

小学校教員養成における教科専門科目「算数」の教材例

鳴門教育大学 松岡 隆 (Takashi Matsuoka)

鳴門教育大学 佐伯昭彦 (Akihiko Saeki)

鳴門教育大学 秋田美代 (Miyo Akita)

Naruto University of Education

1. はじめに

小学校教員養成において、算数科の教科専門科目によって育成すべき能力は、算数・数学を学校教育において教えることの意義を理解し、数学の本質を正しく認識して自信をもって指導できる力であろう。このような能力の育成は容易ではなく、一定の効果を上げるためには、少なくとも4単位以上は必要であると思われる。しかし、現実には、半期1コマ(2単位)という限られた時間内で授業を行わなければならないという制約が存在する。そこで、そのための対応策として、2つの方向性が考えられる[1]。

- ・ 小学校算数科の背景として知っておくべき数学的内容を、個々は浅くなるが広く網羅的にとり扱う方向。
- ・ 小学校算数科に関連する重点的な4～5のテーマに絞る方向。

本稿では、後者の方向性に沿って構成した教材例を示す。この方向性、即ち、算数に係る広範な数学内容から幾つかのテーマを絞りこむことのためには、何らかの選択の指針が必要となる。現在、算数科の教科専門科目において、算数の背景をなす数学理論を解説することが広く行われている。しかしながら、これまで、学んだ数学理論や数学的な考え方が算数の指導力の向上に実際に役立っているかどうかについては、特に問われることがなかった。そこで、算数科の教科専門科目の授業を算数の指導力向上に確実に結びつけることを意図して、次のような方針を採用することとした。

「教員養成系の学生が、算数・数学の本質的な内容について十分に理解していない点や正しく認識できていない点を把握し、その問題点が改善できるものを優先する。」

学生が算数・数学についての本質的な理解を欠いたまま小学校教員になることは看過できることではなく、その改善を図ることが算数科の教科専門科目の最優先課題であると考えられる。また、学生の理解が不十分であったり誤った認識をもっていること自体に、学校現場での算数・数学教育が抱える問題点が顕在化しており、算数科の教科専門科目の中で、その問題点を指摘し、これまでの算数・数学教育のどこに問題があったのかを理解させることは大きな意義がある。

以下で紹介する4つの教材例では、学生が算数・数学の内容について十分に理解していない点や正しく認識できていない点を具体的に指摘し、その改善策を提案している。これらは、共同研究第1チームの前年度の成果[1]で構成された算数科の教科専門科目の標準モデルの必修項目に係るものである。なお、これらの教材例は、文部科学省先導的大学改革推進委託事業の成果報告書[4]で報告されたものを元としている。

2. 数概念の拡大

教員養成系の学生達の中で、「数」が、文字式における文字と同様、抽象的な概念であるとの認識が薄い。算数の内容については、抽象概念である分数が、分数を用いて表される現実の事象自体と混同されがちである。この問題点の改善のためには、分数を抽象的な数学の世界の概念として明確にしておく必要がある。分数は、分割分数、割合分数、量分数など様々な意味で捉えられるものがあるが、小学校教員として、数としての分数の概念自体は一つであり、これら異なる名称は現実の事象における解釈の仕方の違いであるとの認識をもつことが大事である。これにより、数学概念の表面的な現われ方に影響されない数学的本質に基づいた指導が期待される。

同様に、中学校では、同じ問題点が負の数の導入において現れてくる。教師の意識としては、負の数は現実の事象の中には存在せず、あくまで抽象世界の中にあることを納得していることが必要である。そこで、中学校・高校に連なる展開を見据え、抽象数学の世界の中で、自然数の概念を形式的に拡大していくことにより、整数、有理数、実数の順に構成する。数体系が、現実の世界から離れた抽象世界の中で構成できることを納得させることがねらいである。この理解により、小学校以降の数学学習に対する見通しも備えた授業構成が期待される。

ここで用いる整数と有理数の構成法は、[2]の第2章§2とほぼ同一である。具体的には、まず自然数 a に対し、 $-a$ を記号として形式的に導入し整数を構成する。このように構成された整数上で、加法、減法、乗法を、規則 $a + (-a) = 0$ および結合・交換・分配法則が成り立つと約束することにより定義する。同様に、整数 a に対し、 $1/a$ を記号として形式的に導入することにより有理数を構成し、規則 $a \cdot (1/a) = 1$ と結合・交換・分配法則が成り立つと約束することにより、有理数上の加法、減法、乗法、除法を定義する。また、実数を無限小数の集合として構成する。最後に、構成の出発点となった自然数自体も抽象的に構成できることを示す。これについてはペアノの理論があるが、理論そのものを時間を費やして解説しても殆ど理解が期待できないため、本格的な取扱いを避け、自然数を空集合から具体的に作り出していく手順の説明のみに止めることで十分であると考ええる。

