

研幾算法第 1 問について

竹之内 脩

建部賢弘が、池田昌意「数学乗除往来」の遺題に解答を与えたものが「研幾算法」である。その第 1 問は、次のものである。

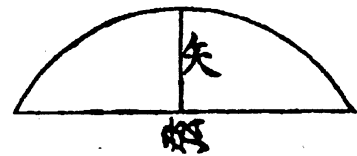
数学乗除往来四十九問之答術

一 今、弧形がある。只云う、矢若干。

問う、積幾何ぞ。

圓の率は、周 355 尺、徑 113 尺

を用う。



○答えて曰く、積を得る。

術に曰く、天元に一を立てて積と爲す。矢を以て相乗じて得る數に 16 を以て之に乘じ、得る數を甲位に寄せる。

○矢を列し、之を自して得る數に、これを四して弦幂に加入。共に得る數を乙位に寄せる。

○亦、矢を列し、之を自して得る數に、これを八して以て乙位を減じ、餘に弦を以て相乗じ、甲位を加入。共に得る數をこれを自して丙位に寄せる。

○矢七乗幂に乙位を相乗 183,275,520 段。乙位を四たび自乗 81 段。右二位相併せて共に得る數を丁位に寄せる。

○矢を九たび自乗 5,733,613,568 段。矢五乗幂乙位幂相乗 261,217,536 段。矢三乗幂乙位再乗幂相乗 96,337,664 段。矢幂乙位三乗幂相乗 73,573,068 段。右四位相併せて共に得る内、丁位を減じ、餘を左に寄せる。

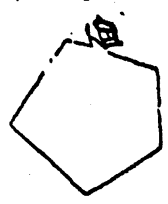
○矢を列し、之を自乗し乙位を以て相乗じ、亦丙位を以て相乗じ、得る數を 7,3549,440 を以て之に乘じ、左に寄せたると相消して、開方式を得る。之を平方に開き、積を得て、問いに合す。

[原文には、「矢を列し、之を 三たび 自乗し乙位を以て相乗じ、…」とあるが、これでは、最後の結果と合わない。研幾算法演段諺解には、「三之字衍文也」とある。]



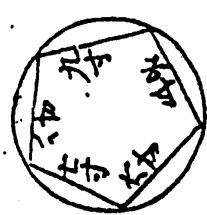
一
今有平圓闊^三只六丈二尺六寸二分
弦一丈二尺闊^三闊^三積^三
乃平圓積法徑一百十二尺闊二百六十八尺
用之

二



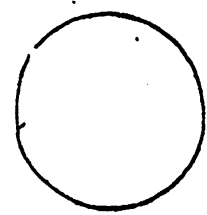
今有^四作^四之^四角^四只六面^四一^四尺^四求^四積^四
圓^四術^四
乃^四圓^四七^四角^四九^四角^四

三



今有平圓只^五此^五圓^五之^五面^五切^五其^五寸^五
六寸七寸八寸九寸也^五圓^五徑^五

四



今有平圓積^六周^六以^六之^六分^六他^六或^六求^六
徑^六一^六尺^六周^六三^六尺^六二^六尺^六或^六者^六徑^六七^六尺^六周^六二^六
十二^六尺^六或^六者^六徑^六九^六尺^六周^六一^六百^六七^六
尺^六師^六無^六子^六者^六徑^六一^六百^六一^六三^六尺^六周^六三^六百^六五^六十^六尺^六上^六之^六
此^六圓^六術^六

<現代記法>

弦 = a , 矢 = c , 弧背 = s , 積 = S , 径(直径) = d とする。

[研幾算法]

天元 = c

$16cS \rightarrow$ 甲

$4c^2 + a^2 \rightarrow$ 乙

$((乙 - 8c^2)a + 甲)^2 \rightarrow$ 丙

$183,275,520c^8 \times 乙 + 81乙^5 \rightarrow$ 丁

$5,733,613,568c^{10} + 261,217,536c^6 \times 乙^2 + 96,337,664c^4 \times 乙^3$

$+ 73,573,068c^2 \times 乙^4 - 丁 \rightarrow$ 左

$73,549,440c^4 \times 乙 \times 丙 \dots$ 左と相消す

開方の式を得て、平方に之を開き、積を得る。

[研幾算法演段諺解]

