

## Silver Machine による Gap-1 Morass の構成

名古屋大学 古田泰之 (Yasuyuki Koda)

### 目 次

|                                         |    |
|-----------------------------------------|----|
| Introduction                            | 1  |
| I. Silver Machines                      |    |
| 1. Machines                             | 2  |
| 2. Pairing Machine                      | 9  |
| 3. $L[A]$ -Machine                      | 12 |
| II. $(\omega_1, 1)$ -Morass             |    |
| 1. Admissible Sets, $L_\xi[A]$ の性質      | 25 |
| 2. $(\omega_1, 1)$ -Morass の定義と、存在証明の準備 | 30 |
| 3. Morass の存在証明. 其一                     | 34 |
| 4. Morass の存在証明. 其二                     | 46 |
| 5. Morass の存在証明. 其三                     | 79 |

### Introduction

この論文では、Silver Machine( $L[A]$ -machine) を用いて、

$$V = L[A] \ \& \ A \subseteq \kappa \ \& \ \kappa \geq \omega_1 \ \& \ \kappa \text{ は regular} \Rightarrow (\kappa, 1)\text{-morass が存在する}$$

を証明する。実際には、簡単のために、 $\kappa = \omega_1$  のときのみを論じ (II. 定理 3.1)、一般の  $\kappa$  については、 $\kappa = \omega_1$  の場合と殆ど同じなので、この論文の最後 (II.5) で少々 の注意をするにとどめた。この結果自体は、既に  $L[A]$  の Fine Structure を用いて得られている ([3],[6] を参照)。また [6] によれば、1978 年までには既に、

$$V = L \ \& \ \kappa \geq \omega_1 \ \& \ \kappa \text{ は regular} \Rightarrow (\kappa, 1)\text{-morass が存在する}$$

も Silver machine を用いて証明されている (Silver and Richardson)。さて、この証明では、仮定が、 $V = L$  であるために、本来の  $L$ -machine を用いれば良いが、 $V = L[A]$  の場合には、 $L$ -machine では不十分であるので、これを改良した  $L[A]$ -machine を用いる。尚、 $L$ -machine については [7] を参照されたい。

この論文の構成は、大きく分けて、I と II の二つの部分から成っている。まず、I では、morass の存在証明に用いる Silver machine についての議論がなされる。1 と 2 は、ごく基本的なことであり、これらについては [7] を見られたい。3 で、 $L[A]$ -machine を定義し、その性質を調べる。

II は、 $(\omega_1, 1)$ -morass の存在証明にあてられている。1 では、証明に必要な事実を準備し、2 で  $(\omega_1, 1)$ -morass の定義をする。3 から 5 は全て存在証明である。3 で、morass のもとになる  $\overline{\text{mor}}$  を定義し、4 で、それ

が必要な性質をもつことを示す。最後に5で、 $\overline{\mathfrak{M}}$ から  $(\omega_1, 1)$ -morass  $\mathfrak{M}$  を構成し、それが  $(\omega_1, 1)$ -morass であることを証明する。そして、 $(\kappa, 1)$ -morass の存在証明についての注意を述べる。

用いる記号は全て通常の集合論の記号であるが、関数  $\sigma$  に対して

$$\{\sigma(x) | x \in X\}$$

を表すときに  $\sigma[X]$  と  $\sigma''X$  の二種類の記号を用いた。特に使い分ける必要は無いのだが、 $\sigma[X]$  は、主に  $\sigma[p]$  の形で用いてある。また、 $\omega_1, \omega_2$  は、それぞれ、1 番目 2 番目の uncountable cardinal である。

## I. Silver Machines

### 1. Machines

まず algebra を定義する。空でない class  $A$  に対し、 $A^{<\omega}$  は、 $A$  の元の有限列の全体を表すものとする。そして structure  $\mathcal{A} = (A, F_i)_{i \in I}$  が algebra であるということを、各  $F_i$  が  $A^{<\omega}$  から  $A$  への partial function であることと定める。各  $F_i$  を  $\mathcal{A}$  の関数と呼ぶことにする。

今、 $\mathcal{A} = (A, F_i)_{i \in I}, \mathcal{B} = (B, G_i)_{i \in I}$  が algebra であるとする。ただし、index set  $I$  は共通であることに注意する。 $\pi : A \rightarrow B$  が  $\mathcal{A}$  から  $\mathcal{B}$  への monomorphism であるとは、 $\pi$  が 1 対 1 で、さらに、すべての  $i \in I$  と  $u \in A^{<\omega}$  に対して

$$\pi(F_i(u)) \simeq G_i(\pi(u))$$

が成り立つことである。このとき

$$\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \quad \text{mono}$$

と書くことにする。ここで、 $\pi(u)$  は、 $u = \langle u_0, \dots, u_{n-1} \rangle$  のとき

$$\pi = \langle \pi(u_0), \dots, \pi(u_{n-1}) \rangle$$

であり、また  $\pi(F_i(u)) \simeq G_i(\pi(u))$  とは

$$[u \in \text{dom}(F_i) \leftrightarrow \pi(u) \in \text{dom}(G_i)] \ \& \ [u \in \text{dom}(F_i) \rightarrow \pi(F_i(u)) = G_i(\pi(u))]$$

のことである。尚、 $\text{dom}(F_i), \text{dom}(G_i)$  は  $F_i, G_i$  の定義域である。

$X \subseteq A$  が  $\mathcal{A}$  の subalgebra であるとは、各  $i \in I$  に対し

$$u \in X^{<\omega} \ \& \ u \in \text{dom}(F_i) \rightarrow F_i(u) \in X$$

となっていることと定める。また、任意に与えられた  $X \subseteq A$  に対し、 $\mathcal{A}(X)$  は、 $X$  で生成された  $\mathcal{A}$  の subalgebra を表すものとする。

Algebra については、次のことが容易にわかる。

1.1. 補題.  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  を algebra とする。  $\pi_0 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, \pi_1 : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  が共に monomorphism であれば、  $\pi_1 \circ \pi_0 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  mono である。

1.2. 補題.  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  を algebra とし、  $\pi_0 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, \pi_1 : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  が共に monomorphism であるとする。もし  $\text{range}(\pi_0) \subseteq \text{range}(\pi_1)$  であれば

$$\pi_1^{-1} \circ \pi_0 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \text{ mono}$$

である。

1.3. 補題.  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  が algebra であり、  $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  mono であるとする。このとき任意の  $X \subseteq \mathcal{A}$  に対し

$$\pi[\mathcal{A}(X)] = \mathcal{B}(\pi[X])$$

である。

証明.  $\mathcal{A} = (A, F_i)_{i \in I}$  としておく。  $\mathcal{A}(X)$  は次のようにして定めることができる: 集合列  $\langle X_n | n < \omega \rangle$  を、

$$\begin{aligned} X_0 &= X \\ X_{n+1} &= X_n \cup \bigcup_{i \in I} F_i[X_n^{<\omega}] \end{aligned}$$

とする。すると、

$$\mathcal{A}(X) = \bigcup_{n < \omega} X_n$$

である。  $\mathcal{B}(\pi[X])$  も同じように集合列  $\langle Y_n | n < \omega \rangle$  を作って定めることができる。すると、  $n < \omega$  についての帰納法で、

$$\pi[X_n] = Y_n$$

がいえるから、このことにより、

$$\pi[\mathcal{A}(X)] = \mathcal{B}(\pi[X])$$

となる。

1.4. 定義.

