

Calabi 予想の解決 (S. T. Yau) とその応用

版大 教養部 満洲 俊樹

最近、S. T. Yau [3] によって Calabi 予想が解かれたが、その骨子になっているのは T. Aubin の労作 [1] である。ある意味で、Yau は Aubin の仕事を簡易化し、正しく理解することによって Calabi 予想の解決にこぎつけたと言える。それ故我々は Yau による簡易化された Aubin の仕事を通して、Calabi 予想解決の軌跡を追ってみようと思う。ここでは特に色々ある Calabi 予想の中で次の予想に焦点をあててみる。

予想: M を compact complex manifold で $C_1(M) < 0$ とする。このとき M 上に Einstein Kähler metric が unique (up to constant multiple) に存在する。

但し、ここで $C_1(M) < 0$ とは $C_1(M)$ の Dolbeault cohomology class が $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum_{\alpha, \beta} (-g_{\alpha\bar{\beta}}) dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$ ($(g_{\alpha\bar{\beta}})$ は positive definite Hermitian

matrix) の形に represent されるということを意味している。
さて、この予想は次のことを示すのに reduce される。

Reduction: $\lambda \in \mathbb{R}$ を正の定数とする。Compact complex manifold M 上に Kähler metric $\{g_{\alpha\bar{\beta}}\}$ と C^∞ real valued function $f \in C^\infty(M)$ が与えられているとする。このとき方程式

$$(1) \quad \det\left(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}\right) \cdot \det(g_{\alpha\bar{\beta}})^{-1} = \exp(\lambda \varphi + f)$$

が " $(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta})$ is positive definite everywhere on M " を満たすような unique solution $\varphi \in C^\infty(M)$ をもつ。(但しここで $C^\infty(M)$ とは M 上の C^∞ real valued function 全体のことを表すこととする。)

まず、如何にしてこの(1)の方程式がとければ上の予想が導き出されるか、それをここに述べよう。そこで、 M 上の予想に於ける M とする。このとき上でも述べたように、 $C_1(M)$ の代表元は $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum_{\alpha, \beta} (-g_{\alpha\bar{\beta}}) dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$ の形のものかとれるが、一方、 M の上で Kähler metric $\{g_{\alpha\bar{\beta}}\}$ を考えていくと Ricci form $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}(-\log \det(g_{\alpha\bar{\beta}}))$ も $C_1(M)$ を represent している。
i.e., $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum_{\alpha, \beta} (-g_{\alpha\bar{\beta}}) dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta \sim_{\text{cohomologous}} \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}(-\log \det(g_{\alpha\bar{\beta}}))$.
 $\therefore \exists f \in C^\infty(M)$ s.t. $\partial\bar{\partial}(\log \det(g_{\alpha\bar{\beta}})) + \partial\bar{\partial}f = \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$.

こうして定められた $\{g_{\alpha\bar{\beta}}\}$, f , そして $\lambda=1$ に対して上の方程式(1)を解く。そして $(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta})$ が positive definite になるような unique solution $\varphi \in C^\infty(M)$ を考える。このとき

$$\begin{aligned} \log \det(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}) - \log \det(g_{\alpha\bar{\beta}}) &= \varphi + f \\ \therefore \partial\bar{\partial}(\log \det(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta})) &= \partial\bar{\partial}(\log \det(g_{\alpha\bar{\beta}})) + \partial\bar{\partial}f + \partial\bar{\partial}\varphi \\ &= \sum_{\alpha, \beta} (g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}) dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta \end{aligned}$$

即ち、これは M の上の Kähler metric $\{g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}\}$ が Einstein Kähler metric であることを示している。故に M の上に Einstein Kähler metric が存在するか、その一意性 (up to constant multiple) も (1) の方程式における $(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta})$ が positive definite になるような solution φ の uniqueness から困難なく導き出せる。

そこで問題の焦点は上の(1)の方程式を解くことについてであるが、(1)の方程式で $\lambda=0$ のときの solution をみつけることが “良く知られた Calabi 予想” を解くことと同値である。しかし、それは $\lambda>0$ のときに(1)を解くよりもはるかに難しい。(S.T. Yau の 仕事は $\lambda=0$ のときも含めて(1)の方程式を解いたことである。)しかし、 $\lambda>0$ のときを扱うことによって、実際 $\lambda=0$ のときにはどうやればよいかは、かなりはっきりした image ができると思われるので、ここでは $\lambda>0$ のときだけを述べておく。(更に $\lambda<0$ の場合、方程