① $5,599,232c^5$

② $715,920c^4d$

③ $4,081,524c^3d^2$

④ $6,021,104c^2d^3$

⑤ $18,393,267cd^4$

⑥ $81d^5$

⑦ $4,596,840d^3$

$$s = \sqrt{\{① + ③ + ④ + ⑤ - (② + ⑥)\} \div ⑦}$$

解説

$$S = \frac{1}{2} \frac{1}{2} d s - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{2} - c \right) a$$

である。ここでは、矢 c と、弦 a しか、与えられていないことから、これを次のように変形していく。

$$\text{乙} = 4c^2 + a^2 = 4cd$$

$$\text{乙} - 8c^2 = 4cd - 8c^2 = 8c \left(\frac{1}{2}d - c \right)$$

$$\text{丙} = ((\text{乙} - 8c^2)a + 16cS)^2 = (4cds)^2 = 16c^2d^2s^2$$

したがって、最後の $73,549,440c^2 \times \text{乙} \times \text{丙}$ は、

$$\begin{aligned} 73,549,440c^2 \times \text{乙} \times \text{丙} &= 73,549,440c^2 \times 4 \cdot cd \times 16 \cdot c^2d^2s^2 \\ &= 2^6 \times 73,549,440c^5d^3s^2 = 2^{10} \times 4,596,840c^5d^3s^2 \quad [73,549,440 = 2^4 \cdot 4,596,840] \end{aligned}$$

となる。

問題では S を求めるようになっているが、 S を直接求める式を作るのは困難である。まず、 s を求め、それから S を求める式を得たものであろう。

いま、研幾算法演段諺解に与えられている s^2 の式を書くと、

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{4,596,840d^3} \times \\ &\quad (5,599,232c^5 - 715,920c^4d + 4,081,524c^3d^2 + 6,021,104c^2d^3 \\ &\quad \quad \quad + 18,393,267cd^4 - 81d^5) \end{aligned}$$

となる。この分母の 4596840 という数は、 $= 360 \cdot 113^2$ である。また、

$$5,599,232 = 5,733,613,568/2^{10}, \quad 715,920 = 183,275,520/2^8$$

$$4,081,524 = 261,517,536/2^6, \quad 6,021,104 = 96,337,664/2^4$$

$$18,393,267 = 73,573,067/2^2$$

これを上式の右辺 $2^{10} \times 4596840c^5d^3s^2$ に代入した結果は、

$$\begin{aligned} &2^{10} \cdot 4596840c^5d^3 \times \frac{1}{4,596,840d^3} \times (5,599,232c^5 - 715,920c^4d + 4,081,524c^3d^2 \\ &\quad \quad \quad + 6,021,104c^2d^3 + 18,393,267cd^4 - 81d^5) \\ &= 2^{10} \cdot 5,599,232c^{10} - 2^8 \cdot 715,920 \cdot 2^2c^9d + 2^6 \cdot 4,081,524 \cdot 2^4c^8d^2 \\ &\quad \quad \quad + 2^4 \cdot 6,021,104 \cdot 2^6c^7d^3 + 2^2 \cdot 18,393,267 \cdot 2^8c^6d^4 - 81 \cdot 2^{10}c^5d^5 \\ &= 5,733,613,568c^{10} - 183,275,520 \cdot c^84cd + 261,217,536 \cdot c^64^2c^2d^2 \\ &\quad \quad \quad + 96,337,664 \cdot c^44^3c^3d^3 + 73,573,068 \cdot c^24^4c^4d^4 - 81 \cdot 4^5c^5d^5 \end{aligned}$$

これが、研幾算法の術に、左として与えられている式

$$\begin{aligned} &5,733,613,568c^{10} + 261,217,536c^6 \times \text{乙}^2 + 96,337,664c^4 \times \text{乙}^3 \\ &\quad \quad \quad + 73,573,068c^2 \times \text{乙}^4 - \text{丁} \end{aligned}$$