(1) Algebra  $\mathcal{A} = (A, F_i)_{i \in I}$  が machine であるとは

(a)  $A = On$  または  $A \in On - \{0\}$ . ここで  $On$  は順序数の全体である。

(b)  $I = \omega$ .  $\omega$  は自然数の全体である。

(c)  $F_0$  は、  $u \in A^{<\omega}$  に対し

$$F_0(u) = \begin{cases} 0, & \text{if } u = \langle \alpha, \beta \rangle \text{ \& } \alpha < \beta \\ \text{undefined,} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

と定められるものである。

(2)  $\mathcal{A} = (A, F_i)_{i \in \omega}$  を machine とし、 $\delta \in On$  とする。このとき、 $\mathcal{A}^\delta$  は algebra  $(\delta, F_i^\delta)_{i \in \omega}$  を表すものとする。ここで、 $F_i^\delta$  は  $\delta^{<\omega}$  から  $\delta$  への partial function であり、 $u \in \delta^{<\omega}$  に対し

$$F_i^\delta(u) = \begin{cases} F_i(u), & \text{if } u \in \text{dom}(F_i) \text{ \& } F_i(u) < \delta \\ \text{undefined}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

と定められるものである。これは  $\mathcal{A}$  の subalgebra ではないことに注意する。

(3)  $\mathcal{A}$  を machine とし、 $\bar{\delta}, \delta \in On$  とする。 $\pi : \bar{\delta} \rightarrow \delta$  が strong  $\mathcal{A}$ -map であるとは、

$$\pi : \mathcal{A}^{\bar{\delta}} \rightarrow \mathcal{A}^\delta \quad \text{mono}$$

であることである。

1.5. 補題.  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  が machine で  $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  mono であれば  $\pi$  は順序保存である。即ち、 $\alpha, \beta \in A$  に対して、 $\alpha < \beta \rightarrow \pi(\alpha) < \pi(\beta)$ 。

証明.  $\mathcal{A} = (A, F_i)_{i \in \omega}, \mathcal{B} = (B, G_i)_{i \in \omega}$  とする。 $F_0, G_0$  は共に定義 1.4. の (1) で定められるものである。 $\alpha, \beta \in A$  とし、 $\alpha < \beta$  とする。すると

$$F_0(\langle \alpha, \beta \rangle) = 0 \in A$$

であるから、 $\pi(F_0(\langle \alpha, \beta \rangle)) = \pi(0)$  であるが、 $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  mono だから

$$G_0(\langle \pi(\alpha), \pi(\beta) \rangle) = \pi(0).$$

よって  $G_0(\langle \pi(\alpha), \pi(\beta) \rangle)$  が定義されていることになるので、 $\pi(\alpha) < \pi(\beta)$  でなければならない。さらに  $\pi(0) = 0$  もわかる。

1.6. 補題.  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  を machine とし、 $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  mono とする。 $\delta$  を

$$\delta = \sup\{\pi(\alpha) + 1 \mid \alpha \in A\}$$

とすると、 $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}^\delta$  mono である。

証明.  $\mathcal{A} = (A, F_i)_{i \in \omega}, \mathcal{B} = (B, G_i)_{i \in \omega}$  とする。 $i \in \omega, u \in A^{<\omega}$  に対して

$$\pi(F_i(u)) \simeq G_i^\delta(\pi(u))$$

を示す。まず、 $u \in \text{dom}(F_i)$  とすると、 $\pi(u) \in \text{dom}(G_i)$  であり

$$G_i(\pi(u)) = \pi(F_i(u)) < \delta.$$

従って、 $\pi(u) \in \text{dom}(G_i^\delta)$ ,  $\pi(F_i(u)) = G_i^\delta(\pi(u))$  となる。

次に、 $\pi(u) \in \text{dom}(G_i^\delta)$  であれば、 $\pi(u) \in \text{dom}(G_i)$  であるから、 $u \in \text{dom}(F_i)$ 。これで、 $\pi : A \rightarrow B^\delta$  mono がわかる。

1.7. 補題.  $A, B$  を machine とし、 $\pi : A \rightarrow B$  mono とする。 $\alpha \in A$  に対し、

$$\pi \upharpoonright \alpha : A^\alpha \rightarrow B^{\pi(\alpha)} \text{ mono}$$

である。

証明. まず、補題 1.5. により、 $\pi$  が順序保存であることに注意する。

$u \in \alpha^{<\omega}$  とし、 $u \in \text{dom}(F_i^\alpha)$  とする。 $F_i^\alpha(u) = F_i(u)$  だから

$$\pi(F_i^\alpha(u)) = \pi(F_i(u)) = G_i(\pi(u)).$$

しかも、 $F_i^\alpha(u) < \alpha$  であるから、 $G_i(\pi(u)) < \pi(\alpha)$ 。故に

$$\pi(u) \in \text{dom}(G_i^{\pi(\alpha)}), \quad \pi(F_i^\alpha(u)) = G_i^{\pi(\alpha)}(\pi(u)).$$

次に、 $\pi(u) \in \text{dom}(G_i^{\pi(\alpha)})$  であれば、 $\pi(u) \in \text{dom}(G_i)$  だから、 $u \in \text{dom}(F_i)$ 。さて

$$\pi(F_i(u)) = G_i(\pi(u)) = G_i^{\pi(\alpha)}(\pi(u)) < \pi(\alpha)$$

である。このことにより、 $F_i(u) < \alpha$  となるから、 $u \in \text{dom}(F_i^\alpha)$ 。

これで

$$\pi \upharpoonright \alpha : A^\alpha \rightarrow B^{\pi(\alpha)} \text{ mono}$$

がわかる。

1.8. 補題.  $A = (A, F_i)_{i \in \omega}$ ,  $B = (B, G_i)_{i \in \omega}$  を machine とし、 $\pi : A \rightarrow B$  が cofinal (即ち、 $\forall \beta \in B \exists \alpha \in A (\beta \leq \pi(\alpha))$ ) であるとする。さらに  $A$  は limit ordinal かまたは  $A = On$  とする。もし、任意の  $\alpha \in A$  に対して、

$$\pi \upharpoonright \alpha : A^\alpha \rightarrow B^{\pi(\alpha)} \text{ mono}$$

であれば、 $\pi : A \rightarrow B$  mono である。

証明.  $u \in A^{<\omega}$  とする。 $u \in \text{dom}(F_i)$  であれば、 $F_i(u) \in A$ 。従って、 $\alpha \in A$  を十分大きくとれば、 $u \in \alpha^{<\omega}$ ,  $F_i(u) < \alpha$  とできる。このとき、 $u \in \text{dom}(F_i^\alpha)$  であり、 $F_i^\alpha(u) = F_i(u)$  である。従って

$$\pi(F_i(u)) = \pi(F_i^\alpha(u)) = G_i^{\pi(\alpha)}(\pi(u)) = G_i(\pi(u)).$$

これで、 $\pi(u) \in \text{dom}(G_i)$ ,  $\pi(F_i(u)) = G_i(\pi(u))$  となる。

次にもし  $\pi(u) \in \text{dom}(G_i)$  であれば、 $G_i(\pi(u)) \in B$ ,  $\pi(u) \in B^{<\omega}$  であるから、 $\pi : A \rightarrow B$  が cofinal なことにより、 $\alpha \in A$  を十分大きくとり、 $u \in \alpha^{<\omega}$ ,  $G_i(\pi(u)) < \pi(\alpha)$  とできる。すると、 $\pi(u) \in \text{dom}(G_i^{\pi(\alpha)})$  であるから、 $u \in \text{dom}(F_i^\alpha)$  となるので、 $u \in \text{dom}(F_i)$ 。これで、

$$\pi(F_i(u)) \simeq G_i(\pi(u))$$

がいえた。また各  $\pi \upharpoonright \alpha$  は 1 対 1 なので、 $\pi$  も 1 対 1 であり、従って

$$\pi : A \rightarrow B \quad \text{mono}$$

となる。

1.9. 定義. Machine  $\mathcal{A}$  が finite support property (FSP) をみたすとは、任意の  $\delta \in On$  に対して、次の条件 (1), (2) をみたす有限な  $H_\delta \subseteq \delta$  が存在することである:

$$(1) H_\delta \subseteq \mathcal{A}^{\delta+1}(\{\delta\})$$

(2)  $\pi : \bar{\delta} \rightarrow \delta$  が strong  $\mathcal{A}$ -map で、 $H_\delta \subseteq \text{range}(\pi)$  であれば、 $\pi(\bar{\delta}) = \delta$  として  $\pi$  を拡張したものが、 $\bar{\delta} + 1$  から  $\delta + 1$  への strong  $\mathcal{A}$ -map になる。(このように拡張したものも  $\pi$  と書くことにする。) このような  $H_\delta$  を  $\delta$  の support と呼ぶ。

1.10. 定義.

