

Hilbert representations of quivers and extended Dynkin diagrams

綿谷 安男 (Watatani, Yasuo)

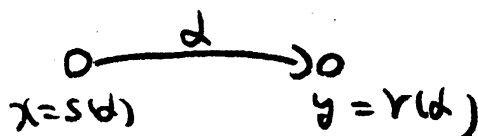
九州大学大学院数理学研究院
(Kyushu University, Department of Mathematical Sciences)

これは甲子園大の榎本氏との共同研究である。

□ はじめに

これまでの研究 [EW] で, ヒルベルト空間 H の部分空間 $E_1, E_2, \dots, E_n \subset H$ の配置について研究してきた。これを quiver (有向グラフ) に沿った部分空間の配置と拡張し, それをさらに quiver の作用素による表現として統一して論じる。

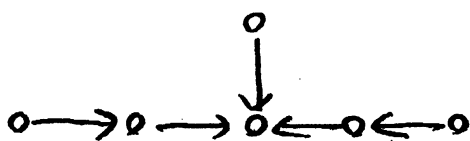
Def quiver (有向グラフ) とは, 有向グラフ $\Gamma = (V, E, s, r)$ のことである。ここで V は頂点の集合, E は辺の集合で $s: E \rightarrow V$ と $r: E \rightarrow V$ は $e \in E$ に対しその始点 $x = s(e)$ と終点 $y = r(e)$ を対応させたものである。



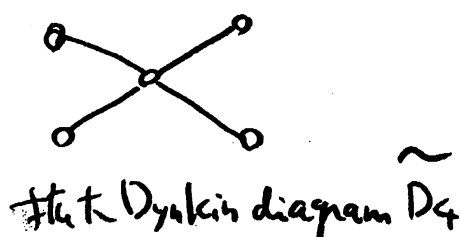
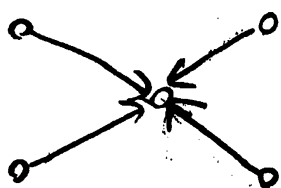
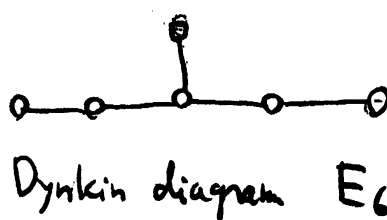
Def quiver $\Gamma = (V, E, s, r)$ に対しその「向きを忘れた」グラフを $|\Gamma|$ とかく。

例

Γ
 quiver



$|\Gamma|$
無向グラフ



Def quiver $\Gamma = (V, E, s, r)$ の 表現 (H, f)

とは、各頂点 $x \in V$ に ベクトル空間 H_x , 各辺 $\alpha \in E$

に linear operator f_α を付随させた組

$$(H, f) = ((H_x)_{x \in V}, (f_\alpha)_{\alpha \in E}) \text{ として}$$

$$\begin{array}{ccc} & \alpha & \\ x & \xrightarrow{\quad} & y \end{array} \text{ の時に } H_x \xrightarrow{f_\alpha} H_y$$

と与えられているものをいう。特にすべての H_x が有限次元の時に (H, f) を 有限次元表現 といい、

またすべての H_x がヒルベルト空間で、すべての f_α が bounded operator の時には Hilbert 表現 とよぶ。

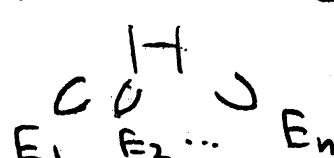
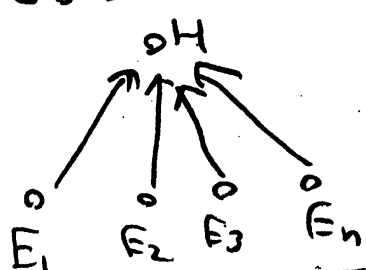
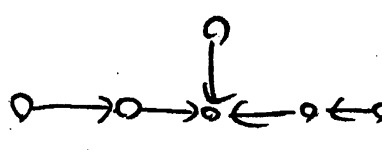
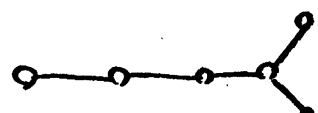
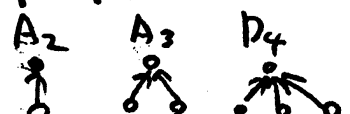
例 ヒルベルト空間 H の 4 つの部分空間 H_1, H_2, H_3, H_4

