

スコーレムの有限主義

出口 康夫

1 序

スコーレム(Thoralf Albert Skolem: 1887–1963)は算術(自然数論)や解析学の分野で重要な業績を残したノルウェーの数学者である。が、彼はまた、ゲーデルと並ぶ 20 世紀最大の論理学者の一人と評されることがあるほど⁽¹⁾、論理学や集合論の領域でも多大な貢献をなした。特に 1920 年代から 30 年代にかけての数学基礎論の形成過程においてスコーレムが果たした役割は大きく、それを反映して、今日の標準的な論理学の教科書には、スコーレム標準形・レーベンハイム＝スコーレムの定理・スコーレムのパラドクス・スコーレム関数など、彼の名を冠した術語がいくつも登場するのが通例となっている。

しかし彼の数学や論理学における仕事が、これまでその重要度に見合った関心を集めてきたとは必ずしも言えない。⁽²⁾ 同じことは、彼の数学の哲学についてもあてはまる。かつてハオ・ワンは、スコーレムの名を戴したオスロ大学での 1993 年の講演会で、スコーレムの数学の哲学に、原始帰納算術(primitive recursive arithmetic)として具体化された有限主義(finitism)と、レーベンハイム＝スコーレムの定理から導かれる集合論的相対主義(set theoretical relativism)の二側面を認め、それらの含意と意義がこれまで十分に明らかにされてこなかったと述べた。その上でワンは、これらの側面を持つスコーレムの哲学的立場を明確にすることが、数学の哲学の重要な課題であると指摘したのである。⁽³⁾⁽⁴⁾

このワンの指摘から 10 年近く経った今日でも、状況はさほど改善されたようには思えない。スコーレムの数学の哲学は、その含意が十分に明らかにされないまま放置されている観がある。⁽⁵⁾ そこで本論は、この数学の哲学上の空白を埋める、本格的なスコーレム研究の呼び水となるべく、さしあたって彼の有限主義に焦点を絞り、その哲学的含意を明らかにし、それを基に数学の哲学におけるその位置付けを目指す。

位置付けの際、特に注目されるのは次の諸点である。(一) スコーレムの有限主義は、数学における構成主義(constructivism)の一つと目されるが、だとしたら、それはどのような意味で構成主義的なのか。(二) 構成主義の他の立場、特にその哲学的分析が比較的進んでいる直観主義(intuitionism)と有限主義との異同は何か。(三) 有限主義はどのような点で「有限的(finitary)」であると言えるのか。(四) 今日、直観主義を含めた構成主義は(カント・

ポアンカレ・フランス経験主義者などその先駆者たちは別として)、一般に排中律(the principle of excluded middle, tertium non datur) $A \vee \neg A$ を認めない。それに対し一人有限主義のみは排中律を保持する。一方では構成主義を採り、他方では排中律を認めることは両立可能なのか。

これら一群の問題に答えるため、次のような手順を踏んで議論が進む。まず構成主義一般の特徴を、古典主義と対比しつつ概観し(第二節)、その中でも特に直観主義に注目し、その哲学的な立場を簡単に見定めておく(第三節)。次にスコレームが有限主義の立場から展開した原始帰納算術(以下 PRA と略記)をやや踏み込んで紹介し、その特徴づけを試みる(第四節)。その上で、PRA の諸特徴に則しつつ、有限主義の哲学的含意の摘出を企てる(第五節)。最後に、析出された哲学的諸含意を総合することで、上記の諸問題に一定の解答を与える(第六節)。

2 構成主義

2.1 カントールとリュウヴィルによる超越数の存在証明

「数学の対象(例えば自然数や集合)は、いかなる仕方で存在しているのか。」「数学的命題(例えばユークリッドの素数定理)はなぜ確実なのか。」「数学的对象の存在のあり方と、数学的命題の確実性の根拠に関するこれらの問題を巡って、数学の哲学には様々な対立軸がある。古典主義(実在論)と構成主義との対立もその一つである。この対立は、単に哲学の領域に止まるものではない。これら二つの立場は、実質的な内容を異にする数学や論理学の理論もそれぞれ備えている。その意味でこれは、論理学や数学プロパーにおける対立軸とも言えるのである。

この対立を現代数学に齎した大きな要因の一つは、1874年に発表されたカントールの対角線論法による超越数(transcendental number)の存在証明であった。そこで古典主義と構成主義の差異を見定めるために、まずその具体的な対立点である、超越数に対するカントールの存在証明と、それと対照的なリュウヴィルの証明を簡単に見ておこう。

まず、ここで言う超越数とは、整数を係数とする方程式(ディオファントス方程式)の解とならない実数のことである。反対に、そのような解となる実数は代数的数(algebraic number)と呼ばれる。超越数の存在については、カントールに先だって 1844 年に、リュウヴィルが始めてその証明に成功していた。リュウヴィルの証明法は、まず代数的数の必要

条件(リュウヴィルの定理)を求め、次に例えば
$$\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \frac{1}{10^{4!}} + \cdots$$

といった、あるタイプの実数(リュウヴィル数)がその条件を満たさないこと、即ち超越

数であることを示すというものであった。⁽⁶⁾ このように彼は、具体例とタイプ（一般例）を示すというやり方で、存在証明を行ったのである。なお、この証明において帰謬法は用いられていない。⁽⁷⁾

一方カントールによる存在証明のやり方は、これとは大きく異なっていた。詳しい説明は省くが⁽⁸⁾、カントールは、超越数の具体例や一般例を一切与えることなく、その非存在の想定が不可能であることを指摘することで、存在証明を行ったのである。また、この証明の過程では、「実数は高々可算無限個存在する」、言い換えると「全ての実数は自然数と一対一対応する」という命題から矛盾を導いた上で、その否定命題を論証するという帰謬法が用いられていた。つまりその命題とその否定命題を選言項とする排中律が、不可欠の役割を果たしていたのである。またこの存在証明においては、自然数全体が一つの対象、即ち可算無限「集合」と見なされ、さらにそれが無限個存在するとされた上で、それら全てを要素とする非可算無限集合が指定されていた。このように、可算無限や非可算無限が、一つの与えられた対象として、即ち「実無限(actual infinite)」として扱われていたのである。

カントールによる超越数の存在の証明法は、その後の数学研究に大きな影響を与え、同種の証明法によって様々な対象が数学理論に導入されるきっかけともなった。カントールの証明法は、数学的対象の急激な増加、即ちインフレーションを齎したのである。他方、彼と同時代の数学者たちの中には、クロネッカーやポアンカレのように、この種の証明法による数学的対象の導入に対し異議を唱える者も少なからずいた。そしてこの見解の相違は現在にまで持ち越されている。大雑把に言って、古典主義者は対角線論法を受け入れ、構成主義者は、それを何らかの意味で不当であると見なす。一方、リューヴィルによる超越数の存在証明は、古典主義者・構成主義者ともに受け入れる。超越数に関するリューヴィルとカントールの存在証明の違いが、古典主義と構成主義を分かť分水嶺の一つとなっているのである。カントールの対角線論法は数学史上画期的なものであったが、同時にその証明法を認めるかどうかに関して、現代数学の中に大きなシスマをも齎したのである。

2.2 「構成」とは何か

古典主義と構成主義の違いを理解するための第二の準備作業として、次に構成主義の名の由来ともなっている「構成(construction)」とは何かを大まかに見ておこう。

現代数学において、構成とは、一般的に言って、アルゴリズムに従った一連の操作であると理解されている。⁽⁹⁾「アルゴリズムに従った操作」については、それを帰納性(recursiveness)と同一視する「チャーチのテーゼ」による数学的な定義が今日広く受け入れられている。しかし、ここでは以下の非形式的な特徴づけで十分であろう。即ち、それは、離散的なス

ステップを一つ一つ踏み、予め決められていた規則に従って、つまり決定論的に遂行される、有限回の一連の操作である。⁽¹⁰⁾

例えば超越数 $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$ は、このような意味で、リューヴィルによって「構成」された対象であると言えるが、それには若干の解説を要する。というのも、この超越数の代数的表現に無限和という無限回操作が含まれている以上、その数を有限回の操作で構成することが一見して不可能であるように思えるからである。しかし、その超越数を求める操作は、

