

Fréchet-Urysohn, sequential and k -subspaces of free topological groups

静岡大学・学術院教育学領域 山田 耕三

Kohzo Yamada

College of Education, Shizuoka University

1 はじめに

本稿における位相空間 X は全て Tychonoff space とする。特に、第 2 節以降において位相空間 X は metrizable space のみを扱っている。また、基本的な概念については文献 [3] を、topological group に関する事柄については文献 [2] と [4] を参照されたい。

Tychonoff space X に対して、 $F(X)$ と $A(X)$ をそれぞれ Markov [7] の意味での X 上の free topological group, free abelian topological group とする。 $F(X)$ の各要素 g は word と呼ばれ、一般に

$$g = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}, \text{ ただし, 各 } i = 1, 2, \dots, n \text{ に対して } x_i \in X \text{ かつ } \varepsilon_i = \pm 1$$

と表される。特に $x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$ がこれ以上キャンセルされないとき $x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$ を g の reduced form という。さらにこのとき n を g の長さといい $\ell(g)$ で表す。各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $F_n(X) = \{g \in F(X) : \ell(g) \leq n\}$ とおくと

$$F_1(X) \subseteq F_2(X) \subseteq \cdots \subseteq F_n(X) \subseteq \cdots \subseteq F(X) \text{ かつ } F(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(X)$$

となっているが、さらに各 $F_n(X)$ は $F(X)$ の closed subset になることが知られている。一方、 $A(X)$ の word g は一般に

$$g = \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \cdots + \varepsilon_n x_n,$$

$$\text{ただし, 各 } i = 1, 2, \dots, n \text{ に対して } x_i \in X \text{ かつ } \varepsilon_i = \pm 1$$

と表されるが、 $A_n(X)$ は $F_n(X)$ と同様にして定義され、各 $A_n(X)$ も $A(X)$ の closed subset になることが知られている。

Metrizable space X が持っている性質の一つである first-countability に着目し、その性質を一般化したよく知られている性質として、Fréchet-Urysohn property, sequentiality,

k -property 等があるが、それらの関係は、

$$\begin{aligned} \text{metrizability} &\implies \text{first-countability} \\ &\implies \text{Fréchet-Urysohn property} \implies \text{sequentiality} \implies k\text{-property} \end{aligned}$$

となっている。次のよく知られた結果は、たとえ X が単純な構造を持っている空間であっても、その X から生成される $F(X)$ 及び $A(X)$ の位相的構造が複雑になることを示唆している。

定理 1.1. $F(X)$ または $A(X)$ が *Fréchet-Urysohn* ならば X は *discrete space* である。

この結果より、収束点列とその収束点を合わせた空間 X から生成された $F(X)$ や $A(X)$ においても、いずれも *Fréchet-Urysohn* ではなく、特に *metrizable space* にならないことがわかる。一方で、Arhangel'skii, Okunev and Pestov [1] が次の結果を示した。尚、本稿では、位相空間 X に対して X の non-isolated point 全てを集めた集合を $d(X)$ で表す。

定理 1.2 ([1]). X を *metrizable space* とするとき、

- (1) $A(X)$ が k -space になるための必要十分条件は X が *locally compact* かつ $d(X)$ が *separable* になることである。
- (2) $F(X)$ が k -space になるための必要十分条件は X が *locally compact* かつ *separable* となるか、または *discrete space* になることである。

これらの結果を踏まえて、筆者は文献 [9, 10, 11, 12] において、各 $A_n(X)$ や $F_n(X)$ ($n \geq 2$) が *metrizability* から k -property までのそれぞれの性質を持つための X の条件を調べた。それらの結果をまとめると次のようになる。

定理 1.3 ([9, 10, 11, 12]). *Metrizable space* X において以下が成立する。

I. $A_n(X)$ について

- (1) $A_2(X)$ は常に *Fréchet-Urysohn* である。よって *sequential* であり、 k -space である。
- (2) 以下は同値である。
 - (a) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n(X)$ が *metrizable*;
 - (b) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n(X)$ が *first-countable*;
 - (c) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n(X)$ が *Fréchet-Urysohn*;
 - (d) $A_2(X)$ が *metrizable*;
 - (e) $A_2(X)$ が *first countable*;

- (f) $A_3(X)$ が *Fréchet-Urysohn*;
- (g) $d(X)$ が *compact*.