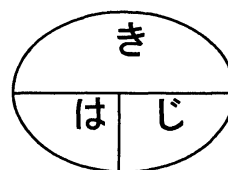
論文[1]において、算数科の教科専門科目の標準モデルが構成されているが、そのモデルにおける本内容の対応項目は、「数と計算」領域の必修項目1-5（数の構成）である。

3. 単位量当たりの大きさ

小学校第6学年で指導する「速さ」の概念については、学習指導要領解説の中で、速さが道のり÷時間という式で表され、速さと時間、道のりと速さからそれぞれ道のりと時間を求めることができることが説明されている。これに従い、教科書では一般に、内容を3種類の公式

$$\text{速さ} = \text{道のり} \div \text{時間} \qquad \text{道のり} = \text{速さ} \times \text{時間} \qquad \text{時間} = \text{道のり} \div \text{速さ}$$

にまとめている。しかし、このことは、速さの概念には公式が3つもあり大変複雑なものであるとの印象を児童に与える結果となっている。しかも、3つの式の形が紛らわしく記憶が難しいため、速さの問題に対して、覚えた公式に数値を代入して解くという安易な方法は役に立たない。このため、公式を覚える便法として、右図に示した「き・は・じ」（または「は・じ・き」）が重宝されており、この方法を指導している小学校教員も少なくないようである。実際、学生達から「これを小学校で習ったので速さの問題が嫌いにならなくて良かった」という声を多く聞いた。



この便法は、答えを出せるという点においては確かに有効なものではあるが、このような公式の暗記に頼ることは、児童の今後の数理的能力の発達に禍根を残すことが危惧される。例えば、「200km の道のりを車で時速 100km で走るとき、何時間かかるか」というような、概念的な理解さえあればすぐ分かる問題に対しても、処理に手間のかかる「き・は・じ」に頼ろうとする態度を生み出してしまう。更に大きな問題がある。速さは距離と時間という二つの量から除法によって作られる量であり、このように異種の量の組み合わせでできる量を内包量という。内包量には多種多様なものがあるが、二つの量から作られるものすべてに「き・は・じ」に相当するものを考えて記憶することは、非効率であるどころか不可能である。速さに対しては、「き・は・じ」で何とか対応できるが、中学、高校と進んで行くとき大きな困難に遭遇することになる。このように、意味理解を怠って公式の記憶に頼る方法には大きな欠陥がある。

速さについては、「単位あたりの量」という概念を確実に理解することによって、公式の記憶に頼らず意味を考えて問題を解き、また、様々な内包量に対応することが可能になる。しかし、以下に示すように、学習指導要領や教科書自身に、この概念とそれに基づく内包量の意味理解を妨げかねない問題点が含まれている。算数科に係る教科専門授業では、この問題点を指摘し、速さをその概念の元となる数学的構造に基づいて考えることの必要性を学生に納得させることが重要である。

問題点1. 人口密度と速さの扱いの違いについて

異種の二つの量 A, B から除法によって作られる内包量 P については、以下の3用法があり、上述の速さの3つの公式はこれらに対応している。

- ① $P=A \div B$ (第1用法) 商=被除数 $\div$ 除数
 ② $A=B \times P$ (第2用法) 被除数=除数 $\times$ 商
 ③ $B=A \div P$ (第3用法) 除数=被除数 $\div$ 商

学習指導要領解説では、速さの導入の前に、異種の二つの量から作られる同様の量として、人口と面積から得られる「人口密度」を取り上げている。一般に、異種の二つの量が係る事柄において、その状態を数値で表すことは、第1用法、即ち「単位量当たりの大きさ」の概念を用いて割り算により新たな量を求めることでなされる。「人口密度」の導入の目的は、この「単位量当たりの大きさ」の概念を理解させることに絞られており、そのため第1用法のみに焦点が当てられている。しかし、速さについては第1用法に加え、第2用法、第3用法まで展開しており扱いが全く異なる。このことは次のような弊害を生み出す危険性があると考ええる。

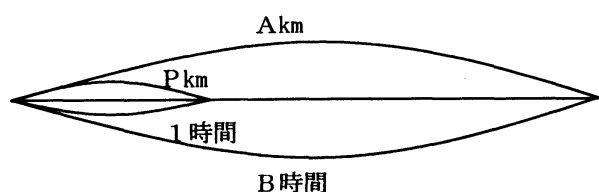
- ・児童が、人口密度と速さの根底にある考え方は別物で、速さは人口密度とは違って3つも公式がありとても複雑な概念であると感じてしまう恐れがある。
- ・速さも単位量当たりの大きさであることの理解が薄まる。

