L^2 切断の空間における内積 $(\cdot, \cdot)_F$ を拡張して定義されるものである：

$$(T, \varphi)_F := T(h\varphi), \text{ ただし } h\varphi := h_F(\cdot, \varphi) \otimes dv_g \in \Gamma_0^\infty(F^* \otimes |\wedge_M|).$$

このとき、条件

$$\forall \varphi \in \Gamma_0^\infty(F) \quad [A^\# \varphi = 0 \implies (T, \varphi)_F = 0] \quad (C1)$$

は(1.1) が可解となるための明らかに必要条件である。しかし、超準解析を用いて、“超準的な解”も考察の対象に入れることによって解の概念をひろげれば、上の条件 (C1) が“超準的に可解”となるための必要十分条件であることがわかるのである。

§2 で超準解析について簡単に紹介する。§3 で超準的可解性について得られた結果を述べる。証明は本稿では省略する。詳しくは [2] を参照されたい。ユークリッド空間の開集合上での単独の線形偏微分方程式の超準的取り扱いについては T. Todorov の研究 ([7], [8]) があり、本研究の動機づけにもなっているが、超準解析の利用の仕方は我々のとはやや異なっている（本研究における定理の証明においては超有限次元内のベクトル空間を利用している [2]）。

2 超準解析からの準備

この節では公理的方法により超準解析からの準備を行う。（他の方法についてはたとえば [4], [6] を参照されたい。）

ここでは河合 徹氏による超準集合論 UNST([5]) を直観的な言葉で紹介する。UNST なる語は usual nonstandard set theory の意を込めたものであるらしいが、ユーザー向き (users' nonstandard set theory) でもある。

UNST の言語は集合論 ZFC（ツェルメロ・フレンケルの集合論に選択公理を加えた理論）の言語に 3 つの定項 $\mathcal{U}, \mathcal{I}, *$ をつけ加えたもので、UNST は ZFC の保存拡大になっている。 $a \in \mathcal{U}$ のとき a は **通常的** (usual), $a \in \mathcal{I}$ のとき a は **内的** (internal), $a \notin \mathcal{I}$ のとき a は **外的** (external) であるという。（内的集合、外的集合をそれぞれ、内集合、外集合ともいう。）UNST の公理は次のとおり：

(1) 集合論 ZFC の公理から正則性公理を除いたものを UNST の世界に置く。正則性公理については制限された形のものを置くのだが、本稿では表立ってはとくに必要ないので省略する。 $\mathcal{U}$ では ZFC の公理を置く。

(2) $\mathcal{U}$ は推移的： $a \in A \in \mathcal{U} \Rightarrow a \in \mathcal{U}$ 。

(3) $\mathcal{I}$ は推移的： $a \in A \in \mathcal{I} \Rightarrow a \in \mathcal{I}$ 。

(4) $A \subset B \in \mathcal{U} \Rightarrow A \in \mathcal{U}$.

(5) $*$: $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{I}$ (写像). $a \in \mathcal{U}$ に対し $*(a) (\in \mathcal{I})$ を $*a$ と書き, a の**超準拡大**という.

(6) (移行原理) $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ が ZFC の論理式で $x_1, \dots, x_n$ は φ の自由変項のすべてであるとき, $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathcal{U}$ に対し

$${}^{\mathcal{U}}\varphi(x_1, \dots, x_n) \iff {}^{\mathcal{I}}\varphi(*x_1, \dots, *x_n).$$

ここに ${}^{\mathcal{U}}\varphi$ は φ の $\mathcal{U}$ への相対化, すなわち, φ の束縛変項を $\mathcal{U}$ に制限して得られる論理式を表す [φ 中の $(\forall x), (\exists x)$ を $(\forall x \in \mathcal{U}), (\exists x \in \mathcal{U})$ に置き換える]. 同様に, ${}^{\mathcal{I}}\varphi$ は φ の $\mathcal{I}$ への相対化である.

(7) (飽和性) Λ を $\mathcal{U}$ -size の添字集合とすると, 内的集合 $A_\alpha \in \mathcal{I}$ の族 $(A_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ は有限交差的なら交差的. ここで集合 Λ が $\mathcal{U}$ -size であるとは $\mathcal{U}$ から Λ への全射が存在することとする.

UNST の公理は以上である.