「各々の n に対して $\sum_{n=1}^n 10^{-n!}$ を求めよ」という有限個のステップからなる計算規則を、無限回適用したものである。このことは、この有限回ステップとしての規則を定めるだけで、それを無限回繰り返したら得られる極限值として、上の超越数を一意的に特定することが可能であることを意味する。ここで、極限值としての超越数と、それを特定する有限回の操作規則を同一視するという概念操作が施される。このような概念操作によって始めて、超越数の有限回操作による構成可能性が確保されるのである。⁽¹¹⁾

有限回操作の規則と、その無限回繰り返しによって得られる極限值とを同一視するという構成主義の方針を踏まえれば、それが実無限としての可算無限や、非可算無限の導入に反対する理由も明らかとなる。構成主義が受け入れる「無限」とは、結局、「無限回繰り返し可能な有限回操作」に他ならない。他方、実無限は「その無限回繰り返しが完了した」ことまでも意味する。また非可算無限に対しては、無限回の繰り返しによってそれを生み出す有限回操作自体が設定できないのである。

2.3 構成主義と古典主義

先に確認したコントロールとリューヴィルの存在証明法を巡る、古典主義と構成主義の対立は、それぞれの存在論・認識論の相違の反映であると見なすことができる。それでは古典主義的ないし構成主義的な存在論・認識論とはいかなるものか。

まず古典主義は、数学の対象が、上の意味での「構成」などの数学者の知的活動から独立に、一定の性質を持って存在し得ると考える。すると一定の性質を持った対象の存在は、論理的・時間的な意味で、それについての数学者の認識につねに先立つことになる。数学の対象は、あたかも新たな天体が天文学者の観測によって発見されるように、数学者の存在証明によって発見されるのである。

このような存在論を受けた、古典主義の認識論とはいかなるものか。古典主義の立場からの、数学的命題の確実性の根拠を巡る議論として興味深いのは、「無矛盾性」概念を中心

とするヒルベルトの形式主義の展開であるが、それについてここで触れる余裕はない。代わりに、先に触れたカントールの証明方法が、古典的見地からいかにして正当化できるかを見ることにしよう。まず、数学の対象が構成されなくとも存在し得る以上、対象を構成することは、それについての命題を証明する際の条件とはならないはずである。古典主義によれば、数学の対象を先に見た意味で構成しなくとも、それについての命題を確実に知ることが、場合によっては可能である。また命題の証明に際して、実無限のように実際には構成できない対象を措定することも許される。さらに古典主義の存在論によれば、数学者が一定の性質 A を任意の対象 x に帰せしめることが可能かどうかにかかわらず、対象 x は性質 A を持つか否かのどちらかに決まっている。従って排中律は、古典主義において例外無く成り立つ原理なのである。以上のように古典主義の認識論によれば、数学的命題の確実な認識にとって、対象の構成は不可欠ではなく、また実無限を措定したり、排中律を無制限に使用することも許されることになる。これらの点で、カントールの証明は古典主義的見地から正当化されるのである。

一方、構成主義において、数学の対象は数学者によって構成されることによって始めて存在すると見なされる。それは発見されるのではなく、作られるのである。例えば、超越数はリューヴィルによって構成されることによって、始めて存在するようになったとされる。また、構成されなければ対象が存在しない以上、その対象についての確実な知識を得るためにも、対象の構成が必要となる。逆に、対象が我々の構成物に他ならない以上、我々は、それを一定の性質 A を持つものとして構成しさえすれば、「それが性質 A を持つ」という命題を確実に知ることができる。つまり、数学的对象についての確実な認識を得るためには、その対象を構成することが必要かつ十分な条件となっているのである。

すると対象の構成を伴わないカントールの存在証明は、構成主義者にとって不当なものとなる。また先に触れたように、構成可能な対象ではない実無限を措定することは、構成主義にとってナンセンスである。このような実無限を措定している点でもカントールの証明法は、構成主義者には受け入れがたい。さらに構成主義は、カントールによる排中律の使用もまた認めない。ところが後述するように、それがどの点で認めがたいかという理由については、構成主義の中でも、直観主義と有限主義とでは見解が異なるのである。いずれにしても、カントールによる超越数の存在証明は、これらの点で構成主義者にとって何重の意味でも受け入れがたいものである。

また上記のような構成主義的存在論と認識論からすれば、構成によって数学の対象が存在するようになることと、それについての命題が確実に認識されることとは、同じ一つの事態となる。言い換えると、構成主義によれば、数学において、対象の存在とそれについ

ての認識は、論理的・時間的に同時であり、前者が後者に先立つことはないのである。

2.4 様々な構成主義

以上、構成主義の一般的特徴を、古典主義と対比させつつ見てきたが、実は一口に構成主義と言っても、そこには様々な立場が含まれている。例えば構成主義数学についての現代の代表的な教科書においても、以下の諸立場が現役の理論として取りあげられているのである。⁽¹²⁾ (一) 直観主義。(二) マルコフ派の構成主義的帰納数学(Marcov's constructive recursive mathematics)。(三) ビショップの構成主義的数学(Bishop's constructive mathematics)。(四) 有限主義。⁽¹³⁾

これらは多かれ少なかれ異なった数学的原理を採用しており、その原理の背後にある存在論・認識論、ひいてはカントールの存在証明が認められない理由も必ずしも一様ではない。言い換えると、先に挙げた構成主義の一般的な特徴も、全ての構成主義に例外なく無条件に当てはまる「本質」というよりは、構成主義のメンバーが多かれ少なかれ共有する「特徴の束」と見なすほうが正確である。構成主義数学は、ゆるやかな家族的類縁体をなしているのである。

これらの構成主義的数学の内、以下では専ら直観主義と有限主義に注目し、それらを比較する。というのも、マルコフ派とビショップ派の構成主義は、現在のところ専ら数学的な理論として提案されるに止まっているのに対し、直観主義は、その創始者であるブラウワーやダメットによる哲学的分析が比較的進んでおり、有限主義の哲学的立場の明確化を試みる際の対照例として相応しいと思われるからである。

3 直観主義

3.1 「意味 = 証明可能性」テーゼ

直観主義者としては、上に名を挙げたブラウワーとダメットの他に、ハイティングとコルモゴロフという二人の数学者が有名であるが、これらの人々の間にも、数学上・哲学上の立場の違いが見られる。直観主義もまた一枚岩の立場ではないのである。ここでは直観主義の様々な哲学的主張のうち、特に「真理 = 証明可能性」テーゼとして知られる、彼らが共有する哲学的意味論の主張を取り上げよう。このテーゼはまた、先の構成主義の一般的な特徴には全面的には回収されない、直観主義独自の含意でもある。

例えばダメットは、「ある表現の意味を理解するとは、それが適切に使用される条件を理解することに他ならない」という、後期ヴィットゲンシュタインに由来する「意味使用説」を出発点として先のテーゼを導く。数学において、命題は「真なるもの」として主張され

るが、この真理主張が適切なのは、その命題に対して証明が与えられている場合であり、またその場合に限られる。すると「意味使用説」から言えば、数学の命題の意味とは、それを確証ないし反証する証明に他ならないことになる。数学の命題が真であるとは、それを支持する証明が与えられていることに他ならず、それが偽であるとは反証が与えられていることを意味するのである。そして、これらどちらの証明も与えられていない命題は、無意味であると見なされる。何らかの証明が与えられていることが、命題の有意味性の条件なのである。このように「真理」概念は本質的に「証明可能性」概念に依存していると捉える直観主義的な哲学的意味論からすれば、証明が与えられなくとも命題は真ないし偽、ひいては有意味であるとする古典主義的な意味論は受け入れがたい。「証明可能性を超えた真理概念」を巡って、それを支持する古典主義と、それを拒否する直観主義は鋭く対立しているのである。⁽¹⁴⁾

3.2 B-H-K 解釈と排中律の「弱い反例」

次に古典主義と直観主義の今一つの対立点として有名な、排中律の普遍妥当性の是非を巡る問題を取り上げよう。排中律に対する直観主義の立場は、先の「意味＝証明可能性」という哲学的なテーゼを、論理的な意味論の規則として定式化した、いわゆるB-H-K解釈からの帰結として得られる。⁽¹⁵⁾ ちなみにB-H-K解釈とは、論理操作子($\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \forall, \exists$)に対して与えられた「証明」概念を基礎とする解釈である。ここでは、以下の議論に関連する、選言記号と否定記号に対するB-H-K解釈のみを取り上げる。