つまり、人口密度も速さも「単位量当たりの大きさ」という同一の概念で捉えることができることの指導が不十分になり、それぞれの現象に依存した指導、つまり、生活経験の中に数学的構造が埋没した指導に陥ってしまう危険性がある。このため、児童には、速さの意味を理解することが難しく、3つの公式が相互に関連のないものと見えてしまう。結果、公式の記憶に走って問題を解こうとする傾向を生み出すことになる。さらに、今回の改定では、これまで同じ第6学年に含められていた人口密度と速さが、それぞれ第5学年と第6学年と異なった学年で扱われることになり、埋没がさらに深まってしまうと危惧される。

そこで、算数に係る教科専門授業では、人口密度を含め、異種の二つの量から作られる様々な内包量に対し、これらが同じ数学的概念に基づき統一的に扱えるものであることを再認識させるため、第2、第3用法まで展開した議論を行う。

問題点2. 異種の二つの量から作られる内包量の構造について

教科書では一般に、速さの3公式を説明するために、次のような線分図を用いている。ただし、実際には、記号A,B,Pのところには、数値や未知数を表す箱が書かれている。



しかし、人口密度については、その説明に線分図が用いられておらず、速さと同じ数学的構造をもつことが分かりづらくなっている。

算数に係る教科専門授業では、異種の二つの量から除法によって作られる内包量については、線分図を描いて考えることが有効な方法であることを理解させる。この視覚的方法により、内包量の定義の元になる単位量当たりの概念を明瞭に捉えることができ、内包量に関する問題を代数的構造に基づき意味を考えて解くことが可能となる。速さの公式は線分図の中の関係として容易に捉えることができ、それらを覚えることや、「き・は・じ」を用いることは、もはや必要なくなる。また、線分図によって、学習指導要領では異なった領域で扱われている、割合、比、比例の概念も同一の構造をもつものとして把握できることについても言及する。

算数科の教科専門科目内容の標準モデル[1]における本内容の対応項目は、「量と測定」領域の必修項目2-1（離散量（分離量）と連続量，外延量と内包量，連続量を表す数としての分数と小数）である。

4. 図形の対称性

小学校での図形の扱いは、概念の導入や基礎的性質の説明が中心であり、その面白さや美しさについて触れることは必ずしも十分とはいえない。また中学校や高等学校においても、計量的側面や論証に主眼が置かれ、面白さや美しさについては直接の対象とされていない。そのため、教員養成系の学生にとって、図形の面白さや美しさに触れて幾何の豊かさを知り、さらに、その背後に存在する数学的構造を理解することが、児童の知的好奇心を引き出し探究・創造型の授業が展開できるために必須の素養であると考えられる。ここでは、その題材として、新学習指導要領で復活した内容である「対称性」を取り上げる。この題材は、対称性、特に点対称についての理解が弱い学生が多数存在するという点からも重要である。また、対称性の概念は、対称図形、敷き詰め、垂直二等分線などの異なった概念を包括する基本概念であり、数学的見方の大きな柱の一つである。

まず、三角形、四角形、五角形を対称性によって分類すると、以下のようになる。これについては、小学校学習指導要領解説・算数編（p.175）にも部分的な扱いがある。また、小西[3]は、正多角形を対象として同様の考察を行っている。

三角形	線対称：	二等辺三角形（対称軸1本）
		正三角形（対称軸3本）
	点対称：	存在しない
四角形	線対称：	たこ型，等脚台形（対称軸1本）
		長方形，ひし形（対称軸2本）
		正方形（対称軸4本）
	点対称：	長方形，ひし形，正方形（線対称でもある）
		平行四辺形（線対称でない）

五角形 線対称： 対称軸が1本のもの
 正五角形（対称軸5本）
 点対称： 存在しない

この結果から、例えば、以下のような規則が成り立つことが推測される。このように、対称図形がもつ規則に気づいて、その背後にある仕組みを考えることを最初の課題とする。

(1) 線対称について

対称軸が2本以上ある場合、それらはすべて1点で交わり 360° を等分している。
 従って、線対称な n 角形の対称軸の本数は n の約数である。

(2) 点対称について

- ・ 対称軸を偶数本もつ線対称多角形は、点対称でもある。
- ・ 奇数角形は点対称ではない。

これらの規則が成り立つ鍵は、以下の2つの事実である。これらは、合同変換の合成を考えることで導かれ、また図を描いて容易に検証できる。

- ・ 対称軸が2本あるとき、そのうちの1本をもう一方で折り返して得られる直線はまた対称軸となる。
- ・ 2本の対称軸が角度 a で交わるとき、図形を角度 $2a$ で回転すると元の図形に重なる。