に対し $H_0 = H$ とおく。 Γ を  とする。

$f_{\alpha_i} : H_i \hookrightarrow H_0$ を inclusion map とおくと

$((H_x)_{x \in V}, (f_\alpha)_{\alpha \in E})$ は Γ の Hilbert 表現になっている。

ヒルベルト空間にもその上の作用素にもそれらの集まった作用素環にもどのような階層の違うステージに quiver が出現するという不思議さを追求したいのがこの研究の目的である。

ヒルベルト空間	作用素	作用素環
この部分空間の相対的位置 	quiver のヒルベルト表現 (H, f) 	Subfactor [J] 部分因子環の相対的位置 $N \subset M$
包含関係 	quiver 	Principal graph 
直既約表現が同型類を除いて有限個 $\Rightarrow$ 部分空間の個数 $n = 1, 2, 3$ 	(H, f) が有限表現型 $\Rightarrow$ 元の quiver Π は Dynkin diagram A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 (Gabriel の定理)	$[M:N] < 4$ $\Rightarrow$ Principal graph は Dynkin diagram A_n, D_n, E_6, E_7, E_8

① キルバート表現

Quiverの有限次元ベクトル空間とその間の linear operators
への表現をキルバート空間とその間の bounded operators
への表現へと拡張する

Def $\Gamma = (V, E, s, r)$ を有限 quiver とする.

(H, f) が Γ の キルバート表現

$\Leftrightarrow$ $H = (H_x)_{x \in V}$: キルバート空間の族
 $f = (f_e)_{e \in E}$: bounded operators の族

s.t.
$$\begin{array}{ccc} \circ_x & \xrightarrow{\alpha} & \circ_y \\ \gamma & & \delta \end{array} \Rightarrow H_x \xrightarrow{f_\alpha} H_y$$

Def (H, f) と (K, g) を Γ のキルバート表現

$(H, f) \cong (K, g)$: 同型

$\Leftrightarrow$ $\forall x \in V \exists \varphi_x: H_x \rightarrow K_x$: bounded invertible operator

s.t.
$$\begin{array}{ccc} \circ_x & \xrightarrow{\alpha} & \circ_y \\ \gamma & & \delta \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} H_x & \xrightarrow{f_\alpha} & H_y \\ \varphi_x \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \varphi_y \\ K_x & \xrightarrow{g_\alpha} & K_y \end{array}$$

② 直既約表現

Quiver Γ の2つのキルバート表現 (K, g) と (K', g') の直和 $(K, g) \oplus (K', g') = (K \oplus K', g \oplus g')$ は次で与えらる

$$(K \oplus K')_x = K_x \oplus K'_x \quad \begin{array}{ccc} & \alpha & \\ \alpha & \xrightarrow{\quad} & g' \\ & \alpha & \end{array}$$

$$(f \oplus g)_\alpha = (f_\alpha, g_\alpha) \quad \therefore K_x \oplus K'_x \longrightarrow K_y \oplus K'_y$$

Def Quiver Γ のキルバート表現 (H, f) が 直既約

$\Leftrightarrow (H, f)$ はこれ以上真に直和に分解できない

つまり $(H, f) \cong (K, g) \oplus (K', g') \Rightarrow (K, g) \cong 0$ か $(K', g') \cong 0$