である。

以下では、円の直径 $d=1$ とする。

現代の計算では、弧の長さは、

$$s = \cos^{-1}(1 - 2c)$$

として求められる。。

そこで、建部の式による値と、

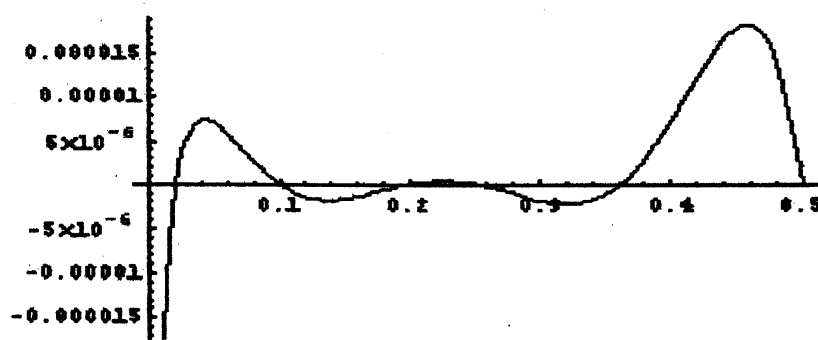
この式による値を比較してみよう。

ただし、前者では、弧の長さそのものではなく、

$$\div \text{円周率} \times \frac{355}{113}$$

とした値が使われている。これは、問題文に「圓の率は、周 355 尺、徑 113 尺を用う」とあるのに従ったものであろう。

矢の長さ c に対して、前者で計算した弧の長さ s の値を $tk(c)$ 、後者で計算した s の値に $\frac{1}{3.14159265359} \times \frac{355}{113}$ を乗じた値を $ac(c)$ として、 $tk(c) - ac(c)$ のグラフを描くと、次のようになる。



(この値は、 10^{-5} 程度のものであることに注意。)

これで見ると、 $c = 0.02, 0.1, 0.2, 0.25, 0.36, 0.5$ に対しては、両者一致する値が使われている。

c	0.02	0.1	0.2
$tk(c)$	0.28379410812	0.64350115715	0.92729530077
$ac(c)$	0.28379413331	0.64350116344	0.92729529674

0.25	0.36	0.5
1.04719764012	1.28700221564	1.57079646018
1.04719764012	1.28700232687	1.57079646018

ここで、 c に対してとった 0.1, 0.2, 0.25, 0.5 の値は自然であるが、0.02, 0.36 は、やや不自然で、どうしてこの値が用いられたのであろうか。

建部は、このようにデータを得た上で、 s^2 に対する近似の多項式を、どのようにして作ったのであろうか。

いま、現代の計算法でこの式を作ってみると、次のようになる。(Mathematica による)

$$c = \{.02, .1, .2, .25, .36, .5\}$$

$$s = \{0.28379410812, 0.64350115715, 0.92729530077, 1.04719764012, 1.28700221564, 1.57079646018\}$$

$$t = s^2 \times 360 \times 113^2$$

$$= \{3.70225337154 \times 10^5, 1.90352266435 \times 10^6, 3.95271503424 \times 10^6, 5.04100000000 \times 10^6, 7.61408949000 \times 10^6, 1.13422500000 \times 10^7\}$$

$$a_1 = (t_2 - t_1)/(c_2 - c_1)$$

$$= 1.916621659 \times 10^7$$

$$a_2 = (t_3 - (t_1 + a_1(c_3 - c_1)))/(c_3 - c_1)/(c_3 - c_2)$$

$$= 7.36503949417 \times 10^6$$

$$a_3 = (t_4 - (t_1 + a_1(c_4 - c_1) + a_2(c_4 - c_1)(c_4 - c_2)))/(c_4 - c_1)/(c_4 - c_2)/(c_4 - c_3)$$

$$= 4.89912151232 \times 10^6$$

$$a_4 = (t_5 - (t_1 + a_1(c_5 - c_1) + a_2(c_5 - c_1)(c_5 - c_2) + a_3(c_5 - c_1)(c_5 - c_2)(c_5 - c_3)))/(c_5 - c_1)/(c_5 - c_2)/(c_5 - c_3)/(c_5 - c_4)$$