以上の内容は、次の方向に発展させることができる。

- ① 有限個の点の集まりなど多角形以外のものについても対称性を考えることにより、垂直二等分線や角の二等分線などを対称性の下に統合して捉えることができる。
- ② 対称軸が2本以上あり1点で交わっていない場合を考える。このとき、無限本数の対称軸が現れ、図形は無限に広がったものとなる。

合同な多角形による平面の敷き詰めは、幾何の美しさを体験させるため、学校でもよくトピック的に紹介されるものであるが、これは②で現れるパターンを含んでいる。よって、図形の対称性と敷き詰めを関連させて理解できる。授業では、敷き詰めを実際に作る活動を取り入れ、また、その対称性を分析することにより、模様づくりを楽しみながら対称性の意味を確認させる。

また、この教材では、数学の体系性を知ることの有用性が理解できる。実際、「対称性」の下に、線対称、点対称、合同、敷き詰めなど様々な概念を統合して捉えることができる。また、多角形の対称性は、より簡単に扱える頂点の集まりの対称性と同じであ

ることに気づくことの有効性が分かる。すなわち、表面的な現われ方に影響されない本質に気づくことの重要性が理解できる。

さらに、この教材により、図形の面白さ、美しさ、さらに対称性の概念・構造自体がもつ美しさを理解できる。また、学生自身が発見し考察していくよう授業を構成することによって、探究・創造型の授業展開を体験できる。②の身近な例は、タイル張りや繰り返し模様など数多く存在する。また、万華鏡の仕組みも上述の②で説明できる。このように、この教材は、算数と事象とのつながりを意識させる効果もある。

算数科の教科専門科目内容の標準モデル[1]における本内容の対応項目は、「図形」領域の必修項目3-1（図形の性質を考察する観点としての対称性、敷き詰め等）である。

5. 変化の割合

教員養成系大学において、「変化の割合は、グラフをかくために学習するものである」との誤解をもっている学生が少なくないように思われる。これは、中学校で変化の割合を用いて一次関数のグラフをかく経験、さらに、高等学校で微分係数を利用して関数のグラフをかく経験が大きく影響しているためと考えられる。

関数学習の主な目的は、小学校で学習する比例・反比例から始まり中学校以降に学習していく様々な関数の変化の特徴を捉え理解することである。関数のグラフはそのための手段に過ぎず、「変化の割合」の導入も変化の特徴を捉えるためであり、グラフをかくことが目的ではない。算数に係る教科専門科目では、この正しい認識を定着させることが必要である。特に、「変化の割合」の概念によって、比例・反比例を含め、関数の変化の特徴をより深く捉えることができることを理解させることが重要と考える。さらに、変化の割合が高等学校で学習する微分の概念に関連していることも重視したい。

新学習指導要領解説では、比例の見方を以下のように示している（小学校学習指導要領解説・算数編，p.177）。

- (ア) 二つの数量A，Bがあり，一方の量が2倍，3倍，4倍，…と変化するのに伴って，他方の数量も2倍，3倍，4倍，…と変化し，一方が $\frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{3}$ ， $\frac{1}{4}$ ，…と変化するのに伴って，他方も $\frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{3}$ ， $\frac{1}{4}$ ，…と変化すること。
- (イ) (ア)の見方を一般的にして，二つの数量の一方がm倍になれば，それと対応する他方の数量はm倍になるということ。
- (ウ) 二つの数量の対応している値の商に着目すると，それがどこも一定になっているということ。

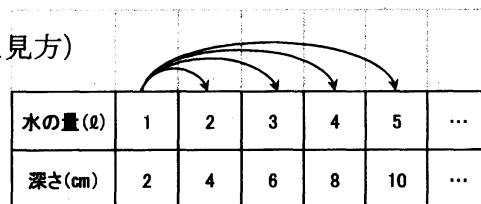
反比例も同様に3つの見方が示されている。比例・反比例の導入では(ア)の意味が用いられ，学習を通して(イ)と(ウ)の意味を児童に気づかせる指導順序が一般的である。