例 Quiver Γ が $\circ \rightleftarrows \circ$ の時 そのキルバート表現とは

キルバート空間 H と Γ の上の operator $T: H \rightarrow H$ を与えることに同じ。つまりこれは「single operator theory」

$H \circ \rightleftarrows T$ を similarity を除いて与えることに同じ。

H が有限次元の場合は (H, T) が直既約であるとは T が Jordan ブロックであることに同じ。

2つの表現 $(H_1, T_1) \cong (H_2, T_2)$

$$\Leftrightarrow \exists S: H_1 \rightarrow H_2 \quad \text{s.t.} \quad T_2 = S T_1 S^{-1}$$

$T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ かつ $\lambda \in \mathbb{C}$ と $n \in \mathbb{N}$ が与えられる
有限次元直既約表現は無限に

例 given Γ が $p \xrightarrow{\alpha} q$ の時, そのヒルベルト表現とは,

$H_1 \xrightarrow{I} H_2$ を与えることと同じ。この時 2つの表現

$$(H_1 \xrightarrow{I} H_2) \cong (H'_1 \xrightarrow{I'} H'_2)$$

$$\Leftrightarrow \exists S_1: H_1 \rightarrow H'_1 \text{ と } \exists S_2: H_2 \rightarrow H'_2$$

$$\text{s.t. } T' = S_2 T S_1^{-1} \quad (\text{左と右で違う operator はダメ!})$$

この場合 {有限次元直既約表現} $/_{\cong}$ は たったの 3個

つり

$$\begin{array}{c} 0 \\ \circ \end{array} \xrightarrow{0} \begin{array}{c} 0 \\ \circ \end{array}, \quad \begin{array}{c} 0 \\ \circ \end{array} \xrightarrow{0} \begin{array}{c} \bullet \\ \circ \end{array}, \quad \begin{array}{c} 1 \\ \circ \end{array} \xrightarrow{0} \begin{array}{c} 0 \\ \circ \end{array}$$

(注) $\circ \xrightarrow{0} \circ$ は Dinkin diagram だけれど $\circ$ は 特大 Dinkin diagram
でこの違いが ∞ 個と 3 個に表われている

例 given Γ が $\begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \downarrow \searrow \\ \circ \end{array}$ の時, {有限次元直既約表現} $/_{\cong}$

は 12 個あり, かつ $9 = 2^3 + 1$ は 3つの部分空間の配置で残りの3はそれ以外のもの。実際

$$\begin{array}{c} E_1 \\ \circ \\ \swarrow \downarrow \searrow \\ \circ \\ \swarrow \downarrow \searrow \\ H \end{array} \quad \begin{array}{l} 2^3 = \# \left\{ \begin{array}{l} H = \mathbb{C} \\ E_i = \mathbb{C} \text{ or } 0 \end{array} \right\}, \quad 1 = \# \left\{ \begin{array}{l} H = \mathbb{C}^2 \\ E_3 \neq E_2 \\ E_1 \end{array} \right\}, \quad 3 = \# \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C} \oplus 0 \\ \swarrow \downarrow \searrow \\ 0 \\ \swarrow \downarrow \searrow \\ 0 \oplus 0 \\ \swarrow \downarrow \searrow \\ 0 \oplus 0 \oplus 0 \end{array} \right\} \end{array}$$

例 given Γ が $\begin{array}{c} \circ \quad \circ \quad \circ \\ \swarrow \downarrow \searrow \\ \circ \end{array}$ の時, {有限次元直既約表現} $/_{\cong}$

は無数にある。たとえば $K = \mathbb{C}^n$, $H = K \oplus K$ ($n \in \mathbb{N}$)
 $E_1 = K \oplus 0$, $E_3 = \text{graph } A$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (266)
 $E_2 = 0 \oplus K$, $E_4 = \text{graph } I$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

①  は Dynkin diagram D_4 であり  は拡大 Dynkin diagram $\tilde{D}_4$ であり、この違いが 12 と ∞ に表われている。