$$= 4.49136563427 \times 10^6$$

$$a_5 = (t_6 - (t_1 + a_1(c_6 - c_1) + a_2(c_6 - c_1)(c_6 - c_2) + a_3(c_6 - c_1)(c_6 - c_2)(c_6 - c_3) + a_4(c_6 - c_1)(c_6 - c_2)(c_6 - c_3)(c_6 - c_4)))/(c_6 - c_1)/(c_6 - c_2)/(c_6 - c_3)/(c_6 - c_4)/(c_6 - c_5)$$

$$= 5.59923241414 \times 10^6$$

$$tk(x) = t_1 + a_1(x - c_1) + a_2(x - c_1)(x - c_2) + a_3(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)$$

$$+ a_4(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)(x - c_4) + a_5(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)(x - c_4)(x - c_5)$$

$$= -81.0000660700607078 + 1.8393267003701597 \times 10^7 x + 6.02110395487907279 \times 10^6 x^2$$

$$+ 4.08152422806646786 \times 10^6 x^3 - 715920.510880200211 x^4 + 5.59923241414000 \times 10^6 x^5$$

このようにして、次の式が得られた。[¶]

$$tk(x) = -81 + 18,393,267x + 6,021,104x^2 + 4,081,524x^3 - 715,920x^4 + 5,599,232x^5$$

[¶] 上の計算では、一々の数値に、小数第 11 位までの長い数字が使われている。このようにしないと、この最後の結果は得られない。この時代、ソロバンを使うので、このような長桁はあまり苦にならなかったであろうか。なお、小数第 11 位までというのは、關の括要算法巻貞 圓率解において、圓の定周を小数第 11 位までにしていることによると思われる。

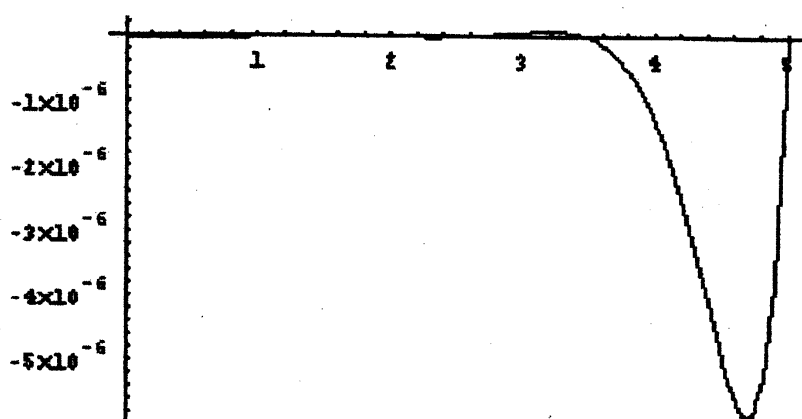
ここでは、Newton の補間式といわれる方法を使っている。

しかし、和算で、この時代に補間式を作る計算は他にない。建部は、どのようにして、この補間式を作ったのであろうか。

關孝和の括要算法巻貞の求弧術には、補間式を求める一つの方法が述べられている。いま、その方法によって、上のデータを用いて補間式を作ってみると、次の式が得られる。

$$\begin{aligned} sk(x) = & \frac{1}{(10-x)^5} * (4000000x - 29235211.9235888672x^2 \\ & + 55258118.162498917x^3 - 44152322.4022433602x^4 \\ & + 17081125.218674118x^5 - 3147408.6912053103x^6 \\ & + 220151.457073671608x^7) \end{aligned}$$

この式によって、建部の場合と同様のグラフを描くと、次のようになる。



この關の補間式は、次のようにして作られた。

$$\begin{aligned} s^2 = & a^2 + A_0x^2 - A_1 \frac{d-2x}{d-x} x^2 + A_2 \frac{(d-2x)(x-c_1)}{(d-x)^2} x^2 \\ & - A_3 \frac{(d-2x)(x-c_1)(x-c_2)}{(d-x)^3} x^2 + A_4 \frac{(d-2x)(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)}{(d-x)^4} x^2 \\ & - A_5 \frac{(d-2x)(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)(x-c_4)}{(d-x)^5} x^2 \end{aligned}$$