(1)  $X \subseteq \delta$  とし、 $\bar{\delta}$  を  $X$  の順序型とする。このとき、一意的に定まる順序同型  $\pi : \bar{\delta} \rightarrow X$  を  $X$  の collapsing map という。

(2) Machine  $\mathcal{A}$  が collapsing property (CP) をみたすとは、任意の  $\delta \in On$  と  $X \subseteq \delta$  に対して、 $X$  が  $\mathcal{A}^\delta$  の subalgebra であれば、 $X$  の collapsing map  $\pi : \bar{\delta} \rightarrow X$  が  $\bar{\delta}$  から  $\delta$  への strong  $\mathcal{A}$ -map になることである。

1.11. 定理.  $\mathcal{A}$  が FSP をみたせば、 $\mathcal{A}$  は CP もみたす。

証明.  $\delta \in On$  を任意にとり、 $X \subseteq \delta$  を  $\mathcal{A}^\delta$  の subalgebra,  $\pi : \bar{\delta} \rightarrow X$  を  $X$  の collapsing map とする。 $\pi$  を拡張して、 $\pi(\bar{\delta}) = \delta$  としておく。まず次のことを示しておく。

(1) 任意の  $\bar{\eta} \leq \bar{\delta}$  に対し、 $\text{range}(\pi \upharpoonright \bar{\eta})$  は  $\mathcal{A}^{\pi(\bar{\eta})}$  の subalgebra である。

証明.  $u \in \text{range}(\pi \upharpoonright \bar{\eta})^{<\omega}$  とし、 $F$  を  $\mathcal{A}$  の関数とする。 $F^{\pi(\bar{\eta})}(u)$  が定義されているとする。 $u \in X^{<\omega}$  であり、 $F^{\pi(\bar{\eta})}(u) = F^\delta(u)$  だから、 $X$  が  $\mathcal{A}^\delta$  の subalgebra であることから、 $F^{\pi(\bar{\eta})}(u) \in X$ 。従って  $F^{\pi(\bar{\eta})}(u) = \pi(\bar{\nu})$  となる  $\bar{\nu} < \bar{\delta}$  がとれる。ところで、 $\pi(\bar{\nu}) = F^{\pi(\bar{\eta})}(u) < \pi(\bar{\eta})$  だから、 $\bar{\nu} < \bar{\eta}$  である。故に

$$F^{\pi(\bar{\eta})}(u) \in \text{range}(\pi \upharpoonright \bar{\eta})$$

となるので、 $\text{range}(\pi \upharpoonright \bar{\eta})$  は  $\mathcal{A}^{\pi(\bar{\eta})}$  の subalgebra である。

(2)  $\bar{\eta} \leq \bar{\delta}$  に対して、 $\sigma_{\bar{\eta}} = \sup\{\pi(\bar{\nu}) + 1 \mid \bar{\nu} < \bar{\eta}\}$  とする。このとき  $\pi \upharpoonright \bar{\eta}$  が  $\bar{\eta}$  から  $\sigma_{\bar{\eta}}$  への strong  $\mathcal{A}$ -map であれば、

$$\pi \upharpoonright \bar{\eta} : \bar{\eta} \rightarrow \pi(\bar{\eta}) \quad \text{strong } \mathcal{A}\text{-map}$$

証明. まず、 $\sigma_{\bar{\eta}} \leq \pi(\bar{\eta})$  である。今、 $F$  を  $\mathcal{A}$  の関数とし、 $u \in \bar{\eta}^{<\omega}$  とする。まず、 $u \in \text{dom}(F^{\bar{\eta}})$  とすると、

$$\pi(F^{\bar{\eta}}(u)) = F^{\sigma_{\bar{\eta}}}(\pi(u)) = F^{\pi(\bar{\eta})}(\pi(u))$$

である。そこで、 $\pi(u) \in \text{dom}(F^{\pi(\bar{\eta})})$  とする。 $\pi(u) \in \text{range}(\pi \upharpoonright \bar{\eta})^{<\omega}$  だから、(1) によって、 $F^{\pi(\bar{\eta})}(\pi(u)) \in \text{range}(\pi \upharpoonright \bar{\eta})$ . 従って

$$F^{\pi(\bar{\eta})}(\pi(u)) = \pi(\bar{\nu}), \quad \bar{\nu} < \bar{\eta}$$

とできるが、 $\pi(\bar{\nu}) < \pi(\bar{\nu}) + 1 \leq \sigma_{\bar{\eta}}$  なので、 $F^{\pi(\bar{\eta})}(\pi(u)) < \sigma_{\bar{\eta}}$  である。即ち、 $F^{\sigma_{\bar{\eta}}}(\pi(u))$  が定義されることになる。故に、 $u \in \text{dom}(F^{\bar{\eta}})$  である。これで、

$$\pi(F^{\bar{\eta}}(u)) \simeq F^{\pi(\bar{\eta})}(\pi(u))$$

がいえるので、(2) は証明された。

定理を証明するために、 $\bar{\eta} < \bar{\delta}$  についての帰納法で、

$$\pi \upharpoonright \bar{\eta} : \bar{\eta} \rightarrow \pi(\bar{\eta}) \quad \text{strong } \mathcal{A}\text{-map}$$

を証明する。 $\bar{\eta} = \bar{\delta}$  とすれば、定理は直ちに従う。

まず、 $\bar{\eta}$  が limit ordinal であったとする。各  $\bar{\nu} < \bar{\eta}$  に対しては、

$$\pi \upharpoonright \bar{\nu} : \bar{\nu} \rightarrow \pi(\bar{\nu}) \quad \text{strong } \mathcal{A}\text{-map}$$

である。今、 $\sigma_{\bar{\eta}}$  を (2) のようにとると、

$$\pi \upharpoonright \bar{\eta} : \bar{\eta} \rightarrow \sigma_{\bar{\eta}} \quad \text{cofinal}$$

であるから、補題 1.8. により、 $\pi \upharpoonright \bar{\eta} : \bar{\eta} \rightarrow \sigma_{\bar{\eta}}$  strong  $\mathcal{A}$ -map となるが、さらに (2) によって、

$$\pi \upharpoonright \bar{\eta} : \bar{\eta} \rightarrow \pi(\bar{\eta}) \quad \text{strong } \mathcal{A}\text{-map}$$

となる。

次に、 $\bar{\eta} = \bar{\nu} + 1$  とする。 $\pi \upharpoonright \bar{\nu} : \bar{\nu} \rightarrow \pi(\bar{\nu})$  strong  $\mathcal{A}$ -map である。 $\mathcal{A}$  は FSP をみたすので、 $\pi(\bar{\nu})$  の support  $H = H_{\pi(\bar{\nu})}$  がとれる。今、もし

$$H \subseteq \text{range}(\pi \upharpoonright \bar{\nu})$$

であれば、 $\pi \upharpoonright \bar{\nu}$  の拡張  $\pi \upharpoonright \bar{\eta}$  については、定義 1.9.(2) により、

$$\pi \upharpoonright \bar{\eta} : \bar{\eta} \rightarrow \pi(\bar{\nu}) + 1 \quad \text{strong } \mathcal{A}\text{-map}$$

となり、従って  $\sigma_{\bar{\eta}} = \pi(\bar{\nu}) + 1$  により、(2) から

$$\pi \upharpoonright \bar{\eta} : \bar{\eta} \rightarrow \pi(\bar{\eta}) \quad \text{strong } \mathcal{A}\text{-map}$$