式(1)が解ける事はかなり疑わしい。

(1)の C^2 -solution の uniqueness: $\varphi, \psi \in C^2(M)$ を (1) の方程式の解で、しかも $(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta})$, $(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta})$ がともに positive definite everywhere on M となつてゐたとする。Then

$$\det(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}) \cdot \det(g_{\alpha\bar{\beta}})^{-1} = \exp(\lambda \varphi + f)$$

$$\det(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}) \cdot \det(g_{\alpha\bar{\beta}})^{-1} = \exp(\lambda \psi + f)$$

$$\therefore \frac{\det(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta})}{\det(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta})} = \exp\{\lambda(\varphi - \psi)\}.$$

今 $\varphi - \psi$ が点 $p_0 \in M$ で maximum をとつたとすると $(\frac{\partial^2(\varphi - \psi)}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta})$ は positive semi-definite matrix になるから

$$1 \geq \text{上式左辺} = \text{上式右辺} = \exp \lambda(\varphi(p_0) - \psi(p_0))$$

こゝで $\lambda > 0$ の条件がきいてきて、 $0 \geq \varphi(p_0) - \psi(p_0)$.

よつて $\varphi \geq \psi$ everywhere on M .

今とまゝ、全く同じ議論をくり返して、 $\psi \geq \varphi$ everywhere on M .

結局 $\varphi = \psi$ everywhere on M を得る。

(1)の C^∞ -solution の existence:

Step 1: $0 < \alpha < 1$ なる定数 α (例えば $\alpha = \frac{1}{2}$ とせよ) を α と定める。また、 M を open set $U_\lambda; \lambda \in \Lambda$ で覆う。但し、

U_λ は $U_\lambda = \{(z_1^\alpha, z_2^\alpha, \dots, z_m^\alpha) \in \mathbb{C}^m; |z_i^\alpha| < 1, i=1, 2, \dots, m\}$ とい

う形に書け、しかも local coordinate system $(z_1^{(\lambda)}, \dots, z_m^{(\lambda)})$ は U_λ の M に於ける closure をちょっとこえた外の方でも定義されているとする。このとき任意の整数で $k \geq 0$ なるものに対して次のような 2 つの norm を定義する。即ち $g \in C^k(M)$ に対して

$$\|g\|_k \stackrel{\text{defn}}{=} \max_{\lambda \in \Lambda} \max_{p \in U_\lambda} \max_{\substack{I=(i_1, \dots, i_m, i'_1, \dots, i'_m) \text{ is such} \\ \text{that } |I| (= i_1 + \dots + i_m + i'_1 + \dots + i'_m) \leq k}} \left\{ \frac{\partial^{|I|} g(p)}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2} \dots \partial z_m^{i_m} \partial \bar{z}_1^{i'_1} \dots \partial \bar{z}_m^{i'_m}} \right\}$$

$$\|g\|_{k, \alpha} \stackrel{\text{defn}}{=} \max \left(\|g\|_k, \max_{\lambda \in \Lambda} \max_{\substack{p, p' \in U_\lambda \\ I=(i_1, \dots, i_m) \text{ with } |I|=k}} \left\{ \# \right\} \right)$$

$$\text{但し、} \# = \left(\frac{\partial^{|I|} f}{\partial z_1^{i_1} \dots \partial z_m^{i_m}}(p) - \frac{\partial^{|I|} f}{\partial z_1^{i_1} \dots \partial z_m^{i_m}}(p') \right) / |p - p'|^\alpha$$

ここで $p = (p_1, \dots, p_m)$, $p' = (p'_1, \dots, p'_m) \in U_\lambda$ に対して

$$|p - p'| = \sqrt{\sum_{j=1}^m |p_j - p'_j|^2} \quad \text{とおいた。}$$

さて、 $C^{k, \alpha}(M) = \{ g \in C^k(M) ; \|g\|_{k, \alpha} < +\infty \}$ とおくと、この $C^{k, \alpha}(M)$ が Banach space になることは見やすい。