(3) 以下は同値である。

- (a) $A_3(X)$ が *sequential*;
- (b) $A_3(X)$ が *k-space*;
- (c) X が *locally compact* または $d(X)$ が *compact*.

(4) 以下は同値である。

- (a) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n(X)$ が *sequential*;
- (b) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n(X)$ が *k-space*;
- (c) $A_4(X)$ が *sequential*;
- (d) $A_4(X)$ が *k-space*;
- (e) X が *locally compact* かつ $d(X)$ が *separable*, または $d(X)$ が *compact*.

II. $F_n(X)$ について

(1) 以下は同値である。

- (a) $F_3(X)$ が *metrizable*;
- (b) $F_3(X)$ が *first-countable*;
- (c) $F_2(X)$ が *metrizable*;
- (d) $F_2(X)$ が *first-countable*;
- (e) $d(X)$ が *compact*.

(2) 以下は同値である。

- (a) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $F_n(X)$ が *metrizable*;
- (b) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $F_n(X)$ が *first-countable*;
- (c) $F_4(X)$ が *metrizable*;
- (d) $F_4(X)$ が *first-countable*;
- (e) X が *compact* または *discrete*.

(3) $F_2(X)$ は常に *Fréchet-Urysohn* である。よって *sequential* であり *k-space* である。

(4) 以下は同値である。

- (a) $F_3(X)$ が *Fréchet-Urysohn*;
- (b) $d(X)$ が *compact*.

(5) 以下は同値である。

- (a) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $F_n(X)$ が *Fréchet-Urysohn*;
- (b) $F_5(X)$ が *Fréchet-Urysohn*;
- (c) X が *compact* または *discrete*.

(6) 以下は同値である。

- (a) $F_3(X)$ が *sequential*;
- (b) $F_3(X)$ が *k-space*;
- (c) X が *locally compact* または $d(X)$ が *compact*.

(7) 以下は同値である。

- (a) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $F_n(X)$ が *sequential*;
- (b) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $F_n(X)$ が *k-space*;
- (c) $F_8(X)$ が *sequential*;
- (d) $F_8(X)$ が *k-space*;
- (e) X が *locally compact* かつ *separable*.

上記の結果では、次のことが得られていない。

疑問 1. X を metrizable space とするとき、

- (1) $F_4(X)$ が *Fréchet-Urysohn* になるための X の必要十分条件は何か?
- (2) $n = 4, 5, 6, 7$ に対して $F_n(X)$ が *sequential* または *k-space* になるための X の必要十分条件は何か?

特に疑問 1 の (1) に対しては定理 1.3 の II の (4) と (5) より次の疑問が生じる。

疑問 2. X を metrizable space とするとき、

- (1) $F_4(X)$ が *Fréchet-Urysohn* ならば X は *compact* になるか?
- (2) $d(X)$ が *compact* ならば $F_4(X)$ は *Fréchet-Urysohn* になるか?

最近 Lin and Liu [5] が疑問 2 の (2) が否定的であることを示したが、その証明に必要な主となる補題の証明に誤りがあることがわかり、さらには Lin and Liu は [6] においてその補題が成立しない例を構成した。よって、上記の疑問 2 は未解決のままとなったが、本稿では、(1) は否定的であることと同時に (2) の部分解について紹介する。

2 主定理の証明方法

次が、今回得られた主となる結果である。

定理 2.1. *Metrizable space X が locally compact であり、 $d(X)$ が compact であると仮定する。このとき、 $F_4(X)$ が k -space ならば $F_4(X)$ は Fréchet-Urysohn となる。*