となる。従って、 $H \subseteq \text{range}(\pi \upharpoonright \bar{\nu})$ を示せば良い。以下、これを示す。 $\nu = \pi(\bar{\nu})$ とおくと、 $\nu \in X$ だから、 $\nu \in X \cap (\nu+1)$ である。 $Y = X \cap (\nu+1)$ とする。 $Y$ が $\mathcal{A}^{\nu+1}$ のsubalgebraであることをいうために、 $u \in Y^{<\omega}$ とし、 $F$ を $\mathcal{A}$ の関数とし、 $F^{\nu+1}(u)$ が定義されているとする。 $F^{\nu+1}(u) = F^\delta(u) < \nu+1$ だから、 $X$ が $\mathcal{A}^{\nu+1}$ のsubalgebraであることから、 $F^{\nu+1} \in X \cap (\nu+1) = Y$ 。これで $Y$ が $\mathcal{A}^{\delta+1}$ のsubalgebraであることがわかった。 $\nu \in Y$ であったから、定義1.9.(1)とあわせて、

$$H \subseteq \mathcal{A}^{\nu+1}(\{\nu\}) \subseteq Y$$

従って

$$H = H \cap \nu \subseteq Y \cap \nu = X \cap \pi(\bar{\nu}) = \text{range}(\pi \upharpoonright \bar{\nu})$$

となる。

1.12. 定義. Machine  $\mathcal{A}$  が finiteness property (FP) をみたすとは、任意の $\delta \in On$  に対して、次の条件をみたす有限な  $H \subseteq \delta$  が存在することである：

$$\text{任意の } X \subseteq \delta \text{ に対し、 } \delta \cap \mathcal{A}^{\delta+1}(X \cup \{\delta\}) \subseteq \mathcal{A}^\delta(X \cup H)$$

1.13. 定理.  $\mathcal{A}$  が FSP をみたせば、 $\mathcal{A}$  は FP もみたす。

証明.  $\delta \in On$  とする。FSP をみたすから、 $\delta$  の support  $H_\delta$  がとれる。 $H = H_\delta$  とすれば良い。

$X \subseteq \delta$  を任意にとり、 $\pi : \bar{\delta} \rightarrow \mathcal{A}^\delta(X \cup H_\delta)$  を collapsing map とする。定理1.11. により  $\mathcal{A}$  は CP をみたすから、 $\pi : \bar{\delta} \rightarrow \delta$  strong  $\mathcal{A}$ -map である。さらに  $H_\delta \subseteq \mathcal{A}^\delta(X \cup H_\delta) = \text{range}(\pi)$  だから、 $\pi$  を拡張して

$$\pi : \bar{\delta} + 1 \rightarrow \delta + 1, \quad \pi(\bar{\delta}) = \delta$$

としたものは、 $\bar{\delta} + 1$  から  $\delta + 1$  への strong  $\mathcal{A}$ -map である。

$X \cup \{\delta\} \subseteq \text{range}(\pi)$  により、

$$\mathcal{A}^{\delta+1}(X \cup \{\delta\}) \subseteq \mathcal{A}^{\delta+1}(\text{range}(\pi)) = \text{range}(\pi)$$

である。最後の等号は、 $\pi : \bar{\delta} + 1 \rightarrow \delta + 1$  が strong  $\mathcal{A}$ -map だから、 $\text{range}(\pi)$  が  $\mathcal{A}^{\delta+1}$  の subalgebra になることによる。そこで、 $\delta$  との共通部分をとれば、

$$\delta \cap \mathcal{A}^{\delta+1}(X \cup \{\delta\}) \subseteq \delta \cap \text{range}(\pi) = \mathcal{A}^\delta(X \cup H_\delta)$$

となる。これで定理は証明された。



## 2. Pairing Machine

$L[A]$ -machine を定義する前に、pairing machine  $\mathcal{P}$  を定める。

2.1. 定義.  $u, v \in On^{<\omega}$  とし、 $u = \langle u_0, \dots, u_{m-1} \rangle, v = \langle v_0, \dots, v_{n-1} \rangle$  とする。  $u < v$  とは、

- (1)  $\max(u) < \max(v)$ , または
- (2)  $u$  が  $v$  の permutation でなくて

$$\langle u_0, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_{m-1} \rangle < \langle v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_{n-1} \rangle$$

ただし、 $u_i = \max(u), v_j = \max(v)$ , または

(3)  $u$  が  $v$  の permutation であって、 $u <_{lex} v$ . ここで  $<_{lex}$  は辞書式順序である。  
であることと定める。すると、 $<$  は  $On^{<\omega}$  を整列する。

2.2. 定義.

- (1)  $J : On^{<\omega} \rightarrow On$  は  $On^{<\omega}$  と  $On$  との間の順序同型である。
- (2)  $i \in \omega$  に対して、 $C_i$  は

$$C_i(u) = \begin{cases} \alpha_i, & \text{if } u = \langle \alpha \rangle \text{ \& } J(\langle \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \rangle) = \alpha \text{ \& } i = n \\ \text{undefined,} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

で定められる  $On^{<\omega}$  から  $On$  への partial function である。

(3) Machine  $\mathcal{P} = (On, F_0, J, C_i)_{i \in \omega}$  を pairing machine という。

2.3. 例.

- (1)  $J(\langle \rangle) = 0, J(\langle 0 \rangle) = 1, J(\langle 0, 0 \rangle) = 2, \dots, J(\langle 1 \rangle) = \omega$ .
- (2)  $J(\langle 0, 1 \rangle) = \omega + 1, J(\langle 1, 0 \rangle) = \omega + 2, J(\langle 0, 0, 1 \rangle) = \omega + 3, \dots, J(\langle 1, 1 \rangle) = \omega + \omega$ .
- (3)  $J(\langle 2 \rangle) = \omega^2, J(\langle 3 \rangle) = \omega^3, \dots, J(\langle \omega \rangle) = \omega^\omega$ , 一般に、 $J(\langle \alpha \rangle) = \omega^\alpha$ .

2.4. 補題.

- (1)  $\max(u) \leq J(u)$
- (2)  $C_i(\langle \alpha \rangle)$  が定義されていれば、 $C_i(\langle \alpha \rangle) \leq \alpha$ .

証明. (1)  $J[\alpha^{<\omega}] = J\{J(u) \mid u \in \alpha^{<\omega}\}$  は  $On$  の initial segment, 従って、順序数である。故に写像  $\alpha \mapsto J[\alpha^{<\omega}]$  は  $On$  から  $On$  への increasing map である。このことから、 $\alpha \leq J[\alpha^{<\omega}]$  がわかる。  
 $\alpha_i = \max(u)$  とすれば

$$\alpha_i \leq J[\alpha^{<\omega}] \leq J(u).$$

(2)  $J(\langle \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \rangle) = \alpha$  とすると、(1) により

$$C_i(\langle \alpha \rangle) = \alpha_i \leq \max(\langle \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \rangle) \leq J(\langle \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \rangle) = \alpha.$$

故に  $C_i(\langle \alpha \rangle) \leq \alpha$  となる。

2.5. 定義.  $\alpha \in On$  が  $J$ -closed であるとは、 $J[\alpha^{<\omega}] \subseteq \alpha$  であることである。

2.6. 補題.  $\alpha$  が  $J$ -closed  $\leftrightarrow J(\langle \alpha \rangle) = \alpha$

証明. まず、 $\alpha$  が  $J$ -closed であったとする。補題 2.4.(1) で  $u = \langle \alpha \rangle$  とすれば、 $\alpha \leq J(\langle \alpha \rangle)$  である。今、 $u < \langle \alpha \rangle$  とすれば

$$u = \langle \beta_0, \dots, \beta_{n-1} \rangle, \quad \beta_0, \dots, \beta_{n-1} < \alpha$$

である。即ち  $u \in \alpha^{<\omega}$ . 故に

$$J(u) \in J[\alpha^{<\omega}] \subseteq \alpha.$$

これより、 $J(\langle \alpha \rangle) = \alpha$  がわかるので、 $J(\langle \alpha \rangle) = \alpha$ .