こうして notation を fix したところで次のことを考える。即ち、 $k \geq 2$ なる任意の整数 k に対し、方程式 (1) の $C^{k, \alpha}$ -solution $\varphi_{(k)}$ (もちろん $(g_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 \varphi_{(k)}}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta})$ が positive definite な matrix になるような) が存在したと仮定すれば、それらはすべて等しい M 上の関数を定めているであろうか？ 答は Yes である。これはすぐ上で証明した (1) の C^2 -solution の一意性から即座に従う。

よって $\varphi_{(2)} = \varphi_{(3)} = \varphi_{(4)} = \dots$. 即ち $\varphi_{(2)}$ がはじめから方程式 (1) の C^∞ -solution であることを示している。だから (1) の C^∞ -solution の存在をいうには (1) の $C^{k,\alpha}$ -solution の存在を各 $k = 2, 3, 4, \dots$ に対して示すことに帰着される。

Step 2: (A priori estimate)

(1) の方程式をみたす $\varphi \in C^{k,\alpha}(M)$ (もちろん $(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta})$ が positive definite on M となるような) ($k \geq 4$) とする。このときこの φ は自動的に $\exists B = B(\text{---}, \|f\|_{k+4}) \in \mathbb{R}$ (即ち φ に depend せず、 M や M の上の Kähler metric $\{g_{\alpha\bar{\beta}}\}$ や $f \in C^\infty(M)$ の C^{k+4} -norm $\|f\|_{k+4}$ だけに depend する定数 $B \in \mathbb{R}_+$) が存在して $\|\varphi\|_{k,\alpha} \leq B$ と上からおさえられることをいうのがこの step の目的であるが、これが最も困難な部分である。詳しくは Yau の論文を見ればよい (cf. [3])。その mood だけがわかるように $\|\varphi\|_0$ を estimate してみよう。(その評価を $\|\varphi\|_{k,\alpha}$ にまであげていくのに Schauder estimate, interior Schauder estimate などを使う)。 $\|\varphi\|_0 = \max_{p \in M} |\varphi(p)|$ に注意する。例えば $\varphi(p_0) = \varphi_{\max}$ (resp. $\varphi_{\min}$) とすると $(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta})(p_0)$ は negative ^{semi} definite (resp. positive semi-definite) だから、

$$1 \geq \det(g_{\alpha\bar{\beta}}(p_0) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}(p_0)) \cdot \det(g_{\alpha\bar{\beta}}(p_0))^{-1} = \exp(\lambda \varphi(p_0) + f(p_0))$$
 (resp. $1 \leq \det(\dots) \cdot \det(\dots)^{-1} = \exp(\lambda \varphi(p_0) + f(p_0))$)

$\therefore \lambda \varphi(p_0) + f(p_0) \leq 0 \quad \therefore \varphi_{\max} = \varphi(p_0) \leq \frac{|f|_{\max}}{\lambda}$
 (resp. $\lambda \varphi(p_0) + f(p_0) \geq 0 \quad \therefore \varphi_{\min} = \varphi(p_0) \geq -\frac{|f|_{\max}}{\lambda}$)
 故に φ は上から (resp. 下から) おさえられる。(実際、我々は $\|\varphi\|_0 \leq \frac{|f|_{\max}}{\lambda} (= \frac{\|f\|_0}{\lambda})$ を示したわけである。)

Step 2: さていよいよ方程式 (1) の $C^{k,\alpha}$ -solution が存在することを continuity method を使うことによって示そう。そこで次のよう φ continuous map を定義する。

$$\begin{aligned}
 G : C^{k,\alpha}(M) &\rightarrow C^{k-2,\alpha}(M) \\
 \varphi &\longmapsto G(\varphi) = \det(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}) \cdot (\det g_{\alpha\bar{\beta}})^{-1} \cdot \exp(-\lambda \varphi)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma : I = [0, 1] &\rightarrow C^{k-2,\alpha}(M) \\
 t &\longmapsto \gamma(t) = \exp(t f)
 \end{aligned}$$

$$\text{また } \textcircled{H} = \left\{ \varphi \in C^{k,\alpha}(M); \left(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right) \text{ is positive definite everywhere on } M \right\}$$