$\vee$ -BHK 解釈: $A \vee B$ の証明は、 A の証明を示すか、 B の証明を示すことで与えられる。

$\neg$ -BHK 解釈: $\neg A$ の証明は、 A の仮定的な証明を矛盾の証明へと変形する構成が示されることで与えられる。

さて、これらの解釈を採用すれば、排中律 $A \vee \neg A$ は一般的に成り立たないことになる。しかしここで「一般的に成り立たない」という意味は注意を要する。このことはB-H-K解釈の下で、排中律から矛盾が導かれる ($A \vee \neg A \Rightarrow \wedge$) ことや、また排中律を偽とする (即ち $\neg(A \vee \neg A)$ を真とする)、通常の意味での排中律の反例となる A を示すことができるということを意味しない。⁽¹⁶⁾ B-H-K解釈の下で一般的に排中律が成り立たないとは、排中律を偽とする反例 (これは「強い反例」と呼ばれる) ではなく、それに関して排中律がさしあたっては真とならないような例 (「弱い反例」) が指摘できるということだけを意味するのである。

この弱い反例として、例えば「(5 と 7, 11 と 13 のように) その差が 2 である双子素数(twin prime)は無限個存在する」という古くからある「双子素数予想」を取り上げよう。上に挙げた $\vee$ と $\neg$ に関する *B-H-K* 解釈によれば、 $A \vee \neg A$ が成り立つのは、我々が A の証明を持っているか、または $\neg A$ の証明を持っているか、つまり A についての仮定的な証明から矛盾を導いたかのいずれかである。しかし双子素数予想が「予想」に過ぎないことは、現時点で我々はその証明もその否定の証明も手に入れていないことを意味している。言い換えると、この双子素数予想に関して、排中律は「さしあたっては真ではない」のである。もちろん(近年証明されたフェルマー予想のように) この双子素数予想も将来その妥当性(ないし不可能性)が証明されるかもしれない。その意味で、この予想(そしてゴールドバッハ予想など、他の全ての予想)は、排中律を「偽」とする「強い反例」ではないのである。このように直観主義にとって可能なのは、せいぜい排中律に対して弱い反例を挙げることだけであった。それでも、その存在論に基づいて排中律の普遍妥当性を主張する古典主義との違いは歴然である。古典主義は、「強い反例」はもちろん、「弱い反例」をも認めないからである。

また先に見たカントールによる超越数の存在証明においては、「実数は高々可算無限個存在する」という命題を証明することも、ないしはその証明を仮定したうえで、そこから矛盾の証明を構成することもなく、その命題とその否定を選言項とする排中律が用いられていた。このようなケースは、直観主義にとっては排中律の「弱い反例」以外の何物でもない。直観主義者から言わせれば、カントールは、排中律を使ってはならない場面で使ったことになる。直観主義は、先に指摘した構成の欠如と実無限の措定に加え、排中律の不当な使用という理由でも、カントールの証明を批判するのである。

4 原始帰納算術

4.1 原始帰納算術とは何か

ここで目をスコーレムの有限主義に転じ、まず、その立場が具体的に展開された数学理論を見定めておこう。スコーレムは 1923 年の論文で、量子子を用いずに、代わりに「帰納的な考え方(die rekurrende Denkweise)」による操作である帰納的定義と帰納的証明を駆使して、後に「原始帰納算術(PRA)」と呼ばれることになる初等算術の体系を構築した。ここではこの PRA を、次の四点に分けて特徴付けておく。

量子子の排除：スコーレムの PRA は、ラッセル・ホワイトヘッドの『プリンキピア・マティマティカ』が提示した古典論理の体系を用いていたが、そこから自然数全体という無限集合を定義域とする変数と、その変数を束縛する全称・存在量子子⁽¹⁷⁾ が除かれていた。

このことは、自然数全体を実無限と捉える見方が排除されたことを意味する。ちなみにスコーレムは既に 1919 年の論文で、量子子を用いないクラス計算の体系を提案していた。⁽¹⁸⁾ PRAは量子子の削除というこの方針を、算術に適用して得られた成果である。⁽¹⁹⁾ ここで注意すべきは、スコーレムが禁止したのは、あくまで自然数全体に亘る変数の量化であって、有限領域を覆う変数を束縛する「有界量子子(bounded quantifier) $\forall x_{x < y}, \exists x_{x < y}, x, y \in N$ 」の使用は許されているという点である。

自由変数文：ただ有界量子子を用いた論理式も、つねに有限選言文か有限連言文に書き直することができる。(例えば $\exists x_{x < y} Ax$ は $A(1) \vee A(2) \vee \dots \vee A(y-1)$ に書き換え可能である。)⁽²⁰⁾ すると非有界量子子の削除によって、PRAの全ての命題は、最終的に、変数としては自由変数のみを含む論理式(free variable formula) (以下「自由変数文」と呼ぼう)か、その命題関数として表現されることになる。PRAにおいて、例えば加法の結合則は $\forall x \forall y \forall z (x + (y + z) = (x + y) + z), x, y, z \in N$ としてではなく、 $(a + b) + c = a + (b + c)$ (a, b, c は自由変数)として定式化されるのである。このように、定理の一般性は、全称量子子ではなく、自由変数によって表現されることになる。

非公理的体系：古典算術を代表するペアノ算術(PA)や、直観主義算術の代表例たるハイティング算術(HA)は、いずれも公理系を持つ公理体系であるが、スコーレムのPRAには公理系が与えられていない。⁽²¹⁾ 代わりに、「自然数 n 」「後継者 $n+1$ 」「等号 $=$ 」、それに帰納的定義と帰納的証明法(数学的帰納法)が基礎的な道具立てとして採用されている。⁽²²⁾ もちろんPRAを公理体系として整備することも可能であり、後にカリーやグッドシュタインはそれぞれ別の仕方でPRAの公理化を行った。⁽²³⁾

帰納的な考え方：一般的な命題を定式化したり証明したりする際に、非有界量子子に代わって不可欠の役割を果たすのが、帰納的な考え方、即ち帰納的な定義と証明法であった。実際PRAにおいては、大小関係や素数といった全ての述語や、加法や乗法といった全ての関数が帰納的に定義され⁽²⁴⁾、またそれらを用いた定理も全て帰納的に、即ち数学的帰納法によって証明されている。この帰納的定義によって、PRAに例えば「素数」という対象が導入され、また数学的帰納法によって、その対象が様々な性質を持つことが、素数に関する一連の定理として証明されるのである。

帰納的な定義には様々なタイプがあるが、標準的なものは、ある概念 A を、まず数 1 に関して定義し、次にその概念が任意の数 n に関して定義されたという仮定の下で、それを数 $n+1$ に対して定義するという操作である。⁽²⁵⁾ まず「大小関係」を例にとり、このタイ

プの帰納法による述語の定義を見てみよう。PAに代表される古典算術やHAに代表される直観主義算術といった、非有界量化を認める算術体系において、大小関係は、

$$a < b =_{df} \exists x(a + x = b), x \in N$$

として、無限領域に亘る変数 x を束縛する存在量化子を用いて定義されている。それに対して PRA において、大小関係は自由変数 b に関して帰納的に定義される。

(1) $b = 1$ の場合、 $a < 1$ は偽。

(2) $b = n + 1$ の場合、 $a < n + 1 =_{df} (a < n) \vee (a = b)$

まず(1)では、 $b = 1$ の場合に $a < b$ を真とするケース（実際には、そのようなケースがないこと）が示されている。次に(2)で、 $b = n$ の場合に $a < b$ （従って $a < n$ ）が定義されたという前提で、それを定義項に組み込んで、 $b = n + 1$ の場合の定義が与えられている。⁽²⁶⁾

また関数の帰納的定義の例として、ここでは $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ という数列を与えるフィボナッチ関数の定義を取り上げよう。この関数は代数的には次のように定義される。

$$f(x) =_{df} \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{x+1} - \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{x+1}$$