逆に、 $J(\langle \alpha \rangle) = \alpha$  とする。もし、 $u \in \alpha^{<\omega}$  ならば、 $u < \langle \alpha \rangle$  なので

$$J(u) < J(\langle \alpha \rangle) = \alpha.$$

従って  $\alpha$  は  $J$ -closed になる。

注意. 2.3.(3) により、

$$\alpha \text{ が } J\text{-closed} \leftrightarrow \omega^\alpha = \alpha$$

である。

2.7. 定理.  $\mathcal{P}$  は FSP をみたす。(従って CP, FP もみたす。)

証明.  $\delta \in On$  とする。 $\delta$  の support  $H_\delta$  を次のように定める。もし、 $\delta$  が  $J$ -closed であれば、 $H_\delta = \emptyset$  とする。もし、そうでなければ、 $J(\langle \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \rangle) = \delta$  となる  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} < \delta$  があるから、 $H_\delta = \{\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}\}$  とする。いずれの場合でも、 $H_\delta$  は有限で、 $H_\delta \subseteq \delta$ . また、 $\alpha_i = C_i(\langle \delta \rangle)$  であるから、 $H_\delta \subseteq \mathcal{P}^{\delta+1}(\{\delta\})$ .

今、 $\pi: \bar{\delta} \rightarrow \delta$  が strong  $\mathcal{P}$ -map で  $H_\delta \subseteq \text{range}(\pi)$  となっているとする。 $\pi$  を拡張して、 $\pi(\bar{\delta}) = \delta$  とする。まず、 $u \in (\bar{\delta} + 1)^{<\omega}$  に対して

$$(1) \quad J(u) = \bar{\delta} \leftrightarrow J(\pi(u)) = \delta$$

を示す。 $\delta$  が  $J$ -closed であれば、 $\pi: \bar{\delta} \rightarrow \delta$  strong  $\mathcal{P}$ -map だから、 $\bar{\delta}$  も  $J$ -closed である。従って補題 2.6. により  $J(\langle \bar{\delta} \rangle) = \bar{\delta}$ . 従って  $J(u) = \bar{\delta}$  であれば、 $u = \langle \bar{\delta} \rangle$  である。故に再び補題 2.6. により、 $J(\pi(u)) = J(\langle \delta \rangle) = \delta$ . また、逆に  $J(\pi(u)) = \delta$  であれば、 $\pi(u) = \langle \delta \rangle$  であるから、 $u = \langle \bar{\delta} \rangle$ . 故に  $J(u) = J(\langle \bar{\delta} \rangle) = \bar{\delta}$ .

次に、 $\delta$  が  $J$ -closed でないとする。

$$J(\langle \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \rangle) = \delta, \quad \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} < \delta$$

である。 $H_\delta = \{\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}\} \subseteq \text{range}(\pi)$  であるから、 $\pi(\bar{\alpha}_0) = \alpha_0, \dots, \pi(\bar{\alpha}_{n-1}) = \alpha_{n-1}$  となる  $\bar{\alpha}_0, \dots, \bar{\alpha}_{n-1} < \bar{\delta}$  が存在する。 $a = \langle \bar{\alpha}_0, \dots, \bar{\alpha}_{n-1} \rangle$  とする。(1) をいうためには、 $J(a) = \bar{\delta}$  を言えば良い。まず、 $u \in On^{<\omega}$  を  $J(u) = \bar{\delta}$  となるものとする。補題 2.4. により、 $\max(u) \leq \bar{\delta}$  だから、 $u \in (\bar{\delta} + 1)^{<\omega}$  である。もし、 $a < u$  なら  $J(a) < J(u)$  だから、 $J^{\bar{\delta}}(a)$  が定義されるので

$$\pi(J^{\bar{\delta}}(a)) = J^{\bar{\delta}}(\pi(a)) = J(\langle \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \rangle) = \delta$$

となるが、これは不合理である。また、もし、 $u < a$  であれば、 $u \in \bar{\delta}^{<\omega}$  となるので、 $J(\pi(u)) < J(\pi(a)) = \delta$  であり、 $J^\delta(\pi(u))$  が定義される。すると、 $J^\delta(u)$  も定義されることになるが、 $J(u) = \bar{\delta}$  だからこれは不合理。よって  $u = a$  となるので、 $J(a) = \bar{\delta}$  である。これから (1) はすぐにわかる。

さて、(1) を用いて

$$\pi : \bar{\delta} + 1 \rightarrow \delta + 1 \quad \text{strong } \mathcal{P}\text{-map}$$

を示す。 $F_0$  については、 $\pi$  が順序保存なことより明らかである。 $u \in (\bar{\delta} + 1)^{<\omega}$  に対し、

$$(2) \quad \pi(J^{\bar{\delta}+1}(u)) \simeq J^{\delta+1}(\pi(u))$$

をいう。まず、 $J^{\bar{\delta}+1}(u)$  が定義されたとする。 $J^{\bar{\delta}+1}(u) < \bar{\delta}$  であれば、補題 2.4. により  $\max(u) \leq J(u) < \delta$  だから  $u \in \bar{\delta}^{<\omega}$ 。従って、 $J^\delta(\pi(u)) = J^{\delta+1}(\pi(u))$  も定義され、

$$\pi(J^{\bar{\delta}+1}(u)) = \pi(J^\delta(u)) = J^\delta(\pi(u)) = J^{\delta+1}(\pi(u)).$$

$J^{\bar{\delta}+1}(u) = \bar{\delta}$  であれば、(1) により  $J(\pi(u)) = \delta$  だから、 $J^{\delta+1}(\pi(u))$  は定義され

$$\pi(J^{\bar{\delta}+1}(u)) = \pi(\bar{\delta}) = \delta = J^{\delta+1}(\pi(u)).$$

逆に  $J^{\delta+1}(\pi(u))$  が定義されたとする。 $J^{\delta+1}(\pi(u)) < \delta$  であれば、 $\max(\pi(u)) < \delta$  だから、 $u \in \bar{\delta}^{<\omega}$  であり、 $\pi(u) \in \text{dom}(J^\delta)$  だから、 $u \in \text{dom}(J^\delta) \subseteq \text{dom}(J^{\bar{\delta}+1})$ 。また、 $J^{\delta+1}(\pi(u)) = \delta$  ならば、(1) により、 $J(u) = \bar{\delta}$  だから、 $u \in \text{dom}(J^{\bar{\delta}+1})$ 。これで、 $J$  については問題ない。

最後に  $C_i$  についていう。 $\beta \leq \bar{\delta}$  とし、 $\beta = J(\langle \beta_0, \dots, \beta_{n-1} \rangle)$ ,  $i < n$  とする。 $C_i(\langle \beta \rangle) = \beta_i$  である。 $\beta_0, \dots, \beta_{n-1} \leq \beta \leq \bar{\delta}$  だから、 $\langle \beta_0, \dots, \beta_{n-1} \rangle \in (\bar{\delta} + 1)^{<\omega}$ 。(2) により、

$$\pi(\beta) = J(\langle \pi(\beta_0), \dots, \pi(\beta_{n-1}) \rangle)$$

であるから、 $C_i(\langle \pi(\beta) \rangle) = \pi(\beta_i) = \pi(C_i(\langle \beta \rangle))$ 。

逆に  $C_i^{\bar{\delta}+1}(\langle \pi(\beta) \rangle)$  が定義されたとする。もし、 $C_i^{\bar{\delta}+1}(\langle \beta \rangle)$  が定義されないとする、 $C_i(\langle \beta \rangle) \leq \beta \leq \bar{\delta}$  であるから、 $C_i(\langle \beta \rangle)$  が定義されないことになる。これは

$$\beta = J(\langle \beta_0, \dots, \beta_{n-1} \rangle)$$

となる  $\beta_0, \dots, \beta_{n-1}$  をとったとき、 $i \geq n$  となることを表す。さて、 $\langle \beta_0, \dots, \beta_{n-1} \rangle \in (\bar{\delta} + 1)^{<\omega}$  であるから、(2) により

$$\pi(\beta) = J(\langle \pi(\beta_0), \dots, \pi(\beta_{n-1}) \rangle)$$

ところが、 $i \geq n$  だから、 $C_i(\langle \pi(\beta) \rangle)$  は定義されない。これは不合理であるから、 $C_i^{\bar{\delta}+1}(\langle \beta \rangle)$  は定義されていなければならない。これで

$$\pi(C_i^{\bar{\delta}+1}(u)) \simeq C_i^{\delta+1}(\pi(u)).$$

以上により

$$\pi : \bar{\delta} + 1 \rightarrow \delta + 1, \quad \text{strong } \mathcal{P}\text{-map}.$$