以下、上記定理の証明方法についてその概要を説明する。詳細は [13] を参照されたい。

まず X が locally compact で $d(X)$ が compact であることに注目すると、

$$X = C \oplus D, \text{ ただし } C \text{ は compact かつ } D \text{ は discrete}$$

の形に表すことができる。ここで、 X 自身が compact であると、 $F_4(X)$ は compact metrizable になってしまうので、ここでは X は non-compact, よって $D \neq \emptyset$ としておける。そこで $F_4(X)$ が Fréchet-Urysohn になることを示すために、任意に $A \subseteq F_4(X)$ と word $g \in F_4(X)$ をとり、 $g \in \overline{A}$ であると仮定する。すると、 g に収束する点列 $\{g_n\} \subseteq A$ を見つけることが証明の目的となる。もし $g \in F_4(X) \setminus F_3(X)$ とすると、 $F(X) \setminus F_3(X)$ が g の open 近傍となるので、 $g \in \overline{A \cap (F_4(X) \setminus F_3(X))}$ である。一方 X が metrizable なので各 $F_n(X) \setminus F_{n-1}(X)$ は metrizable であるので、 $g \in F_3(X)$ としておいてよい。また $d(X)$ が compact なので、定理 1.3 の II (4) より $F_3(X)$ は Fréchet-Urysohn であり、 $F_3(X)$ は $F_4(X)$ の closed subset なので、 $A \subseteq F_4(X) \setminus F_3(X)$ であると仮定してよい。すると、

$$A \subseteq F_4(X) \setminus F_3(X) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_{2n}(X) \setminus F_{2n-1}(X))$$

であり $\{e\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_{2n}(X) \setminus F_{2n-1}(X))$ は $F(X)$ の clopen subgroup なので

$$g \in \{e\} \cup (F_2(X) \setminus F_1(X))$$

となる。つまり、 $g = e$ または $g \in F_2(X) \setminus F_1(X)$ となるときを調べればよいことになり、 $e \in \overline{A}$ の場合と $e \in \overline{g^{-1}A}$ の場合についてそれぞれ A または $g^{-1}A$ の中から e に収束する点列を見つけることが目的となる。

まず、点列を見つめるために次の e の近傍を適用する。

定理 2.2 ([10]). $\mathcal{U}_{\tilde{X}}$ を $\tilde{X} = X \oplus \{e\} \oplus X^{-1}$ (実は、 $F_1(X) = \tilde{X}$ である。) の universal uniformity (もしくは universal uniformity の base) とする。このとき任意の $n \in \mathbb{N}$ と

$U \in \mathcal{U}_{\tilde{X}}$ に対して,

$$W_n(U) = \{e\} \cup \left\{ \begin{array}{l} g = x_1 x_2 \cdots x_{2k} \in F(X) : \\ (1) \ x_i \in \tilde{X} \text{ for each } i = 1, 2, \dots, 2k \text{ and } k \leq n, \\ (2) \ x_1 x_2 \cdots x_{2k} \text{ is the reduced form of } g, \\ (3) \ \{1, 2, \dots, 2k\} = \{i_1, \dots, i_k\} \oplus \{j_1, \dots, j_k\}, \\ (4) \ (x_{i_s}, x_{j_s}^{-1}) \in U \text{ for each } s = 1, \dots, k, \\ (5) \ i_1 < i_2 < \cdots < i_k, \\ (6) \ i_s < j_s \text{ for each } s = 1, 2, \dots, k, \text{ and} \\ (7) \ i_s < i_t < j_s \text{ iff } i_s < j_t < j_s \text{ for each } s, t = 1, \dots, k. \end{array} \right\}$$

とおくと, $W_n(U)$ は $F_{2n}(X)$ における e の近傍となる。さらに $\bigcup_{n=1}^{\infty} W_n(U)$ は $F(X)$ における e の近傍となる。

本証明では, この近傍を $n = 2$ と $n = 3$ に対して, 次のように適用する。

系 2.3. 任意の $U \in \mathcal{U}_{\tilde{X}}$ に対して次が成立する。

(1) $g \in W_2(U) \setminus F_3(X)$ となることの必要十分条件は g が次の条件を満たす *reduced word* $g = abcd$ ($a, b, c, d \in \tilde{X}$) で表せることである。

$$(a, b^{-1}), (c, d^{-1}) \in U \quad \text{または} \quad (a, d^{-1}), (b, c^{-1}) \in U.$$