一方、同じ関数に対する帰納的な定義は以下である。

$$f(0) = 1, f(1) = 1$$

$$f(n + 2) = f(n + 1) + f(n)$$

ここでは $f(0)$ と $f(1)$ の値が与えられた後、 $f(n + 2)$ が $f(n + 1)$ と $f(n)$ の関数として表現されている。⁽²⁷⁾ ここで用いられているのは、二つの初期定義を備えた、先の標準的な帰納的定義の一種の変形である。またこのように関数の帰納的定義においては、関数の一般形 $f(x)$ が代数的に表現されるのではなく、 $f(0), f(1), f(2), f(3), \dots$ という関数値を順次決定してゆくプロセス、即ちアルゴリズムの規則が示されるのである。⁽²⁸⁾

以上のように帰納的定義では、全ての対象が有限のステップを踏んで定義されている。スコレームは 1923 年の論文で、PRAはこの点で「数学における定義は、有限回の手続きで目的に到達する場合、そしてその場合にみに正当な定義たりうる」というクロネッカーの有限主義的な原理を踏まえたものであると述べている。⁽²⁹⁾

次に帰納的な証明法としての数学的帰納法を見てみよう。数学的帰納法にも様々なタイプがあるが、PRAでは、いわゆる「弱い帰納法 $A(1), A(n) \rightarrow A(n + 1) \Rightarrow A(n)$ 」に加え

て、「強い帰納法 $\forall_{m < n} (A(m) \rightarrow A(n)) \Rightarrow A(n)$ 」⁽³⁰⁾や「もし任意の数 n が性質 A を持てば、 A を持つ最小の数が存在する」という「最小数原理(the least number principle) $\neg A(n) \vee \exists_{x < a} \forall_{y < b} \{A(x) \wedge (\neg A(y) \vee (x = y))\}$ 」⁽³¹⁾ が用いられている。これら三つの数学的帰納法は、「どれか二つを前提すれば残り一つが導かれる」という意味で等値である。
(32)

4.2 古典算術・直観主義算術・原始帰納算術

ここで PRA と、PA と HA の異同を改めてまとめてみよう。まず PRA と PA は古典論理を用い、従って排中律を普遍的な論理規則として採用する。一方、HA は B-H-K 解釈に基づく直観主義論理を採用し、排中律の普遍性は認めない。また PA と HA は、自然数全体を定義域とする変数と、それを束縛する量子子、即ち非有界量子子(unbounded quantifier)を用いるのに対し、PRA はそのような量子子を使用しない。

これらの異同を「素数は無限個存在する」というユークリッドの素数定理に即して確認してみよう。まず PA では、この定理は非有界存在量子子を用いて、

$$\exists x(\text{Pr}(x) \wedge (x > y)), x, y \in N$$

と表現することが許される。ここで $\text{Pr}(x)$ は「 x は素数である」を意味し、更にこれを量化文で書き直すと、

$$\text{Pr}(x) =_{\text{df}} x > 1 \wedge \neg \exists y((1 < y < x) \wedge \exists z(yz = x))$$

となる。結局、ユークリッドの定理は PA において、

$$\exists x(x > 1 \wedge \neg \exists y((1 < y < x) \wedge \exists z(yz = x)) \wedge x > y)$$

と表現されることになる。⁽³³⁾そしてこの定式では、無限領域 $y < x < \infty$ を値として持つ変数 x に対する存在量化が含まれているのである。さらに PA では、この定理を排中律によって証明することが許される。実際、早くはアリストテレスの『分析論前書』(I. 23, 41 a 26-7) に、排中律を用いた単純でエレガントな証明が、帰謬法の古典的な例として載っている。

(もちろん排中律・帰謬法を用いない証明も可能である。)

HA でもユークリッドの素数定理を、PA と同様に非有界量子子を用いて定式化することができる。しかしその証明に排中律を用いることはできない。代わりに、それは最小数原理の直観主義版を用いて証明することができる。⁽³⁴⁾

一方 PRA では、上のような非有界存在量化を用いた定式化は採用できない。代わりにユークリッドの素数定理は、有界存在量化を用いた論理式

$$\exists_{x < n!+1} (\text{Pr}(x) \wedge (x > n))$$

として、即ち「任意の n に対して $n < x \leq n!+1$ である素数 x が存在する」として表現し直される。ちなみに PRA において、 $\text{Pr}(x)$ は

$$\text{Pr}(x) =_{df} \{(x > 1) \wedge \forall_{x < n} x(x \leq 1 \vee x = n \vee R(n, x) = 0)\}$$

と定義される。(ここで $R(n, x)$ は n を x で割った場合の余りを意味する。) また PRA では、この有界存在量化文を排中律によって証明することが許される。実際スコーレムは、それを帰謬法によって証明しているのである。⁽³⁵⁾

もちろん非有界量化子を用いない PRA における定式化は、それを用いる PA や HA の定式化に比べて非力である。例えば先に触れた「双子素数予想」は、今のところ PRA の枠内では定式化できない。⁽³⁶⁾ しかし PRA は、確かに PA や HA の全ての内容を覆うことはできないにしても、かなりの部分をカバーできるのである。

4.3 原始帰納算術の動機と意義

それではなぜスコーレムは、定式化の道具立てにおいて PA や HA より自己規制的で、結果としてそれらの算術体系の全てを覆えない PRA を構築したのか。彼自身が 1923 年の論文で述べている PRA 構築の動機は、帰納的な手段のみで初等算術の(全てではないにしても)かなりの部分が再構築できることを示すことで、無限領域に亘る変数やそれを束縛する量化といった道具立て、さらにはそれらに含意されている「実無限」概念が数学にとって不可欠ではないことを示すことであった。⁽³⁷⁾

また PRA は、特にメタ数学において多大な数学的意義を有する。周知のようにゲーデルは 1931 年に PA を含む形式的体系の不完全性を証明するにあたって、ゲーデル数化という技法を導入し、メタ数学を算術化した。その際用いられた算術体系が PRA であった。⁽³⁸⁾ つまりメタ算術的体系として再構成された PRA の枠内で、ゲーデルの二つの不完全定理が証明されたのである。⁽³⁹⁾

さらにまた PRA の帰納的定義を、対象を定義するプログラミング言語として、またその帰納的証明を、その対象の性質を証明するプログラミング論理と見なすことができる。このような解釈の下で PRA は、「数学を、どこまでそしていかにして計算によって再構成できるか」という今日のコンピューター数学の課題に挑戦した先駆的な業績であると評価されるのである。⁽⁴⁰⁾

4.4 原始帰納算術の独自性 1：有限的解釈・検証可能性

次に、他の算術体系には見られない PRA の数学的独自性とは何かを、改めて考えてみよ

う。

先に見たように、「実無限」概念の数学における不要性を示すことが、PRA を構築した際のスコーレムの動機であった。しかし少なくとも算術の展開にとって「実無限」が不要であることは、例えば直観主義の立場からその後構築された HA によっても明らかである。HA が整備された今日では「実無限」の不要性を示したことが PRA の算術体系としての独自性であるとは、もはや言えないのである。

また「定義の手続きの有限性」が保証されている点で、PRA はクロネッカーの有限主義の立場を継承していると、スコレームは述べていた。確かに PRA において数学的対象を定義する帰納的手続きは、有限回の操作であった。しかし定義の手続きが有限回に限定されているのは何も PRA に限らない。それは、数学的対象の構成をアルゴリズムのプロセスであると見なす他の全ての構成主義、従ってまた直観主義やそれに基づく HA にも共通する特徴である。対象の定義が有限的であることも、PRA を他の構成主義的算術から区別する弁別特性とはならないのである。

今日でも有効な PRA の独自性を探るために、ここでは、スコレームが 1950 年の講演で PRA に言及して、「量子子を含まない推論は、有限的に解釈可能でかつ検証可能(finitarily interpretable and verifiable)である」という意味で真なる命題のみを生み出す」(Skolem, 1950, reprinted in his 1970, p.527)と述べていることに注目しよう。ここで言われている「有限的な解釈・検証可能性」に対して、彼はそれ以上の説明を特に与えていない。しかし前節で確認した PRA の諸特徴を踏まえれば、それは以下のように理解することができる。