ここで、

$$a^2 = 4x(d-x), \quad A_0 = \frac{355^2}{113^2} - 4$$

で、 $a^2 + A_0c^2$ の部分は、豎亥録などにある s^2 の式を、 $x = \frac{d}{2}$ の場合に正確にあてはまるように、 A_0 の値を定め、そして、上の式にあてはまるように、次々、係数 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 の値を定めたものである。

上の式では、分母に 113^2 および $(d-x)^k$ ($k=1,2,3,4,5$) が出てくる。径率を 113 としているので、弧の長さとしては 113^2 を掛ける。また、 $(d-x)^5$ を掛けると、次の式になる。ただし、 $P_k = 113^2 \cdot A_k$ ($k=1,2,3,4,5$)

$$\begin{aligned}
113^2 \cdot (d-x)^5 s_0(x) &= 113^2 \cdot (d-x)^5 a^2 + P_0 x^2 (d-x)^5 \\
&- P_1 (d-2x)(d-x)^4 x^2 \\
&+ P_2 (d-2x)(x-c_1)(d-x)^3 x^2 \\
&- P_3 (d-2x)(x-c_1)(x-c_2)(d-x)^2 x^2 \\
&+ P_4 (d-2x)(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)(d-x) x^2 \\
&- P_5 (d-2x)(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)(x-c_4) x^2
\end{aligned}$$

これを、次のスキームの形に直してみる。ただし、ここでは、 $d=1$ とした。

表中、2重線の右側は、上式の右辺を表し、縦に並んでいるものの積をとり、それを加える、とする。

$113^2(1-x)^5 s^2$	$113^2 \cdot a^2 + P_0 x^2$
	$(1-x)$
	$(1-x)$
	$(1-x)$
	$(1-x)$
	$(1-x)$

$-P_1(1-2x)x^2$	$+P_2(1-2x)x^2$	$-P_3(1-2x)x^2$	$-P_4(1-2x)x^2$	$-P_5(1-2x)x^2$
$(1-x)$	$(x-c_1)$	$(x-c_1)$	$(x-c_1)$	$(x-c_1)$
$(1-x)$	$(1-x)$	$(x-c_2)$	$(x-c_2)$	$(x-c_2)$
$(1-x)$	$(1-x)$	$(1-x)$	$(x-c_3)$	$(x-c_3)$
$(1-x)$	$(1-x)$	$(1-x)$	$(1-x)$	$(x-c_4)$

ここで、建部は、両辺にかかる $(1-x)$ の累乗は不要とし、また、右辺の最初の項

$$113^2 \cdot a^2 + P_0 x^2$$

は、 $x = \frac{1}{2}$ のときの値 $113^2 \times 1.57079646018$ を用い、それに伴って右辺の後の項にかかる x^2 をすべて取り去って、次の形にする。

$113^2 s^2$	$113^2 \times 1.57079646018$
-------------	------------------------------

$-P_1(1-2x)$	$+P_2(1-2x)$	$-P_3(1-2x)$	$-P_4(1-2x)$	$-P_5(1-2x)$
	$(x-c_1)$	$(x-c_1)$	$(x-c_1)$	$(x-c_1)$
		$(x-c_2)$	$(x-c_2)$	$(x-c_2)$
			$(x-c_3)$	$(x-c_3)$
				$(x-c_4)$

このようにして、 $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$ の値は、当然上のものとは異なる)

$$\begin{aligned}
 tk(x) = & \frac{1}{113^2} \left(113^2 \times 1.57079646018 \right. \\
 & - P_1(1 - 2x) \\
 & + P_2(1 - 2x)(x - c_1) \\
 & - P_3(1 - 2x)(x - c_1)(x - c_2) \\
 & - P_4(1 - 2x)(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) \\
 & \left. - P_5(1 - 2x)(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)(x - c_4) \right)
 \end{aligned}$$

の式を作ったものと考えられる。