とおくと、もちろん $\textcircled{H}$ は $C^{k,\alpha}(M)$ の open subset である。今

$$\begin{aligned}
 T = \left\{ t \in [0, 1]; \det \left(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right) \cdot (\det g_{\alpha\bar{\beta}})^{-1} = \exp(\lambda \varphi + t f) \right. \\
 \left. \text{has a solution in } \textcircled{H} \right\}
 \end{aligned}$$

とおくと、方程式 (1) が $C^{k,\alpha}$ -solution をもつということを示すには $T \ni 1$ を示せばよい。これを次のようにして示す。

① まず $T \ni 0$ に気をつける。(⊖) $t=0$ のときは方程式は $\det \left(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right) \cdot (\det g_{\alpha\bar{\beta}})^{-1} = \exp(\lambda \varphi)$ となり $\varphi=0$ の解である。

⑧ 次に T が $[0, 1]$ の open subset であることを示す。そのために inverse function theorem を使う。そこで任意の $\varphi_0 \in \mathcal{H}$ を fix し、 $G(\varphi_0 + \varepsilon\psi)$ を ε に関して Taylor 展開すると、

$$\begin{aligned} G(\varphi_0 + \varepsilon\psi) &= \det\left(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2(\varphi_0 + \varepsilon\psi)}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}\right) \cdot \det(g_{\alpha\bar{\beta}})^{-1} \cdot \exp(-\lambda(\varphi_0 + \varepsilon\psi)) \\ &= G(\varphi_0) + \varepsilon \det\left(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}\right) \cdot \det(g_{\alpha\bar{\beta}})^{-1} \cdot \exp(-\lambda\varphi_0) \cdot (\Delta_{\varphi_0} \psi - \lambda\psi) \\ &\quad + \varepsilon^2(\dots) + \dots \end{aligned}$$

但し、 $\Delta_{\varphi_0} = \sum_{\alpha, \beta} \tilde{g}^{\alpha\bar{\beta}} \frac{\partial^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}$; $(\tilde{g}^{\alpha\bar{\beta}})_{\alpha, \beta} = (g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta})$ の inverse matrix. よって mapping $G: C^{k, \alpha}(M) \rightarrow C^{k-2, \alpha}(M)$ の φ_0 における differential G_* は次のように書ける。

$$\begin{aligned} G_*: C^{k, \alpha}(M) &\rightarrow C^{k-2, \alpha}(M) \\ \psi &\longmapsto \det\left(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}\right) \cdot \det(g_{\alpha\bar{\beta}})^{-1} \cdot \exp(-\lambda\varphi_0) \cdot (\Delta_{\varphi_0} \psi - \lambda\psi) \end{aligned}$$

ここで $\lambda > 0$ がきいてきて、 Δ_{φ_0} has only non-positive eigen values に注意すると G_* は one-to-one onto 即ち linear homeomorphism となっている。 $\varphi_0 \in \mathcal{H}$ は任意なので inverse mapping theorem により、 $G|_{\mathcal{H}}$ は open mapping. さて、

$$\begin{aligned} T &= \{t \in I = [0, 1]; G(\varphi) = \gamma(t) \text{ has a solution } \varphi \text{ in } \mathcal{H}\} \\ &= \{t \in I; \gamma(t) \in G(\mathcal{H})\} = \gamma^{-1}(G(\mathcal{H})) \\ &= \text{open subset in } [0, 1]. \end{aligned}$$

⑨ $T \ni 1$ を示すには、 $[0, 1]$ の connectedness により T : closed subset in $[0, 1]$ を示せばよい。そこで $t_n \in T$; $n=1, 2, 3, \dots$ であつ、 $t_n \rightarrow t \in [0, 1]$ (as $n \rightarrow \infty$) としたとき $t \in T$ を示せ

ばよい。 $t_n \in T$; $n=1, 2, \dots$ であるから $\exists \varphi_n \in \mathcal{H}$ s.t.

$$\det(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}) \cdot \det(g_{\alpha\bar{\beta}})^{-1} = \exp(\lambda \varphi_n + t_n f).$$

ここで $|t_n| \leq 1$ だから $\|t_n f\|_{k+4} \leq \|f\|_{k+4}$. よって Step 2

の A priori estimate により、どんな $n=1, 2, \dots$ に対しても

$$\|\varphi_n\|_{k,\alpha} \leq B(\text{---}, \|f\|_{k+4}).$$

よって各 coordinate chart U_λ の M での closure $\bar{U}_\lambda$ の上では、

φ_n の k 回偏微分は一様有界かつ、同等連続である。(ここで

Hölder continuity をつけた。) よって Ascoli-Arzelà の定理

によって一様収束する部分列が存在するが、その部分列を、

最初の $\{\varphi_n; n=1, 2, \dots\}$ (の k 回偏微分) と同一視しても一般

性を失わない。よって $\exists \varphi \in C^k(M)$ s.t. $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in $C^k(M)$.