PRA の第一の特徴は非有界量子子の放棄であった。またこの放棄によって、PRA に登場する全ての命題が自由変数文として表現されることも、既に確認済みである。ところで自由変数文、例えば「加法の交換則」を表わす $a + b = b + a$ は、その中の変数を具体的な数で置きかえるという有限回の操作によって、変数を含まない文、例えば $1 + 2 = 2 + 1$ に書き換えることができる。(以下で、この変数を含まない文(variable free formula)を便宜的に「無変数文」と呼ぼう。) この無変数文は、自由変数文が真であるケースを示す具体例(instance)であると言える。つまり自由変数文としての PRA の全命題に対して、有限回の手続きで具体例を与えることが可能なのである。いま一般的な命題に対して、それを真とする具体例を与えることを、その命題の「解釈」と呼べば、非有界量子子の排除は PRA の全ての命題に対して、有限回の手続きで、この意味での解釈を与えることを可能とする。これこそが、先にスコレームが述べていた「有限的な解釈可能性」に相当するであろう。

同様のことは「有限的な検証可能性」についても言える。いま自由変数文として表わされた一般的な命題 $a + b = b + a$ に対して、何らかの証明が与えられたとしよう。PRA に

において我々は、その自由変数文に対してつねに具体例 $1+2=2+1$ を与えることができ、次にそれに対する計算を行うことで $3=3$ を得る。この一連の有限回操作によって、我々は加法の交換則についての証明が正しかったことを、具体的な計算によって確かめることができた。計算機数学の慣例に従い、証明の正しさを数値計算によって確かめることをその証明の「検証」と呼べば、非有界量子子の排除は PRA の全ての定理に対して、有限回の手続きで、この意味での検証を可能とする。これが先の「有限的な検証可能性」の内実であろう。

重要なことに、以上の意味での「有限的な解釈・検証可能性」は、非有界量子子を含む PA や HA では保証されない。例えば PA でも HA でも登場しうる $(\neg B \rightarrow \exists x \neg Ax), x \in N$ という文を取り上げよう。この文の具体例を挙げるためには、自然数全体という無限の領域において、性質 A を持たない数を探す必要があるが、この探索が有限回の手続きで現実に関わる保証はどこにもない。⁽⁴¹⁾ 具体例が与えられなければ、それに即した「証明の数値計算による検証」を行うことも、もちろん不可能である。結局、古典算術においても直観主義算術においても、非有界量子子を採用する限り、算術の命題に対して、有限回の手続きで具体例を与え、かつその証明を数値計算によって検証できるとは限らないのである。

結局、全ての命題に有限の手続きで具体例を与えることができ、かつ全ての証明をその具体例に即した数値計算によって検証できるという点が、PRA の独自性としてまず浮かび上がるのである。

4.5 原始帰納算術の独自性 2：論理的中立性

次に PRA の独自性の第二点として、古典論理と直観主義論理に対する中立性を取り上げよう。さて、PA は古典主義論理を用いて、HA は直観主義論理を用いてそれぞれ構築されていた。一方、直観主義論理によっては PA を、また古典主義論理によっては HA をそれぞれ構築することはできない。それに対して PRA は古典論理によっても直観主義論理によっても同じように構築できる。スコレーム自身は古典論理を採用して PRA を構築していたが、実は直観主義論理の枠内でも PRA を展開できるのである。⁽⁴²⁾

論理に関する PRA の独自性はこの点だけに止まらない。実は PRA の枠内に限れば、 $B-H-K$ 解釈に基づく直観主義論理からも、排中律が定理として導出されるのである。⁽⁴³⁾ 以下このことを非形式的に説明しよう。何度も触れるように、PRA の全ての命題は、自由変数文かその命題関数として表現される。また PRA の命題を作る基本的な道具立てが「自然数」「後継者」「等号」に限られていたことを考えると、PRA の自由変数文は全て $a = b$ という等式に書き直すことができることが分かる。ちなみに $a = b$ を日常言語で書き直すと「ある二

つの固有名ないし表現が、同じ対象[特定の自然数]を意味ないし指示している」(Skolem, 1923, p.305)となる。するとPRAにおける排中律も、等式 $a = b$ の命題関数、即ち $a = b \vee \neg(a = b)$ に還元できることになる。そしてこの命題関数は、直観主義論理の枠内においても、例えば $(a < b) \vee (a = b) \vee (a > b)$ という定理から証明可能である。言い換えると、排中律の選言項の一方を $a = b$ に限った場合、直観主義者も、つねにそれを証明できるか、またその仮定的な証明から矛盾を導き出すことができる。つまり、このように限定された排中律には「弱い反例」が生ずる余地がないのである。もちろん選言項に非有界量子を含む排中律 $\forall xAx \vee \neg\forall xAx$ に対して、直観主義者は弱い反例を提示できる。従って非有界量子を用いるHAでは、排中律は成り立たないのである。

以上のようにPRAは古典論理によっても直観主義論理によっても同様に構築でき、またそこでは直観主義も排中律を認めるので、排中律の是非という両論理の争点は解消される。言い換えると、PRAにとっては古典論理と直観主義論理の違いは実質的な意味を持たない。PRAは両陣営に対して、どちらにも排他的に属さない、いわば中立的な立場をとるのである。

5 有限主義の哲学的含意

5.1 認識論

前節で見定めたPRAの特徴や独自性に基づいて、スコレームの有限主義の哲学的含意をいくつか取り出してみよう。まずはその認識論的含意を明らかにすることから始めよう。スコレームは上で見た「有限的な解釈・検証可能性」に言及した箇所、PRAの「長所」として「明晰さと確実さ(clearness and security)」を挙げている。⁽⁴⁴⁾これを受けてハオ・ワンは、PRAが公理的集合論・古典的解析学・カントールの集合論といった他の数学理論と比べても最大限の明晰さと確実さを持つことを認めている。⁽⁴⁵⁾しかし両者とも、このPRAの「長所」—ないしは中立的に言って—「特徴」に対して特に説明を与えていない。しかし既にPRAの「有限的な解釈・検証可能性」の内実が明らかになった以上、この「明晰さ・確実さ」の意味も容易に推察できる。まずPRAの明晰さとは、全ての式に対して有限的な解釈可能性、即ち、有限回の手続きで無変数文という具体例を与えることが保証されていることを意味するだろう。またPRAの確実さとは、その全ての定理に対して数値計算による検証が保証されていることであると見なせる。

もちろん以上のような「有限的な解釈・検証可能性」が確保されていない算術体系は、全く明晰でも確実でもないとは、スコレームは考えていなかったであろう。彼は、1950年の講演の先ほどらい問題にしている個所で「私はファナテックではない。非有限的な考え

や方法を批判することは、私の意図ではない」(ibid. p.527)と述べている。体系の明晰さや確実さとは、あくまで程度問題であり、有限的な解釈・検証可能性を持つ PRA は、比較的最高の明晰さと確実さを持つにすぎない、というのがスコレームの本意であろう。

ただ我々は、有限主義を、上の意味での具体例を持つ命題を最高度に「明晰」であると見なし、その具体例に即した数値計算による検証が、定理の証明を最高度に「確実」にすると考える立場であると見なすことができる。「数学的命題の確実性の根拠とは何か」という認識論的問題に対して、有限主義は「その命題に対し無変数文という具体例をつねに与えることが可能であり、その具体例に即した数値計算による証明の検証の可能性がつねに保証されていることにある」と答えるであろう。

しかしこれら最高の明晰さと確実さを齎した非有界量子子の排除は、他方では「双子素数定理」の定式化ができないという事態に象徴されるように、PRA の命題定式化能力の低下をも招いていた。それでもあえて非有界量子子の排除に踏みきった点で、有限主義は上記の意味での「最高の明晰さ・確実さ」を、定式化能力の非力を補って余りある、算術ひいては数学一般の持つ最大の長所と見なす立場をとっているとも言えるのである。

5.2 有限主義的「構成」

「有限的解釈・検証可能性」という PRA の独自性はまた、有限主義における「構成」とは何か、それは他の構成主義、例えば直観主義の「構成」とどう違うのかを考える手がかりにもなる。