### 3. $L[A]$ -Machine

$L[A]$ の定義では、集合論言語  $\mathcal{L}$  に一変数述語記号  $U$  を新たにつけ加えて

$$\begin{aligned} L_0[A] &= \emptyset \\ L_{\xi+1}[A] &= Def^U(L_\xi[A], A) \\ L_\lambda[A] &= \bigcup_{\xi < \lambda} L_\xi[A] \quad \lambda: \text{limit ordinal} \\ L[A] &= \bigcup_{\xi \in On} L_\xi[A] \end{aligned}$$

と定めた。ここで

$$Def^U(X, A) = \{Y \subseteq X \mid Y \text{ は } \mathcal{L}_U\text{-definable in } (X, A)\}$$

である。

さて、今  $\alpha \in On$  とし、 $A \subseteq \alpha$  とすると、

$$A = A \cap L_\alpha[A] = \{x \in L_\alpha[A] \mid \langle L_\alpha[A], A \rangle \models U(x)\}$$

であるから、 $A \in L_{\alpha+1}[A]$ . 従って  $\xi \geq \alpha + 1$  に対しては

$$\begin{aligned} L_{\xi+1}[A] &= Def^U(L_\xi[A], A) \\ &= Def(L_\xi[A]) \end{aligned}$$

である。よって  $L_\xi[A]$  の定義は

$$\begin{aligned} L_0[A] &= \emptyset \\ L_{\xi+1}[A] &= \begin{cases} Def^U(L_\xi[A], A), & \text{if } \xi \leq \alpha \\ Def(L_\xi[A]), & \text{if } \xi > \alpha. \end{cases} \\ L_\lambda[A] &= \bigcup_{\xi < \lambda} L_\xi[A] \quad \lambda: \text{limit ordinal} \end{aligned}$$

としても良い。

これにあわせて、ramified language  $\mathcal{R}_U$  で formula や term を定義する。まず、ramified language は次のものから成る:

変数:  $x_0, x_1, x_2, \dots$

述語記号:  $=, \in, U$  ( $=, \in$  は二変数,  $U$  は一変数)

connectives:  $\neg, \vee$

quantifiers:  $\exists^\xi$  ( $\xi \in On$ )

abstraction operators:  $\wedge^\xi$  ( $\xi \in On$ )

括弧: ( , )

3.1. 定義.  $\alpha \in On$  とする.  $\xi \in On$  に対して、 $\xi$ -formula $^\alpha$ と $\xi$ -term $^\alpha$ を、 $\xi$ についての帰納法で定める:

(a)  $\xi \leq \alpha$  のとき

(1)  $t_1, t_2$  が変数かまたは  $\zeta$ -term $^\alpha$  ( $\zeta < \xi$ ) のとき

$$(t_1 = t_2), (t_1 \in t_2), (U(t_1))$$

は  $\xi$ -formula $^\alpha$

(2)  $\varphi, \psi$  が  $\xi$ -formula $^\alpha$  なら、 $(\neg\varphi), (\varphi \vee \psi)$  も  $\xi$ -formula $^\alpha$

(3)  $\varphi$  が  $\xi$ -formula $^\alpha$  なら、 $(\exists x_i \zeta \varphi)$  ( $\zeta \leq \xi$ ) も  $\xi$ -formula $^\alpha$

(4)  $\varphi$  が  $x_i$  以外の自由変数を含まないような  $\xi$ -formula $^\alpha$  であれば、 $(\widehat{x_i}^\xi \varphi)$  は  $\xi$ -term $^\alpha$

(b)  $\xi > \alpha$  のとき

(1)  $t_1, t_2$  が変数かまたは  $\zeta$ -term $^\alpha$  ( $\zeta < \xi$ ) のとき

$$(t_1 = t_2), (t_1 \in t_2)$$

は  $\xi$ -formula $^\alpha$

(2)  $\varphi, \psi$  が  $\xi$ -formula $^\alpha$  なら、 $(\neg\varphi), (\varphi \vee \psi)$  も  $\xi$ -formula $^\alpha$

(3)  $\varphi$  が  $\xi$ -formula $^\alpha$  なら、 $(\exists x_i \zeta \varphi)$  ( $\zeta \leq \xi$ ) も  $\xi$ -formula $^\alpha$

(4)  $\varphi$  が  $x_i$  以外の自由変数を含まないような  $\xi$ -formula $^\alpha$  であれば  $(\widehat{x_i}^\xi \varphi)$  は  $\xi$ -term $^\alpha$

(a) と (b) のちがいは、(1) のみであり、(b) では  $U$  を使っていないことである。

尚、括弧は省略することもある。また、 $\&, \rightarrow, \forall^\zeta$  等の記号も用いることにする。

最後に  $\xi$ -formula $^\alpha, \xi$ -term $^\alpha$  は全て  $\mathcal{R}_U$  の記号の有限列であることに注意しておく。

3.2. 定義.

$$Fmla_\xi^\alpha = \{\varphi \mid \varphi \text{ は } \xi\text{-formula}^\alpha\}$$

$$Term_\xi^\alpha = \{t \mid t \text{ は } \zeta\text{-term}^\alpha, \zeta < \xi\}$$

$$Fmla^\alpha = \{\varphi \mid \varphi \text{ は } \xi\text{-formula}^\alpha, \xi \in On\} = \bigcup_{\xi \in On} Fmla_\xi^\alpha$$

$$Term^\alpha = \{t \mid t \text{ は } \xi\text{-term}^\alpha, \xi \in On\} = \bigcup_{\xi \in On} Term_\xi^\alpha$$

と定める。また、 $\varphi \in Fmla^\alpha, t \in Term^\alpha$  のときに、それぞれ、 $\varphi$  は formula $^\alpha, t$  は term $^\alpha$  であるということにする。また、 $\varphi$  が自由変数を含まない formula $^\alpha$  であるとき、 $\varphi$  を sentence $^\alpha$  と呼ぶ。

次に  $\mathcal{R}_U$  の Gödel numbering を考える。まず、記号の Gödel number を定める。記号  $s$  の Gödel number を「 $s$ 」と書くことにする。

$$\begin{aligned}
\ulcorner \epsilon \urcorner &= J(0, 0) \\
\ulcorner = \urcorner &= J(0, 1) \\
\ulcorner U \urcorner &= J(0, 2) \\
\ulcorner \neg \urcorner &= J(0, 3) \\
\ulcorner \vee \urcorner &= J(0, 4) \\
\ulcorner ( \urcorner &= J(0, 5) \\
\urcorner ) \urcorner &= J(0, 6) \\
\ulcorner x_i \urcorner &= J(0, 7 + i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \\
\ulcorner \exists^\xi \urcorner &= J(0, \omega + \xi) \\
\ulcorner \wedge^\xi \urcorner &= J(0, \omega + \xi, \omega + \xi)
\end{aligned}$$

ここで、 $\ulcorner \exists^\xi \urcorner < \ulcorner \wedge^\xi \urcorner$  に注意する。記号と、その Gödel numbering を同一視すると

$$Fmla^\alpha, Term^\alpha \subseteq On^{<\omega}$$

である。

$\mathcal{R}_U$  の記号の有限列に対しては、

$$\ulcorner s_1 s_2 \cdots s_n \urcorner = J(1, \ulcorner s_1 \urcorner, \dots, \ulcorner s_n \urcorner)$$

と定める。例えば

$$\begin{aligned}
\ulcorner (x_0 \in x_2) \urcorner &= J(1, \ulcorner ( \urcorner, \ulcorner x_0 \urcorner, \ulcorner \in \urcorner, \ulcorner x_2 \urcorner, \urcorner) \urcorner) \\
\ulcorner (U(t)) \urcorner &= J(1, \ulcorner ( \urcorner, \ulcorner U \urcorner, \ulcorner ( \urcorner, \ulcorner s_1 \urcorner, \dots, \ulcorner s_n \urcorner, \urcorner) \urcorner, \urcorner) \urcorner) \quad \text{ただし、} t \equiv s_1 \cdots s_n
\end{aligned}$$