(2) $g \in W_3(X) \setminus F_5(X)$ となることの必要十分条件は g が次の (i) から (iv) のいずれかを満たす *reduced word* $g = pqrstu$ ($p, q, r, s, t, u \in \tilde{X}$) で表せることである。

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} \ (p, q^{-1}), (r, s^{-1}), (t, u^{-1}) \in U, & \text{(ii)} \ (p, q^{-1}), (r, u^{-1}), (s, t^{-1}) \in U \\ \text{(iii)} \ (p, s^{-1}), (q, r^{-1}), (t, u^{-1}) \in U, & \text{(iv)} \ (p, u^{-1}), (q, t^{-1}), (r, s^{-1}) \in U. \end{array}$$

今, $X = C \oplus D$ であり C が compact かつ D が discrete となっているので, $\tilde{X} = C \oplus D \oplus \{e\} \oplus C^{-1} \oplus D^{-1}$ となる。すると $(C \cup C^{-1})^2$ の対角線 $\Delta_{C \cup C^{-1}}$ の可算近傍基 $\{V_n \subseteq (C \cup C^{-1})^2 : n \in \mathbb{N}\}$ が存在し, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $U_n = V_n \cup \{(e, e)\} \cup \Delta_{D \cup D^{-1}}$ とおくと $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ が $\tilde{X}^2$ の universal uniformity の base となる。

そこで, $e \in \overline{A}$ と $e \in \overline{g^{-1}A}$ のそれぞれの場合において, 各近傍 $W_2(U_n)$ または $W_3(U_n)$ ($n \in \mathbb{N}$) を用いて, 点列 $\{g_n\} \subseteq A$ または $\{g_n\} \subseteq g^{-1}A$ をとる。すると系 2.3 より, 各 g_n に幾つかのパターンが現れるので, それぞれの場合に分けてこれらの点列が e に収束する部分列を持つことを調べることになる。ところが一般に $\{W_n(U) : U \in \mathcal{U}_{\tilde{X}}\}$ は e の近傍基ではないので, 収束を調べるためには別の手段を必要になり, 本証明では Uspenskii[8] が構成した次の $F(X)$ 上の continuous prenorm を用いることにする。

$F(X)$ の部分集合 F_0 を次のように定める。

$$F_0 = \{h = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_{2n}^{\varepsilon_{2n}} \in F(X) : \sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i = 0, x_i \in X \text{ for } i = 1, 2, \dots, 2n, n \in \mathbb{N}\}.$$

すると, F_0 は $F(X)$ の clopen normal subgroup となる。さらに, $\mathcal{P}(X)$ を X 上のすべての continuous pseudometric からなる集合とする。任意の $g \in F_0$ に対して g は次のように表せることに注意する。

$$g = g_1 x_1^{\varepsilon_1} y_1^{-\varepsilon_1} g_1^{-1} g_2 x_2^{\varepsilon_2} y_2^{-\varepsilon_2} g_2^{-1} \cdots g_n x_n^{\varepsilon_n} y_n^{-\varepsilon_n} g_n^{-1},$$

ただし, 各 $x_i, y_i \in X, \varepsilon_i = \pm 1, g_i \in F(X)$ である。このような g の表現は一意に決まるものではなく, いく通りもの表し方がある。そこで, 任意の $h \in F_0$ と $r = \{\rho_g : g \in F(X)\} \in \mathcal{P}(X)^{F(X)}$ に対して,

$$p_r(h) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \rho_{g_i}(x_i, y_i) : h = g_1 x_1^{\varepsilon_1} y_1^{-\varepsilon_1} g_1^{-1} g_2 x_2^{\varepsilon_2} y_2^{-\varepsilon_2} g_2^{-1} \cdots g_n x_n^{\varepsilon_n} y_n^{-\varepsilon_n} g_n^{-1}, \right. \\ \left. x_i, y_i \in X, \varepsilon_i = \pm 1, g_i \in F(X), n \in \mathbb{N} \right\}$$