先に見たように、PRA においては帰納的な操作が基礎的な道具立てとして採用され、その操作によって対象が定義され、またその対象が一定の性質を持つことが証明されていた。この帰納的操作とは、有限的で離散的で決定論的な操作である。つまりそれは、上で確認した「構成」の意味に照らして、一定の性質を持った対象を「構成」する操作であると言える。

しかし有限主義においては、数学的命題は具体例が与えられて始めて、またその命題の証明は与えられた具体例に基づく数値計算による検証がなされて始めて、それぞれ最高の明晰さ・確実さを得ると考えられていた。この具体例の例示や数値計算による検証作業もまた、有限的で離散的で決定論的な操作である。そこで、帰納的な定義と帰納的な証明に加え、定義に対する具体例提示の操作や、証明に対する数値計算による検証の操作をも含め、一貫した作業と見なすことにしよう。この一貫した作業もまた、有限的・離散的・決定論的である点で、「構成」作業と言える。このように拡張された構成作業を完遂して始めて、命題の明晰性や証明の確実性が最高度に保証されるのである。端的に言って、有限

主義的な構成とは「定義に対する具体例の提示」「具体例に即した数値計算による証明の検証」までをも含む操作と見なせるのである。

しかし、自由変数文としての帰納的定義が与えられた後、数値の代入によって具体例を導出する操作は、数学的にはトリヴィアルなものに過ぎない。またあくまで数値計算は定理の検証に過ぎず、定理の証明とはならない。定理の証明自体は、数学的帰納法による操作で完了している。これらの意味で、帰納的な操作は、有限主義的な構成の「数学的に実質的な部分」をなすと言えよう。

「具体例の提示を伴った定義・数値計算による検証を伴った証明」という「構成」概念は、他の構成主義、特に直観主義には見られない有限主義固有の考えである。このことは、直観主義における構成が、必ずしも具体例の提示までは含意していないことからも見取れる。先に見たように、非有界量子を用いる HA では、有限回の操作によって、任意の概念に対して具体例を与え得ることが、つねに保証されているわけではなかったのである。

5.3 存在論

以上見てきたことは、「有限主義は、PRA の全ての定義に対して有限回の操作で具体例を与え、全ての証明に対して有限回の手続きで数値計算による検証を行うことを要請している」と言い換えることもできる。逆に言えば、有限主義は、具体例が存在しているかもしれないが、それを有限回の操作で示すことができないような対象を定義によって算術に導入することを認めないし、また具体例に即して有限回操作で検証できないような性質を対象に付与することも拒否するのである。有限主義的構成についての先の理解を踏まえて言えば、有限主義において、数学的对象の存在とは、それが具体例と数値計算を伴って構成されることと同義なのである。

このように一定の性質を持った対象の存在の必要十分条件として、具体例の提示とそれに即した数値計算まで求める有限主義にとって、「存在する」と言える対象は、一義的には具体例としての個々の自然数に限定されていると考えることもできる。例えば自由変数文として定義された「素数一般」は、よしんば存在するとしても、 $2, 3, 5, \dots$ という個々の自然数に比べると、その存在は二義的であるといえる。同じことは、自然数のペアとして定義される「整数」、整数のペアとして定義される「有理数」、有理数の集合のペア（デデキント切断）として定義される「実数」、実数のペアとして定義される「複素数」、三つの実数の組として定義される「ユークリッド空間の座標点」などについても言える。厳密な意味で存在するのは、個々の自然数という具体例としての個物だけであり、それ以外の対象は自然数を一定の仕方で組み合わせたものに過ぎない。そして自然数をいかに組み合わせ

ようとも、存在者の数は増えないのである。このように有限主義から、存在論上の自然数還元主義を導き出すことも可能である。

5.4 哲学的意味論

ここでもう一度、先に引用した箇所(Skolem, 1950, in his 1970, p.527)で、スコレームが PRA の全命題は「有限的に解釈可能で検証可能であるという意味で真」であると述べていたことを思い出そう。先に確認した「有限的解釈・検証可能性」の意味を踏まえると、ここから次のような哲学的な意味論のテーゼを引き出すことが可能であろう。

「命題が真であるのは、それに対して有限回の手続きで具体例が与えられ、その例に即した数値計算によって、その命題の証明が検証された場合であり、かつその場合に限られる。」

(46)

この「真理＝例示・検証可能性テーゼ」とでも呼べる主張を前提すれば、非有界量子子の排除による全命題の自由変数文化という PRA の基本戦略が、不可避の選択となる。なぜならこのテーゼを奉ずる限り、全命題を自由変数文とし、それらの有限的解釈・検証可能性を確保しておかない限り、真でも偽でもない、即ち無意味な命題が大量に発生する恐れがあるからである。

ところで、直観主義の意味論の観点からは有意味な命題であっても、有限主義的な有意味性基準を満たすとは限らない。例えば上でも挙げた $(\neg B \rightarrow \exists x \neg Ax)$ という命題に対して、直観主義者が証明を与えたとしよう。この命題は直観主義的な意味基準によれば真、ひいては有意味であることになるが、その具体例を有限回の手続きで与え得ることが保証されていない以上、有限主義的な観点からは無意味なのである。

それでは逆に、有限主義の有意味性基準を満たした命題は、全て直観主義的にも有意味であると言えるのだろうか。このことを見るために、PRAにおいては直観主義の観点から見ても排中律が成り立っていたことを思い起こそう。するとPRAの定理は、たとえその数学的帰納法による証明において排中律が用いられていたとしても⁽⁴⁷⁾、直観主義の意味論の観点から言っても真なる命題となるのである。結局、有限主義的な有意味性基準を満たした全ての命題は、直観主義のそれをも満たすのである。

5.5 古典主義と直観主義の対立の些事化

最後に、排中律と、証明可能性を超えた真理概念とを巡る古典主義と直観主義の対立に対して、有限主義がどのような態度をとるのかを確認しておこう。

PRA においては直観主義も排中律を認め、それを巡る古典論理と直観主義論理の対立が

解消されていることは先に見た。このことは、有限主義が、非有界量子子を除いた **PRA** を作ることで、直観主義論理においても排中律が成り立つような領域を算術に確保しようとしたとも表現できる。そうすることで、有限主義はまた、その領域内に、算術（ならびにそれに還元可能な全数学）の範囲を限ろうとしているとも見なせる。つまり有限主義は、排中律の普遍性を確保するために、それが普遍的に成り立つ領域への戦略的撤退を行っているのである。排中律を巡る古典論理と直観主義論理の対立の解消は、このような戦略の結果なのである。他方、このような算術ならびに数学の領域限定を行わなかった他の構成主義は、その代償として、排中律の普遍性を放棄せざるを得ないのである。

また、古典主義意味論をとろうと直観主義意味論をとろうと、**PRA** における排中律の使用は許されるということは、有限主義の立場から算術の体系を構築する際には、「証明可能性を超えた真理概念」を巡る論点が、賛否いずれをとるにしても実質的な違いを最早もたらさないことを意味する。端的に言って、両意味論の対立は、有限主義をとる限り実質的な意味を失うのである。言い換えると、有限主義は「証明可能性を超えた真理を認めるかどうか」という問いに対して、イエスともノーとも答えない。代わりにそれは、その問いそれ自身をトリヴィアルなものと化すのである。

6 有限主義の位置付け

6.1 有限主義はどのような意味で構成主義か

以上いくつかの項目に分けて有限主義の哲学的立場を見てきたが、本節ではそれらを総合して、冒頭に掲げておいた一群の問題に答えておこう。

まずスコーレムの有限主義は、どのような意味で構成主義的であると言えるのか。有限主義は、数学の対象が存在するようになることと、それが構成されることを同じ事柄であるとしていた。また対象の構成の完遂によって、我々は最高度の明晰性と確実性を数学的命題に対して与えることができる。すると数学の対象の存在と、それについての明晰で確実な知識獲得は、時間的・論理的に同時であることになる。これらの存在論的・認識論的主張において、有限主義は先に確認しておいた構成主義の一般的な特徴を明確に共有する。この意味で有限主義は、まごうかたなく構成主義の一員である。

6.2 有限主義と直観主義の異同

一方、有限主義は他の構成主義、なかんずく直観主義と比べても独自の点をいくつか持つ。「具体例の提示を伴った定義・数値計算による検証を伴った証明」という「構成」概念もその一つである。ここで述べられている具体例提示や数値計算による検証は、直観主義