注意 2.1 (1) 移行原理より, $a, b \in \mathcal{U}$ かつ $a \neq b$ なら $*a \neq *b$ となる. 一般に $A \in \mathcal{U}$ に対し, ${}^\sigma A := \{*a : a \in A\}$ とおく. もし $A \in \mathcal{U}$ の各元については集合としての構造を考えないなら, A と ${}^\sigma A := \{*a : a \in A\}$ とは同一視することにする. とくに複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ と ${}^\sigma \mathbb{C} := \{*c : c \in \mathbb{C}\}$ とは同一視される. 個々の複素数や $\mathbb{C}, \mathcal{P}(\mathbb{C})$ は $\mathcal{U}$ の元である. 飽和性より ${}^\sigma \mathbb{C} \subsetneq * \mathbb{C}$ であることが示される. なお, ${}^\sigma \mathbb{C}$ は外的集合である.

(2) 順序対は $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$, $(a_1, \dots, a_n) = \{(1, a_1), \dots, (n, a_n)\}$ ($n \geq 3$) で定義される.

(3) 写像はそのグラフと同一視する. このことより, 写像が内的であるとか, 外的であるとかの定義ができる. $f : A \rightarrow B$ ($f \in \mathcal{U}$) に対し, $f : *A \rightarrow *B$ であり, とくに $*f(*a) = *(f(a))$ となる.

(4) $A \in \mathcal{U}$ に対し, $*(\mathcal{P}(A)) = \mathcal{P}(*A) \cap \mathcal{I}$ が成り立つ. すなわち, $*(\mathcal{P}(A))$ は $*A$ の部分集合のうち内的なもの全体の集合である.

(5) たとえば $r, s, t \in \mathbb{R}$ に対し, 移行原理より

$$r < s \iff *r < *s,$$

$$r + s = t \iff *r + *s = *t.$$

$*r$ と r を同一視する (注1) ので $*<, *+$ は $<, +$ の拡張となっており, 単に $<, +$ と書く. 一般に, 関係や演算については $*$ を省略することが多い.

(6) $\mathcal{U}$ での種々の“概念”が移行原理によって $\mathcal{I}$ での“ $*$ -概念”に写される. たとえば, η を (後述の) 無限大超自然数とすると, $\mathcal{I}$ の η 個の元 $a_1, a_2, \dots, a_\eta$ からなる内的集合を考えることができる. このような集合を $*$ -有限集合とか**超有限集合**という. 同様に, $*\mathbb{C}$ 上の $*$ -有限次元 (超有限次元ともいう) の内的なベクトル空間といったものも考えられる.

ここで $*\mathbb{N}, *\mathbb{R}, *\mathbb{C}$ の構造について簡単にふれておく ($\mathbb{N}$ は正整数全体の集合).

(1) $m \in \mathbb{N}$ に対し集合 $A_m = \{n \in {}^*\mathbb{N} : n > m\}$ は内的であり, 有限交差的だから飽和性より $\exists \eta \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} A_m$, すなわち, $m \in \mathbb{N}$ なら $m < \eta$ となる. このような η は “無限大超自然数” であるという. ${}^*\mathbb{N}_\infty = {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ は無限大超自然数の全体であり, 外的な集合である. $\mathbb{N}$ も外的な集合である.

(2) 上と同様にして, 飽和性より $\exists x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in {}^*\mathbb{R} : 0 < x < 1/n\}$. このような x は “正の無限小超実数” とよばれる. $\eta \in {}^*\mathbb{N}_\infty$ なら $1/\eta$ は正の無限小である.

一般に, $\alpha \in {}^*\mathbb{R}$ について,

α が無限小: 正の任意の実数 r に対し, $|\alpha| \leq r$,

α が有限: ある実数 r が存在して, $|\alpha| \leq r$,

α が無限大: 任意の実数 r に対して, $|\alpha| > r$.

無限大超実数には正のものと負のものとがある. 0 も無限小としている.

$\alpha \in {}^*\mathbb{R}$ が有限なら, $\alpha - r$ が無限小となるような実数 r が一意的に存在する. この r を ${}^\circ\alpha$ とか $\text{st}(\alpha)$ と表し, α の標準部分 (standard part) とよぶ. したがって,

$$\alpha = {}^\circ\alpha + (\alpha - {}^\circ\alpha)$$

で, 右辺第1項 ${}^\circ\alpha$ は実数, 右辺第2項 $(\alpha - {}^\circ\alpha)$ は無限小である.