とおくとき Uspenskii [8] は次のことを示した。

定理 2.4 ([8]). 任意の $r \in \mathcal{P}^{F(X)}$ に対して p_r は continuous prenorm となる。さらに $\{\{h \in F_0 : p_r(h) < \delta\} : r \in \mathcal{P}^{F(X)}, \delta > 0\}$ は e の近傍基となる。

本稿ではこの定理を次の形で応用し, 点列 $\{g_n\} \subseteq A$ または $\{g_n\} \subseteq g^{-1}A$ が e に収束する部分列を持つことを示す。

系 2.5. E を $F(X)$ の部分集合, $\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ を F_0 の点列とすると次が成立する。

(1) $e \in \overline{E}$ となることの必要十分条件は, 任意の $r = \{\rho_g : g \in F(X)\} \in \mathcal{P}^{F(X)}$ と $\delta > 0$ に対して次の条件を満たす $h \in E \cap F_0$ が存在することである。

$$h = g_1 x_1^{\varepsilon_1} y_1^{-\varepsilon_1} g_1^{-1} g_2 x_2^{\varepsilon_2} y_2^{-\varepsilon_2} g_2^{-1} \cdots g_m x_m^{\varepsilon_m} y_m^{-\varepsilon_m} g_m^{-1}$$

$$\text{と表せて } \sum_{i=1}^m \rho_{g_i}(x_i, y_i) < \delta.$$

(2) 点列 $\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ が e に収束するための必要十分条件は, 任意の $r = \{\rho_g : g \in F(X)\} \in \mathcal{P}^{F(X)}$ と $\delta > 0$ に対して, 次の条件を満たす $N \in \mathbb{N}$ が存在することで

ある。

任意の $n \geq N$ に対して

$$h_n = g_{n,1} x_{n,1}^{\varepsilon_{n,1}} y_{n,1}^{-\varepsilon_{n,1}} g_{n,1}^{-1} g_{n,2} x_{n,2}^{\varepsilon_{n,2}} y_{n,2}^{-\varepsilon_{n,2}} g_{n,2}^{-1} \cdots g_{n,m_n} x_{n,m_n}^{\varepsilon_{n,m_n}} y_{n,m_n}^{-\varepsilon_{n,m_n}} g_{n,m_n}^{-1}$$

$$\text{と表せて } \sum_{i=1}^{m_n} \rho_{g_{n,i}}(x_{n,i}, y_{n,i}) < \delta.$$

以上の方法により、定理 2.1 は証明される。尚、定理 2.1 の「 $F_4(X)$ が k -space である。」という仮定は、これまで表面的には現れてこなかったが、実際は $e \in \bar{A}$ の場合にとった A の点列が e に収束することを示す過程において使用する、次の技術的な補題を示す際に用いられている。

補題 2.6. $X = C \oplus D$, ただし C は *compact metrizable* かつ D は *discrete space* とし、 $F_4(X)$ が k -space であると仮定する。各 $a \in D \cup D^{-1}$ に対して $(C \cup C^{-1})^2$ の対角線 $\Delta_{C \cup C^{-1}}$ の近傍 V_a が定まっているとする。ここで

$$F = \{abca^{-1} \in F_4(X) \setminus F_3(X) : (b, c^{-1}) \in (C \cup C^{-1})^2 \setminus V_a, a \in D \cup D^{-1}\}$$

とおくと、 $e \notin \bar{F}$ である。

3 結果と疑問

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、自然な写像 $i_n : \tilde{X}^n \rightarrow F_n(X) : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x_1 x_2 \cdots x_n$ を考える。この写像 i_n は常に continuous になるが、さらに次のことがわかる。

命題 3.1. 位相空間 X が *Dieudonné complete* (よって特に *metrizable*) とする。このとき任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $F_n(X)$ が k -space になることの必要十分条件は i_n が *quotient map* になることである。

定理 2.1 及び 命題 3.1, さらに, Fréchet-Urysohn property, sequentiality 及び k -property の関係より次のことが得られる。

系 3.2. *Metrizable space* X が *locally compact* であり且つ $d(X)$ が *compact* であれば次は同値である。

- (1) $F_4(X)$ が *Fréchet-Urysohn*;
- (2) $F_4(X)$ が *sequential*;
- (3) $F_4(X)$ が k -space;

(4) $i_4: \tilde{X}^4 \rightarrow F_4(X)$ が quotient.