においては保証されていない。このことは、直観主義がこのような構成概念を受け入れていないことを示す。

具体例の提示までを含んだ構成概念を備えることで、有限主義は、存在論・認識論・意味論といった側面において、具体例に対して一種の優先権を与えることになる。存在するのは一義的には具体例たる個々の自然数であり、最高度に明晰で確実な知識は具体例を与えることでしか得られず、また命題の真偽は具体例に即して決まり、具体例を持たない命題はそもそも有意味とは見なされないのである。一方、直観主義など他の構成主義は、具体例に対してこれらの意味での優先権は与えない。有限主義は、直観主義と異なった独自の算術体系を持ち、その算術体系が古典論理と直観主義論理との間で論理的中立性を保ち、排中律の普遍妥当性を承認するといった数々の独自性を持つ。これらの独自性は全て、元を質せば、他の構成主義とは異なり、有限主義のみが具体例に優先権を与える点に由来するのである。

次に有限主義による、カントールの超越数の存在証明に対する批判を考えてみよう。まず、独自の「構成」概念を持つ有限主義も、直観主義など他の構成主義と同様に、超越数の具体例・一般例を与えないカントールの証明が「構成」を欠いている点を指弾するであろう。またカントールの証明において実無限が指定されていることも、他の構成主義同様、有限主義にとっても受け入れがたい。しかし排中律に対する有限主義の批判は、直観主義のそれとは、微妙だが重要なズレを見せる。先に見たように、直観主義にとっては、排中律を「弱い反例」に適用したことが、カントールの証明の問題点であった。このことはカントールによる排中律の定式化自体は不問に付されていることを意味する。一方、有限主義にとって問題なのは、カントールの排中律の選言項の一つ、即ち「全ての実数は自然数と一対一対応する」という命題が、実数全体という無限領域に対する非有界量子化を不可避免的に含むことである。この点でカントールの排中律は、有限主義の枠内で定式化できない、否、してはいけない命題なのである。他方有限主義から言えば、そもそも排中律には「弱い反例」などは存在しない。有限主義者にとって、カントールの非は、排中律を使っ
てはならないケースに用いたことではなく、それを不当な仕方で定式化した点にあるのである。

6.3 有限主義はどの点で「有限的」か

スコーレム自身は、定義の手続きの有限性を確保した点において、自らの立場をクロネッカーの有限主義を継承するものとしていた。しかし直観主義を含め様々な構成主義が並存している現在、定義の有限性は必ずしも有限主義の専売特許ではない。有限主義の有限

主義たる所以は、むしろ、数学の命題に具体例を与え、その命題の証明を具体例に即した数値計算によって検証する操作の有限性の保証にあると言えた。まさにこの点で、有限主義は「有限的」なのである。

しかしこのような意味での有限性の保証は、別の側面でクロネッカーの立場への親近性を示す。個々の自然数のみに一義的な存在を認めるというスコレーム存在論の含意を先に指摘したが、これは「整数は神が造った、その他全ては人工物である」というクロネッカーの有名な言葉を我々に思い起こさせるのである。⁽⁴⁸⁾

6.4 排中律を認める構成主義

上で確認したように、有限主義は構成主義の一員である。しかし排中律の是非という構成主義と古典主義の有名な対立軸に関して、有限主義は、その普遍妥当性を認めるという一見古典主義的な立場をとる。しかし、このいわば見かけ上の「ねじれ」現象は、我々にとってもはや不審なことではない。有限主義は、直観主義も排中律を認めざるをえないような領域へ、算術、ひいては全数学を還元するという戦略的な撤退を行っていたのである。この領域において排中律を認めるからといって、直観主義から見て、有限主義が古典数学の陣営に属するとは言えないのである。

6.5 対立軸の多様性

このように排中律を巡る論点一つをとっても、構成主義は様々な立場に分かれるが、この多様性は、構成主義と古典主義の対立軸の多様さをも浮き彫りにする。最後にこのことを見定めておこう。

有限主義から見れば、排中律が古典主義と構成主義の争点となるのは、非有界量子子を数学に導入した結果に他ならない。有限主義（正確に言えばその構成概念）を前提する限り、古典主義と構成主義の対立点は、むしろ非有界量子子の採用の是非にある。そして有限主義的「構成」概念に照らせば、直観主義は、構成主義というよりは、古典主義の側に属することになるのである。

一方、「構成」概念に具体例の提示までは含めない直観主義にとって、古典主義と構成主義の対立は異なった様相を呈する。直観主義にとって重要な論点は、排中律や証明可能性を超えた真理概念の是非であった。それに比べると、非有界量子子の導入の可否は、直観主義にとってはトリヴィアルな論点に過ぎない。それはあたかも、直観主義的な対立軸が、有限主義にとってトリヴィアルな問題に過ぎなかったのと同様である。ただ上で見たように、直観主義から見て、有限主義が古典主義の側に含まれるというわけではない。結局、

有限主義からすれば直観主義は古典的であるが、その逆は言えないのである。この非対称性と、有限主義の有意味性の基準を満たした文は、直観主義のそれをも満たすが、その逆は成り立たなかったことを考え合わせると、有限主義は直観主義に比べより厳格な構成主義であることが分かる。

7 結論

以上、原始帰納算術として具体化されたスコーレムの有限主義の哲学的含意と、数学の哲学上の位置を見てきた。それは、あえて一言で言えば、具体例を重視する構成主義であり、そのような立場として、直観主義に対しても独自の位置を占めるのである。しかし本論が光を当てたのは、この立場の限られた側面に過ぎない。スコーレムの有限主義と、他の哲学者・数学者の数学観—例えばカントや『論考』におけるヴィットゲンシュタインのそれ—との比較など、興味深い論点は尽きない。⁽⁴⁹⁾ またスコーレム数学論のもう一つの顔、即ち集合論的相対主義の検討も今後の課題として残されている。スコーレムの哲学は、今ようやくその異貌を現し始めたばかりなのである。

了

註

(1) Cf. Wang, 1996, p. 119.

(2) ある論者は、スコーレムのほとんどの業績がノルウェーの雑誌に発表され、国外の研究者の目に触れる機会が少なかったことを、その一因として挙げている。Cf. Fenstad, 1996, p.101.

(3) Wang, 1996, pp.120, 124.

(4) スコーレムの集合論的相対主義とは、「集合論の全ての公理的体系は、整合的である限り、可算無限個の互いに同型的でないモデルを持つ」というレーベンハイム＝スコーレムの定理の含意を受け、「集合論を一階述語論理を用いて一意的に公理化することは不可能であり、どれが最善の公理化であるかは一義的には決まらない」とする立場である。Cf. Skolem, 1941, reprinted in his 1970, p.480, and Jervell, 1996, p.115.

(5) 論理学史の観点からスコーレムを扱った著作として、その後 Brady (2000) が出版された。だが、同書におけるスコーレムに関する記述(pp.197-205)は専らレーベンハイム＝スコーレムの定理についてのものであり、原始帰納関数や、ましてや有限主義の哲学的含意に関する議論はなされていない。

(6) リューヴィルの定理とは「 n 次の方程式の実数解は、有理数によって位数 n までは近似可能だが、

$n+1$ 以上の位数からは近似できない」というもの。またリューヴィル数 ξ とは、 $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} a^{-b_n}$ となる

実数である。ここで a は $a > 1$ である自然数の定数、 b_n は $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \infty$ となる自然数の単調増加列である。

(7) リューヴィルの証明法については、Kac and Ulam, 1992, pp.9-10, 一松・竹之内編, 1991, pp.262, 266 に現代的表記による詳しい説明が与えられている。

(8) カントールの対角線論法については、内井, 1988, pp.20-21 を参照されたい。

(9) Cf. Bridges and Richman, p.1.

(10) Cf. Rogers, 2000, pp.2-3.

(11) 例えば、構成主義の一種である直観主義の立場を採るブラウワーは、直観主義者にとって 0 と 1 の間の実数とは「小数点以下の位数を与える基本列を構成する、有限個の操作からなる規則を意味する」

(Brouwer, 1913, reprinted in Jacquette, 2002, p.273)と述べている。つまり彼は、0 と 1 の間の無限小数としての実数を、無限回の適用によって、それを極限值とする基本列（コーシー列）を生み出していく有限回の操作規則と同一視するのである。

(12) Cf. Troelstra and van Dalen, 1988. Bridges and Richman, 1987.