(3) $z \in {}^*\mathbb{C}$ は $x + \sqrt{-1}y$ ($x, y \in {}^*\mathbb{R}$) と表される.

3 方程式(1.1)の超準的可解性

§1 で導入された量 (多様体, ベクトルバンドルやその切断, 切断の空間, 作用素 A , 等々) はすべて $\mathcal{U}$ に属する. $\Gamma_0^\infty(F)$ の超準拡大 ${}^*(\Gamma_0^\infty(F))$ は ${}^*\mathbb{C}$ 上の内的なベクトル空間である. この内的なベクトル空間 ${}^*(\Gamma_0^\infty(F))$ の超有限次元の内的な部分ベクトル空間で, 集合としては外的集合 ${}^\circ(\Gamma_0^\infty(F))$ を部分集合にもつようなものが存在すること (このことは飽和性より従う), あるいはこれに類することを使って, 以下の定理や補題を証明することができる ([2]).

まず, 方程式 (1.1) の右辺を超準的な切断で置き換えた場合についての結果を述べる (A はその超準拡大 *A で置き換える).

定理 3.1 §1 のような $\mathbb{C}$ -線形作用素 A が与えられたとする. $f \in {}^*(\Gamma^\infty(F))$ とし, 方程式

$${}^*Au = f \tag{3.1}$$

を次の意味で考える:

$$(u, {}^*(A^\# \varphi))_E = (f, {}^*\varphi)_F \quad \text{for all } \varphi \in \Gamma_0^\infty(F). \tag{3.2}$$

[ただし, 簡単のため, $(\cdot)_E$ や $(\cdot)_F$ の超準拡大も同じ記号で表している.] すると, 方程式 (3.1) が $\|u\|_E \in {}^*\mathbb{R}$ なる解 $u \in {}^*(\Gamma^\infty(E))$ を持つためには f が次の条件 (C2) をみたすことが必要十分である:

$$\forall \varphi \in \Gamma_0^\infty(F) \quad [A^\# \varphi = 0 \implies (f, {}^*\varphi)_F = 0]. \quad (\text{C2})$$

次の補題はそれ自身興味深いものであろうが, 方程式 (1.1) の超準的可解性を調べる上でも重要な役割を果たす.

補題 3.2 (Key Lemma) (cf. [1, Theorem 2.3]) ある $\mathbb{C}$ -線形な単射 $\beta: \Gamma^{-\infty}(F) \rightarrow {}^*(\Gamma_0^\infty(F))$ が存在して, 各 $T \in \Gamma^{-\infty}(F)$ に対し, $\beta(T)$ は

$$(\beta(T), {}^*\varphi)_F = (T, \varphi)_F \quad (\varphi \in \Gamma_0^\infty(F))$$

をみたす.

定理 3.1, 補題 3.2 の結果を利用することにより, 我々の方程式 (1.1) (を定式化し直したもの) の超準的可解性について次のような結果を得ることが出来る.

定理 3.3 §1 のような $\mathbb{C}$ -線形作用素 A が与えられたとする.

(a) $T \in \Gamma^{-\infty}(F)$ に対し, 方程式

$${}^*Au = {}^*T \quad (3.3)$$

を次の意味で考える:

$$(u, {}^*(A^\# \varphi))_E = ({}^*T, {}^*\varphi)_F = (T, \varphi)_F \quad \text{for all } \varphi \in \Gamma_0^\infty(F). \quad (3.4)$$

このとき, 方程式 (3.3) が $\|u\|_E \in {}^*\mathbb{R}$ なる解 $u \in {}^*(\Gamma^\infty(E))$ を持つための必要十分条件は T が §1 で述べた条件 (C1) をみたすことである.

(b) ある ${}^*C^\infty$ 核 $G \in {}^*(\Gamma^\infty(E \boxtimes F^*))$ が存在して, 各 $x \in {}^*M$ に対し, $G(x, \cdot)$ の内的な台は * -コンパクトであり, 条件 (C1) をみたす各 T に対し, * -積分

$$u(x) = \int_{{}^*M} G(x, y) \beta(T)(y) {}^*dv_g(y) \quad (x \in {}^*M)$$

は (3.4) の意味で方程式 (3.3) の解を与える.