比例・反比例については，日常の事象における伴って変わる二つの数量の関係を表に表し，2量間のきまりを見つけることを通して比例関係を見いだす学習活動が行わ

れる。その後、比例・反比例を表す式、そして、グラフの学習へと展開する。一般に、表の見方には以下の三通りがある。

・横の見方1（同種の二つの量の割合に着目した見方）

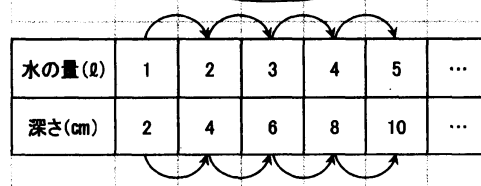
(ア)と(イ)に気づかせるために、一方の量が2倍、3倍、4倍、…と変化するのに伴って、他方の量がどのように変化するかを調べる見方である。



水の量(ℓ)	1	2	3	4	5	…
深さ(cm)	2	4	6	8	10	…

・横の見方2（変化の割合に着目した見方）

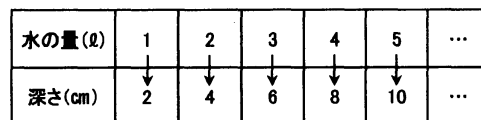
比例定数に気付かせるために、一方の量が1増えると、他方の量がどのように変化するかを調べる見方である。学習指導要領解説には、この見方は示されていない。



水の量(ℓ)	1	2	3	4	5	…
深さ(cm)	2	4	6	8	10	…

・縦の見方（関数の対応に着目した見方、異種の二つの量の割合に着目した見方）

(ウ)に気付かせるために、順序対の関係を調べる見方である。この見方においても、比例定数に気付かせることができる。



水の量(ℓ)	1	2	3	4	5	…
深さ(cm)	2	4	6	8	10	…

横の見方1は、小学校での比例・反比例の定義の導入にとって大切な見方であるが、中学校以降の関数学習では活用されない。一方、横の見方2の方は、算数教科書では扱っていないことが多いものの、比例・反比例の理解自体を深め、また、中学校以降の関数や高等学校での微分に関係するため、その素地となる大切な見方である。

比例・反比例の指導においては、それらの特徴を、表、グラフ、式を関連づけながら調べ問題解決することが重視されている。一般の関数の場合も、表・式・グラフを相互に関連づけて関数を理解することが大切である。学校図書の教科書（平成10年度）は、変化の割合を基にした表の横の見方2と縦の見方から比例定数を求めている。一方、比例・反比例のグラフの学習では、表に示された値や式から数表を求めてグラフをかく方法が取られている。この方法に加えて、変化の割合を基にした横の見方2とグラフの概形との関係を考察することにより、表・式・グラフの関係をより豊かに理解することができる。考える。「変化の割合」というメガネで表・式・グラフ相互の関係を理解することが大切である。

教材例1. 変化の割合を元に表・式・グラフの関係を調べることにより、反比例の特徴を理解する教材例

反比例の変化の割合を表や式から求めることにより、反比例の特徴を考える。変数の値が大きくなれば変化の割合の分母が大きくなるので減少する変化がゆるくなるこ

とを理解することができる。

教材例2（横の見方2の発展）。

変化の割合自体を新たな関数と見なして、さらにその変化の割合を求め、表・式・グラフの関係を調べることにより、元の関数の特徴を捉える。多項式関数の場合、変化の割合を2回とって一定となれば二次関数となることが分かる。このことは、一般の多項式関数に拡張できる。また、微分概念と関連づけることもできる。

算数科の教科専門科目内容の標準モデル[1]における本内容の対応項目は、「数量関係」領域の必修項目4-2（関数：比例関係と関数、式・表・グラフの利用等）である。

6. おわりに

以上で、算数・数学の内容で学生に十分理解されていない点や正しく認識されていない点に焦点を絞った4種類の教材を構成した。これらを授業で用いる際には、学生の理解状況や反応を確かめることによって、その主旨は生かしながら内容に大幅な変更を加えることも必要であると考ええる。

参考文献

- [1] 丹羽雅彦・松岡隆・川崎謙一郎・大竹博巳・伊藤仁一(2013), 小学校算数科・教科専門科目の講義内容に関する現況調査の結果と標準モデルの提案, 数理解析研究所講究録1828, pp. 50-60
- [2] 吾妻一興・武元英夫・長宗雄・松本紘司 (1993), 「教育系のための数学概説」, 培風館
- [3] 小西豊文 (2009), 「平成20年改訂 小学校教育課程講座・算数」, ぎょうせい
- [4] 平成22-23年度文部科学省先導的大学改革推進委託事業研究成果報告書「教科専門と教科教育を架橋する教育研究領域に関する調査研究」(2011), 上越教育大学発行