(13) この他にも、フランス経験主義者（半直観主義者 semi-intuitionists）に数えられるポアンカレ・ボレル・ルベーグらが、構成主義の先駆者として言及される。またスコーレムの有限主義より厳しい、超有限主義 (ultra-finitism) という立場も唱えられている。さらには 1920 年代のヒルベルトも、メタ数学において有限主義を採用した。しかし彼は、先に言及したように対象数学においては古典主義者である。Cf. Troelstra and van Dalen, 1988.

(14) Cf. Dummett, 2000, chap.7.1.

(15) *B-H-K* とは、それぞれブラウワー・ハイティング・コルモゴロフの頭文字を表わすが、論理に二義的な役割しか与えなかったブラウワー自身は、積極的に直観主義論理、従ってまたその意味論を構築することはしなかった。実際に *B-H-K* 解釈を打ち出したのはハイティングとコルモゴロフである。

(16) むしろ、これらのことは不可能である。というのも直観主義論理では、 $\neg\neg(A \vee \neg A)$ が証明可能だからである。もちろん二重否定の消去が妥当な推論ではない直観主義論理では、ここから排中律は帰結しない。

(17) 『プリンキピア・マティマティカ』の用語で言えば「いつも(always)」「ときどき(sometimes)」という操作子に相当。

(18) Cf. Skolem, 1919.

(19) PRA についての 1923 年の論文も、実際に執筆されたのは 1919 年である。Cf. Skolem, 1923, p.332.

(20) この書き換え規則を厳密に定式化したのはゲーデルである。Cf. Gödel, 1931.

(21) この点で、スコーレムは、「自然数」についての我々の直観的な理解は公理化によっては十分に汲み尽くされないとして、ヒルベルトによる算術の公理化に反対したポアンカレの立場に立っていると評される。Cf. Jervell, 1996, p.114.

(22) Skolem, 1923, p.305.

(23) Curry, 1941, Goodstein, 1957, chap. V.

(24) スコーレムが導入した関数や述語の帰納性の明確な定義は、後にゲーデル(Gödel, 1931)によって与えられた。さらにその後、クリーネ(Kleene, 1936)によって、より広い（一般）帰納性概念が導入された。チャーチがアルゴリズムによる計算可能性と同一視することを提案したのは、この一般帰納性であった。それに伴い、スコーレム・ゲーデル的な、より狭い意味での帰納性は原始帰納性(primitive recursiveness)と呼ばれるようになった。ちなみに先に紹介したマルコフ派の構成主義的帰納数学は、この広い意味での帰納性を基礎概念の一つとして用いている。

(25) Skolem, 1923, pp.316-317.

(26) Skolem, 1923, pp.306-307. ただし本論では、シュレーダーの論理代数記号を用いたスコーレムのオリジナルな定式化を、現代的表記に改めている。

(27) Rogers, 2000, p.6.

(28) Goodstein, 1964, p.viii.

(29) Skolem, 1923, p.333.

(30) Skolem, 1923, p.320.

(31) Skolem, 1923, p.329.

(32) Machover, 1996, p.8.

(33) Kleene, 1952, p.191.

(34) Kleene, 1952, p.192. ちなみに、最小数原理の直観主義版とは、

$\vdash \neg\neg[\exists xAx \rightarrow \exists y[Ay \wedge \forall z(z < y \rightarrow \neg Az)]]$ }。なお、この論理式の左端から二重否定を除いた同原理の古典主義的版は、直観主義ではなりたない。ちなみに後者は、直観主義的論理の枠内で、排中律を含意することになる。Cf. Troelstra and van Dalen, 1988, p.129.

(35) Skolem, 1923, p.327.

(36) Heijenoort, 1967, p.302.

(37) Skolem, 1923, p.332.

(38) Gödel, 1931. 原始帰納算術は、この論文における定義 1 から 45 において与えられている。

- (39) 不完全性定理の形式化された原始帰納算術における定式化は、ヒルベルトとベルナイスによって与えられた。Cf. Hilbert and Bernays, 1934, pp.307-346.
- (40) Jervell, 1996, p.114.
- (41) Cf. Heijenoort, 1967, p.303.
- (42) 例としては Troelstra and van Dalen, 1988, pp.120-126.
- (43) Troelstra and van Dalen, 1988, p.125.
- (44) Skolem, 1950, reprinted in his 1970, p.527.
- (45) Wang, 1996, p.129.
- (46) このテーゼをダメットの「意味＝証明可能性」テーゼのように、自然言語の意味論にまで拡張できるかどうか、はさしあたっては不明である。しかし、少なくともスコレムは、自然言語の意味論と算術の意味論とを区別しており、前者で成り立つことが、そのまま後者で成り立つとは限らないと考えていた。Cf. Skolem, 1923, p.304.
- (47) 実際、スコレムは PRA を構築する際、随所で排中律を用いている。
- (48) これをクロネッカーは 1886 年の講義で述べたとされている。Cf. Detlefsen, 1996, p.657.
- (49) スコレムの有限主義とヴィットゲンシュタインの『論考』における数学観の類似性は、羽地亮氏の指摘によって気づかされた。感謝したい。

参考文献

- Brady, G., *From Peirce to Skolem: A Neglected Chapter in the History of Logic*, 2000.
- Brouwer, L., Intuitionism and Formalism 1913, reprinted in Jacquette, D., ed., *Philosophy of Mathematics: An Anthology*, 2002, pp.269-276.
- Bridges, D., and Richman, F., *Varieties of Constructive Mathematics*, 1987.
- Curry, H., 'A Formalization of Recursive Arithmetic', *American Journal of Mathematics*, vol. 63, pp.263-282, 1941.
- Detlefsen, M., 'Constructivism' in Grattan-Guinness, I., ed., *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, vol.1, 1994, pp.656-664.
- Dummett, M., *Elements of Intuitionism*, 2nd ed., 2000.
- Gödel, K., 'On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems I', 1931, reprinted in Heijenoort, 1967, pp.596-616.
- Goodstein, R., *Recursive Number Theory*, 1957.
- Heijenoort, J., ed., *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic*, 1967.
- Hilbert, D., and Bernays, P., *Grundlagen der Mathematik*, 1934.
- 一松信・竹之内脩編 『新数学事典』改訂増補版 1991.
- Jervell, H., 'Thoralf Skolem Pioneer of Computational Logic', *Nordic Journal of Philosophical Logic*, vol. 1, No. 2, pp.107-117, 1996.
- Kac, M. and Ulam, S., *Mathematics and Logic*, 1992, originally published in 1968.
- Kleene, S. 'General Recursive Functions of Natural Numbers', 1936, reprinted in Davis, M., ed. *The Undecidable*, 1965, pp.237-253.
- *Introduction to Metamathematics*, 1952.
- Machover, M., *Set Theory, Logic, and their Limitations*, 1996.
- Rogers, H., *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, 2000, originally published in 1967.
- Skolem, T., Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalküls und über Produktions- und Summationsproblem, welche gewisse Klassen von Aussagen betreffen, 1919, reprinted in Skolem 1970, pp.67-102.
- The Foundations of Elementary Arithmetic Established by Means of the Recursive Mode of Thought, without the Use of Apparent Variables Ranging over Infinite Domains, 1923, reprinted in Heijenoort, 1967, pp. 302-333.
- Sur la Portée du Théorème de Löwenheim-Skolem, 1941, reprinted in Skolem 1970, pp.455-482.
- Some Remarks on the Foundation of Set Theory, 1950, reprinted in Skolem 1970, pp.519-528.
- *Selected Works in Logic*, edited by Fenstad, J., 1970.
- Troelstra, A. and van Dalen, D., *Constructivism in Mathematics: an Introduction*, 1988.
- 内井惣七 「論理、数学、言語」, 内井・小林編『科学と哲学』1988 所収.
- Wang, H., 'Skolem and Gödel', *Nordic Journal of Philosophical Logic*, vol. 1, No. 2, pp.119-132, 1996.

〔京都大学助教授〕