上に現れた ${}^*C^\infty$, * -コンパクト, * -積分などの用語は §2 の注意 2.1(6) に述べたことによるものである.

注意 3.1 $u \in {}^*(\Gamma^\infty(E))$ を (3.4) の意味で方程式 (3.3) の ${}^*\|u\|_E \in {}^*\mathbb{R}$ なる解とする.

(1) もしもある $v \in \Gamma^\infty(E)$ に対して $u = {}^*v$ なら

$$(v, A^\# \varphi)_E = (T, \varphi)_F \quad \text{for all } \varphi \in \Gamma_0^\infty(F)$$

となる. この意味で $Av = T$ である.

(2) 任意の $\varphi \in \Gamma_0^\infty(F)$ に対して $A^\# \varphi$ の台はコンパクトであるとする (たとえば A がとくに微分作用素の場合). もしもある $U \in \Gamma^{-\infty}(E)$ に対して

$$(u, {}^*(A^\# \varphi))_E = (U, A^\# \varphi)_E \quad \text{for all } \varphi \in \Gamma_0^\infty(F)$$

が成り立つなら

$$(U, A^\# \varphi)_E = (T, \varphi)_F \quad \text{for all } \varphi \in \Gamma_0^\infty(F)$$

となる. この意味で $AU = T$ である.

最後に, §1 のような $\mathbb{C}$ -線形作用素 A に対し, 良い性質をみたす超準的な切断の存在についての結果を述べる.

定理 3.4 §1 のような $\mathbb{C}$ -線形作用素 A が与えられたとする. このとき, 以下の条件をみたすような $K \in {}^*(\Gamma^\infty(E \boxtimes (F^* \otimes |\wedge_M|)))$ が存在する:

(a) 各 $x \in {}^*M$ に対し, $K(x, \cdot)$ の内的な台は $*$ -コンパクト.

(b) 条件(C1) をみたす各 generalized section $T \in \Gamma^{-\infty}(F)$ に対し, 内的な切断 $u \in {}^*(\Gamma^\infty(E))$ を

$$u(x) = {}^*T(K(x, \cdot)) \quad (x \in {}^*M)$$

で定義すれば, この u は ${}^*\|u\|_E \in {}^*\mathbb{R}$ をみたし, かつ, (3.4) の意味で方程式 (3.3) の解である. ここに *T は自然な方法で *E_x -値となるように拡張しておくものとする (${}^*E_x = {}^*(\pi_E)^{-1}(x)$ である).

参考文献

- [1] H. Akiyama, *Nonstandard representations of generalized sections of vector bundles*, Osaka J. Math., **32** (1995), 817–822.
- [2] H. Akiyama, *Nonstandard solvability for linear operators between sections of vector bundles*, Proc. Amer. Math. Soc., accepted for publication.
- [3] V. Guillemin and S. Sternberg, *Geometric Asymptotics*, rev. ed., Mathematical surveys and monographs No. 14, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1990.

- [4] A. E. Hurd and P. A. Loeb, *An Introduction to Nonstandard Real Analysis*, Academic Press, New York, 1985.
- [5] T. Kawai, *Nonstandard analysis by axiomatic method*, in "Southeast Asian Conference on Logic" (ed. by C. -T. Chong and M. J. Wicks), Proc. Logic Conf., Singapore, 1981, Elsevier (North-Holland), Amsterdam, 1983, pp. 55–76.
- [6] T. Lindstrøm, *An invitation to nonstandard analysis*, in "Nonstandard Analysis and its Applications" (N. Cutland, ed.), London Math. Soc. Student Texts 10, Cambridge Univ. Press, 1988, pp. 1–105.
- [7] T. Todorov, *An existence result for a class of partial differential equations with smooth coefficients*, in "Advances in Analysis, Probability and Mathematical Physics: Contributions of Nonstandard Analysis" (S. Albeverio, W. A. J. Luxemburg, M. P. H. Wolff, eds.), Math. Appl. Vol. 314, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995, pp. 107–121.
- [8] T. Todorov, *An existence result for linear partial differential equations with C^∞ coefficients in an algebra of generalized functions*, Trans. Amer. Math. Soc., **348** (1996), 673–689.