以後、 $\mathcal{R}_U$  の記号の有限列と、その Gödel number を同一視する。すると、 $formula^\alpha, term^\alpha$  は全て  $\mathcal{R}_U$  の記号の有限列だから、この同一視によって、

$$Fmla^\alpha, Term^\alpha \subseteq On$$

である。

3.3. 補題.  $\varphi, \psi$  は  $formula^\alpha$  とする。

- (1)  $\varphi < (\neg \varphi)$
- (2)  $\varphi, \psi < (\varphi \vee \psi)$
- (3)  $t \in Term_\xi^\alpha$  ならば、 $t, \varphi(t) < (\exists_{x_i}^\xi \varphi(x_i))$
- (4)  $t \in Term_\xi^\alpha$  ならば、 $t, \varphi(t) < (\widehat{x_i}^\xi \varphi(x_i))$

証明は省略する。(4) については、 $\ulcorner \exists^\xi \urcorner < \ulcorner \wedge^\xi \urcorner$  であることを用いる。

## 3.4. 定義.

$$(1) E(\widehat{x_i}^{\xi} \varphi(x_i) = \widehat{x_j}^{\zeta} \psi(x_j)) \equiv \forall_{x_k}^{\eta} [\exists_{x_i}^{\xi} (x_i = x_k \& \varphi(x_i)) \leftrightarrow \exists_{x_j}^{\zeta} (x_j = x_k \& \psi(x_j))]$$

ただし、 $\eta = \max(\xi, \zeta)$

(2)  $\xi < \zeta$  のとき

$$E(\widehat{x_i}^{\xi} \varphi(x_i) \in \widehat{x_j}^{\zeta} \psi(x_j)) \equiv \psi(\widehat{x_i}^{\xi} \varphi(x_i))$$

(3)  $\xi \geq \zeta$  のとき

$$E(\widehat{x_i}^{\xi} \varphi(x_i) \in \widehat{x_j}^{\zeta} \psi(x_j)) \equiv \exists_{x_k}^{\xi} [\forall_{x_i}^{\xi} (x_i \in x_k \leftrightarrow \varphi(x_i)) \& \exists_{x_j}^{\zeta} (x_j = x_k \& \psi(x_j))]$$

3.5. 補題.  $t_1, t_2$  が  $\text{Term}^{\alpha}$  のとき

$$(1) E(t_1 = t_2) < (t_1 = t_2)$$

$$(2) E(t_1 \in t_2) < (t_1 \in t_2)$$

証明は省略する。「 $\exists^{\xi}$ 」<「 $\wedge^{\xi}$ 」を用いる。

3.6. 補題.  $\varepsilon_0$  を最初の  $J$ -closed ordinal とし、 $\varepsilon_0 \leq \bar{\delta}, \bar{\alpha} < \bar{\delta}$  とする。さらに、 $\pi : \bar{\delta} \rightarrow \delta$  strong  $\mathcal{P}$ -map とし、 $\alpha = \pi(\bar{\alpha})$  とおく。このとき  $\bar{\eta} < \bar{\delta}$  に対し

$$\bar{\eta} \in Fmla^{\bar{\alpha}} \quad \text{iff} \quad \pi(\bar{\eta}) \in Fmla^{\alpha}$$

$$\bar{\eta} \in Term^{\bar{\alpha}} \quad \text{iff} \quad \pi(\bar{\eta}) \in Term^{\alpha}$$

がいえる。

証明. 最初に

$$(1) \quad \bar{\eta} < \varepsilon_0 \text{ ならば、} \pi(\bar{\eta}) = \bar{\eta}$$

を示しておく。 $\bar{\eta}$  についての帰納法による。

$$\bar{\eta} = 0 \text{ ならば、} 0 = J(\langle \rangle) \text{ だから、} \pi(0) = \pi(J^{\bar{\delta}}(\langle \rangle)) = J^{\delta}(\langle \rangle) = 0$$

$\bar{\eta} > 0$  であれば、 $J(\langle \bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_{n-1} \rangle) = \bar{\eta}$  なる  $\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_{n-1}$  がとれる。 $\bar{\eta}$  は  $J$ -closed でないから、 $\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_{n-1} < \bar{\eta}$  である。従って帰納法の仮定により

$$\begin{aligned} \pi(\bar{\eta}) &= \pi(J^{\bar{\delta}}(\langle \bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_{n-1} \rangle)) = J^{\delta}(\langle \pi(\bar{\mu}_1), \dots, \pi(\bar{\mu}_{n-1}) \rangle) \\ &= J(\langle \bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_{n-1} \rangle) = \bar{\eta}. \end{aligned}$$

これで、(1) がいえる。

さて、 $\mathcal{R}_U$  の記号  $s$  のうち、 $\exists^{\xi}, \wedge^{\xi}$  以外のものについては、 $s < \varepsilon_0$  だから、(1) によって

$$(2) \quad \pi(s) = s$$

である。そこで、 $\pi(\exists^{\xi}), \pi(\wedge^{\xi})$  がどうなるかを見る。まず、 $\exists^{\xi} < \bar{\delta}$  とする。すると、 $\exists^{\xi} = J(\langle 0, \omega + \xi \rangle) = J^{\bar{\delta}}(\langle 0, \omega + \xi \rangle)$  だから、

$$\begin{aligned} \pi(\exists^{\xi}) &= \pi(J^{\bar{\delta}}(\langle 0, \omega + \xi \rangle)) = J^{\delta}(\langle \pi(0), \pi(\omega + \xi) \rangle) \\ &= J(\langle 0, \pi(\omega + \xi) \rangle). \end{aligned}$$

同様にして、 $\wedge^{\xi} < \bar{\delta}$  に対して、 $\pi(\wedge^{\xi}) = J(\langle 0, \pi(\omega + \xi), \pi(\omega + \xi) \rangle)$  もわかる。従って、 $\pi(\omega + \xi)$  の値を調べれば良い。実は

$$\pi(\omega + \xi) = \begin{cases} \omega + \xi, & \text{if } \xi < \omega^2 \\ \omega + \pi(\xi), & \text{if } \xi \geq \omega^2 \end{cases}$$

である。なぜならば、まず、 $\xi < \omega^2$ のときは、 $\omega + \xi < \varepsilon_0$ だから (1) により明らかである。尚、このとき、 $\pi(\xi) = \xi$ でもある。次に  $\xi \geq \omega^2$ とすると、 $\xi = \omega^2 + \zeta$ とできる。すると、

$$\omega + \xi = \omega + \omega^2 + \zeta = \omega(1 + \omega) + \zeta = \omega^2 + \zeta = \xi$$

だから、 $\pi(\omega + \xi) = \pi(\xi)$ 。さて、 $\xi \geq \omega^2$ により、 $\pi(\xi) \geq \pi(\omega^2) = \omega^2$ だから、 $\omega + \xi = \xi$ のときと同様に、 $\pi(\xi) = \omega + \pi(\xi)$ がわかる。これで

$$(3) \quad \pi(\exists^\xi) = \exists^{\pi(\xi)}, \quad \pi(\neg^\xi) = \neg^{\pi(\xi)}$$

となることがわかった。

(2), (3) により、 $\bar{\eta} < \bar{\delta}$ が formula $^{\bar{\alpha}}$ であれば、 $\pi(\bar{\eta})$ は、 $\bar{\eta}$ に現れる  $\exists^\xi, \neg^\xi$ を全て  $\exists^{\pi(\xi)}, \neg^{\pi(\xi)}$ におきかえたものである。また  $\bar{\eta} \in \text{Term}^{\bar{\alpha}}$ のときも同様である。これにより

$$\begin{aligned} \bar{\eta} \in \text{Fmla}^{\bar{\alpha}} &\rightarrow \pi(\bar{\eta}) \in \text{Fmla}^{\alpha} \\ \bar{\eta} \in \text{Term}^{\bar{\alpha}} &\rightarrow \pi(\bar{\eta}) \in \text{Term}^{\alpha} \end{aligned}$$