③ Gabriel の定理の無限次元版

前の②で示した色んな例の違いを次の定理が説明する。

Theorem (Gabriel [G])

Γ を有限で連結な quiver とする。次は同値

① Γ は有限表現型 $\{^{(2)}$ 有限次元直既約表現 $\}_{\infty}$ が有限 $\}$

② $|\Gamma|$ は Dynkin diagrams $A_n (n \geq 1), D_n (n \geq 4), E_6, E_7, E_8$ のどれかである。

これをどのように無限次元版に直すか問題である。

《①と②をそれぞれの「否定もでき」におきかえよ》

①の「否定もでき」

$\Rightarrow \Gamma$ は無限次元直既約ヒルベルト表現をもつ

理由: 例えば $\Gamma = \mathbb{Q}$ の時は Jordan Block $T_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & \ddots \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$
で $n \rightarrow \infty$ とし $T = \text{unilateral shift}$ におきかえよとて
よく無限次元直既約表現がとれる

②の否定 (これはもできはなし)

$\Rightarrow |\Gamma|$ は拡大 Dynkin diagrams $\tilde{A}_n (n \geq 0), \tilde{D}_n (n \geq 4), \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$ を含む

以上の準備から次の定理は予想できている。

Theorem (橋本-W [EW2])

Γ を有限で連結な quiver とする。 Γ の無向グラフ $|\Gamma|$ がかも拡張 Dynkin diagram $\tilde{A}_n$ ($n \geq 0$), $\tilde{D}_n$ ($n \geq 4$), $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$ のどれかを含むと仮定する

$\Rightarrow \Gamma$ の無限次元直既約ヒルベルト表現が存在する。

① 逆が成立すれば Helms による transitive lattice の未解決問題 [H] も解決する。

② 証明のアイデアは, Bernstein-Gelfand-Ponomarev [BGP] による鏡映関数とその双対性を使って向き付けに依らないことを示すこと, positive-unitary, diagonal な場合の考察, strongly irreducible 作用素 [JW] の例をみることにある。

③ $|\Gamma| = \tilde{E}_6$ の時の無限次元直既約ヒルベルト表現の構成

$$\begin{array}{c}
 \circ H_2'' \\
 \downarrow \\
 \circ H_1'' \\
 \downarrow \\
 \circ \quad \circ \quad \circ \\
 \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 K = \ell^2(\mathbb{N}) \\
 S: \text{unilateral shift on } K \\
 H_0 = K \oplus K \oplus K, \\
 H_1 = K \oplus 0 \oplus K, \quad H_2 = 0 \oplus 0 \oplus K \\
 H_1' = K \oplus K \oplus 0, \quad H_2' = 0 \oplus K \oplus 0 \\
 H_1'' = \{ (x, y, z) + (y, Sy, 0) \in K^3 \mid x, y \in K \} \\
 H_2'' = \{ (x, x, x) \in K^3 \mid x \in K \}
 \end{array}$$

References

- [BGP] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand and V. A. Ponomarev, Coxeter functors and Gabriel's theorem, Russian Math. Surveys, 28 (1973), 17-32.
- [EW 1] M. Enomoto and Y. Watatani, Relative position of four subspaces in a Hilbert space, Adv. Math. 201 (2006), 263-317
- [EW 2] M. Enomoto and Y. Watatani, Indecomposable representations of quivers on infinite-dimensional Hilbert spaces, preprint
- [G] P. Gabriel, Unzerlegbare Darstellungen I, Manuscripta Math. 6 (1972), 71-103.
- [H] P. R. Halmos, Ten problems in Hilbert space, Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970), 887-933.
- [J] V. Jones, Index for subfactors, Inv. Math. 72 (1983), 1-25
- [JW] C. Jiang and Z. Wang, Strongly Irreducible Operators on Hilbert space, Longman, 1998.