今、 $p, p' \in U_\lambda$ に対し、 $\|\varphi_n\|_{k,\alpha} \leq B$, $n=1, 2, \dots$ であるから、

$$\left| \frac{\partial^{|I|} \varphi_n}{\partial z_1^{i_1} \dots \partial \bar{z}_m^{i_m}}(p) - \frac{\partial^{|I|} \varphi_n}{\partial z_1^{i_1} \dots \partial \bar{z}_m^{i_m}}(p') \right| \leq B \cdot |p - p'|^\alpha$$

(但し、 $|I| = i_1 + \dots + i_m = k$)

そこで $n \rightarrow \infty$ とすると、

$$\left| \frac{\partial^{|I|} \varphi}{\partial z_1^{i_1} \dots \partial \bar{z}_m^{i_m}}(p) - \frac{\partial^{|I|} \varphi}{\partial z_1^{i_1} \dots \partial \bar{z}_m^{i_m}}(p') \right| \leq B |p - p'|^\alpha.$$

これは $\|\varphi\|_{k,\alpha} \leq B (< +\infty)$ を示している。 $\therefore \varphi \in C^{k,\alpha}(M)$.

また $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in $C^k(M)$ だから (もちろん $k \geq 2$ のときを考え

て) $\det(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}) \cdot \det(g_{\alpha\bar{\beta}})^{-1} = \exp(\lambda \varphi_n + t_n f)$ で

$n \rightarrow \infty$ とし $\det(g_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}) \cdot \det(g_{\alpha\bar{\beta}})^{-1} = \exp(\lambda \varphi + t f)$ を得

る。しかも各 $\varphi_n \in \mathbb{H}$ であるから今得た等式も考えあわせると $\varphi \in \mathbb{H}$ がわかる。これはとうもなおさず $t \in T$ を示している。よって、 T は closed subset in $[0, 1]$ となっている。 Q.E.D.

以上で Reduction の解き方の outline を述べた。

そこで Calabi 予想の種々の応用を証明をして羅列してやる。(最も一般的な Calabi 予想の応用も含めて。)

(1) M を compact complex manifold of $\dim = 2$ で $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ と homeo だとする。このとき $M \simeq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ (biholomorphic)

(2) M を compact complex manifold of $\dim = n$ で $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ と homeo だとする。もし M が Kähler だとする。もし M が $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ と homeo なら M は $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ と biholomorphic.

(3) M を compact complex manifold of $\dim = n$ で $c_1(M) \leq 0$ or $c_1(M) = 0$ だとする。このとき次の不等式が成り立つ。

$$(-1)^{n-2} \cdot 2(n+1) c_2(M) c_1(M)^{n-2} [M] \geq (-1)^{n-2} n c_1(M)^n [M].$$

ここで等号成立は M の universal covering が open ball

$\{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 < 1\}$ となっている時 (もちろん holomorphic に cover される。)

$n=2$ のときは所謂 miyaoka の不等式である。

(4) M を compact complex manifold で $c_1(M) > 0$ とする。このとき M は simply connected である。

(13) M を compact Kähler manifold $c_1(M) = c_2(M) = 0$ とする。このとき M は complex torus T^n cover (unramified covering) される。

A priori estimate の詳しいことは Yau の原論文 [3]。

outline は Bourguignon [2] を見よ。引用は Bourguignon に詳しい。

Reference

- [1] T. Aubin --- Métriques riemanniennes et courbure,
J. Diff. Geom. 4 (1970), pp. 383-424.
- [2] J.P. Bourguignon --- Premières formes de Chern des
variétés Kähleriennes compactes,
Séminaire Bourbaki, November 1977.
- [3] S.T. Yau -- On the Ricci curvature of a compact
Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation I
Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978)
pp. 339-411