また、定理 1.3 の II (7) と定理 2.1 より次の、疑問 2 (2) の部分解が得られる。

系 3.3. *Metrizable space X が locally compact separable であり且つ $d(X)$ が compact ならば $F_4(X)$ は Fréchet-Urysohn となる。*

この結果より、 $X = I \oplus D$, ただし I は $\mathbb{R}$ 上の閉区間且つ D が countable discrete とすると、 X は locally compact separable metrizable でさらに $d(X) = I$ であるので $d(X)$ は compact になっている。よって、系 3.3 より $F_4(X)$ は Fréchet-Urysohn となるが、明らかに X は compact ではない。よって、疑問 2 (1) が否定的であることがわかる。

最後に、系 3.2 より生じる疑問を上げることにする。系 3.2 における仮定のうち $d(X)$ の compact 性が省略できないことは、定理 2.1 の II (6) より明らかである。一方、local compactness と separability が省略できるかどうかはわかっていない。特に、次の本質的な疑問がまだ未解決である。

疑問 3.

- (1) $\{x_n\}$ を収束点列とし、その収束点を x とする。また D を uncountable discrete space とする。ここで $X = (\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}) \oplus D$ とおくと、 X は locally compact metrizable で $d(X) = \{x\}$ より $d(X)$ は compact であるが、 X は separable ではない。このとき $F_4(X)$ は Fréchet-Urysohn となるか？
- (2) $J(\aleph_0) = (\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n) \cup \{x\}$ を hedgehog space とする。ただし各 S_n は x に収束する点列である。すると $J(\aleph_0)$ は separable metrizable space で $d(X) = \{x\}$ より $d(X)$ は compact であるが、 X は locally compact ではない。このとき、 $F_4(J(\aleph_0))$ は Fréchet-Urysohn となるか？

参考文献

- [1] A. V. Arhangel'skiĭ, O. G. Okunev and V. G. Pestov, *Free topological groups over metrizable spaces*, Topology Appl. **33** (1989) 63-76.
- [2] A. V. Arhangel'skiĭ and M. Tkachenko, *Topological Group and Related Structures*, Atlantis Press and World Sci., Paris, 2008.
- [3] R. Engelking, *General Topology* (Heldermann, Berlin, 1989).

- [4] E. Hewitt and K. Ross, *Abstract harmonic analysis I*, Academic Press, New York, (1963).
- [5] F. Lin and C. Liu, S_ω and S_2 on free topological groups, *Topology Appl.*, **176** (2014) 10-21.
- [6] F. Lin and C. Liu, Addendum to " S_ω and S_2 on free topological groups" [*Topol. Appl.* 176 (2014) 10-21], *Topology Appl.*, **191** (2015) 199-201.
- [7] A. A. Markov, *On free topological groups*, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **9** (1945) 3-64 (in Russian); *Amer. Math. Soc. Transl.* **8** (1962) 195-272.
- [8] V. V. Uspenskii, *Free topological groups of metrizable spaces*, *Math. USSR Izvestiya* **37** (1991) 657-680.
- [9] K. Yamada, *Characterizations of a metrizable space X such that every $A_n(X)$ is a k -space*, *Topology Appl.* **49** (1993) 75-94.
- [10] K. Yamada, *Metrizable subspaces of free topological groups on metrizable spaces*, *Topology Proc.* **23** (1998) 379-409.
- [11] K. Yamada, *Fréchet-Urysohn spaces in free topological groups on metrizable spaces*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **130** (2002) 2461-2469.
- [12] K. Yamada, *The natural mappings i_n and k -subspaces of free topological groups on metrizable spaces*, *Topology Appl.* **146-147** (2005), 239-251.
- [13] K. Yamada, *Fréchet-Urysohn subspaces of free topological groups*, Submitted.