がわかる。

さて、今、 $\pi(\bar{\eta})$ が  $\mathcal{R}_U$ の記号の有限列であったとする。従って

$$\pi(\bar{\eta}) = J(1, s_1, \dots, s_n) = J^\delta(1, s_1, \dots, s_n)$$

である。ここで、 $s_i$ は  $\mathcal{R}_U$ の記号 (の Gödel number) である。今、 $\pi$ は  $\bar{\delta}$ から  $\delta$ への strong  $\mathcal{P}$ -map だから、 $\text{range}(\pi)$ は  $\mathcal{P}^\delta$ の subalgebra である。さらに、

$$s_i = C_i(\pi(\bar{\eta})) = C_i^\delta(\pi(\bar{\eta}))$$

であるから、 $s_i \in \text{range}(\pi)$ 。従って、 $s_i = \pi(\bar{s}_i)$ となる  $\bar{s}_i < \bar{\delta}$ がとれる。このとき、

$$\bar{\eta} = J^{\bar{\delta}}(1, \bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n) = J(1, \bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n)$$

である。 $\bar{s}_i = \pi^{-1}(s_i)$ について調べる。まず、 $s_i$ が  $\exists^\xi, \neg^\xi$ 以外のものであれば、 $s_i < \varepsilon_0$ だから、 $\bar{s}_i = s_i$ である。そこで、 $s_i$ が  $\exists^\xi$ や  $\neg^\xi$ のときを考える。まず

$$s_i = \exists^\xi = J(\langle 0, \omega + \xi \rangle) = J^\delta(\langle 0, \omega + \xi \rangle)$$

とする。 $s_i \in \text{range}(\pi)$ で  $\text{range}(\pi)$ が  $\mathcal{P}^\delta$ の subalgebra だから

$$\omega + \xi = C_i^\delta(s_i) \in \text{range}(\pi).$$

従って、 $\omega + \xi = \pi(\omega + \zeta)$ とできるが、 $\pi(\omega + \zeta) = \omega + \pi(\zeta)$ であったから、 $\xi = \pi(\zeta)$ 。従って

$$\bar{s}_i = J^{\bar{\delta}}(\langle 0, \omega + \zeta \rangle) = J(\langle 0, \omega + \zeta \rangle) = \exists^\zeta = \exists^{\pi^{-1}(\xi)}.$$



同様に、 $s_i = \neg^\xi$  のとき、 $\bar{s}_i = \neg^{\pi^{-1}(\xi)}$  であることがわかる。このことにより、 $\bar{\eta}$  は  $\pi(\bar{\eta})$  に現れる  $\exists^\xi, \neg^\xi$  を全て  $\exists^{\pi^{-1}(\xi)}, \neg^{\pi^{-1}(\xi)}$  におきかえたものであることがわかる。このことから

$$\begin{aligned}\pi(\bar{\eta}) \in Fmla^\alpha &\rightarrow \bar{\eta} \in Fmla^{\bar{\alpha}} \\ \pi(\bar{\eta}) \in Term^\alpha &\rightarrow \bar{\eta} \in Term^{\bar{\alpha}}\end{aligned}$$

がわかる。以上のことにより、補題は証明された。

### 3.7. 定義. truth value $T_A^\alpha$ と denotation operator $D_A^\alpha$

$A \subseteq \alpha$  とする。まず、 $T_A^\alpha, D_A^\alpha$  はそれぞれ

$$\begin{aligned}T_A^\alpha : Sentence^\alpha &\rightarrow \{0, 1\} \\ D_A^\alpha : Term^\alpha &\rightarrow L[A]\end{aligned}$$

なる関数である。その値は次のようにして定められる。(1)-(2) では、 $t_1, t_2 \in Term^\alpha$  であり、(3) では、 $t \in Term_\alpha^\alpha$  である。:

- (1)  $T_A^\alpha(t_1 = t_2) = T_A^\alpha(E(t_1 = t_2))$
- (2)  $T_A^\alpha(t_1 \in t_2) = T_A^\alpha(E(t_1 \in t_2))$
- (3)  $T_A^\alpha(U(t)) = \begin{cases} 1, & \text{if } D_A^\alpha(t) \in A \\ 0, & \text{if } D_A^\alpha(t) \notin A \end{cases}$
- (4)  $T_A^\alpha(\neg\varphi) = 1 - T_A^\alpha(\varphi)$
- (5)  $T_A^\alpha(\varphi \vee \psi) = \max\{T_A^\alpha(\varphi), T_A^\alpha(\psi)\}$
- (6)  $T_A^\alpha(\exists_{x_i}^\xi \varphi(x_i)) = \max\{T_A^\alpha(\varphi(t)) \mid t \in Term_\xi^\alpha\}$
- (7)  $D_A^\alpha(\widehat{x_i}^\xi \varphi(x_i)) = \{D_A^\alpha(t) \mid t \in Term_\xi^\alpha \text{ \& } T_A^\alpha(\varphi(t)) = 1\}$

右辺の  $T_A^\alpha, D_A^\alpha$  の中身は左辺のものよりも Gödel number が小さい。従って、この定義は帰納法による定義になっている。

### 3.8. 補題. $\xi \in On, t_1, t_2 \in Term_\xi^\alpha$ に対し

- (1)  $T_A^\alpha(t_1 = t_2) = 1$  iff  $D_A^\alpha(t_1) = D_A^\alpha(t_2)$
- (2)  $T_A^\alpha(t_1 \in t_2) = 1$  iff  $D_A^\alpha(t_1) \in D_A^\alpha(t_2)$
- (3)  $L_\xi[A] = \{D_A^\alpha(t) \mid t \in Term_\xi^\alpha\}$

証明は略す。 $\xi$  についての帰納法を用いる。

今、 $\bar{\alpha} \leq \alpha$  とする。このとき、各  $\xi < \bar{\alpha}$  に対して

$$Fmla_\xi^{\bar{\alpha}} = Fmla_\xi^\alpha, \quad Term_\xi^{\bar{\alpha}} = Term_\xi^\alpha$$

であり、また

$$Term_{\bar{\alpha}}^{\bar{\alpha}} = Term_{\bar{\alpha}}^{\alpha}$$

であるが、さらに次のことがいえる。

3.9. 補題.  $A \subseteq \alpha$ ,  $\bar{\alpha} \leq \alpha$ ,  $\bar{A} = A \cap \bar{\alpha}$  とする。このとき、 $\xi < \bar{\alpha}$  に対し

- (1)  $t \in Term_{\xi}^{\bar{\alpha}} \rightarrow D_{\bar{A}}^{\bar{\alpha}}(t) = D_A^{\alpha}(t)$
- (2)  $\varphi \in Fmla_{\xi}^{\bar{\alpha}} \ \& \ \varphi \text{ が sentence}^{\bar{\alpha}} \rightarrow T_{\bar{A}}^{\bar{\alpha}}(\varphi) = T_A^{\alpha}(\varphi)$

さらに

- (3)  $t \in Term_{\bar{\alpha}}^{\bar{\alpha}} \rightarrow D_{\bar{A}}^{\bar{\alpha}}(t) = D_A^{\alpha}(t)$

証明は略す。ただし、(2) では、 $\varphi \equiv U(t)$  のときには、 $t \in Term_{\bar{\alpha}}^{\bar{\alpha}}$  だから、 $t \equiv (\hat{x}^{\zeta} \varphi(x))$ ,  $\zeta < \bar{\alpha}$  となっているので、 $D_A^{\alpha}(t) \leq \zeta < \bar{\alpha}$  となることに注意しておく。

以上の準備のもとで、 $L[A]$ -machine を定義する。

3.10. 定義.  $L[A]$ -machine  $\mathcal{M}_{\alpha}[A]$

$\alpha \in On$ ,  $A \subseteq \alpha$  に対して

$$\mathcal{M}_{\alpha}[A] = (On, F_0, J, C_i, T_{\alpha, A}, K_{\alpha, A})_{i < \omega}$$

と定める。ここで、 $T_{\alpha, A}, K_{\alpha, A}$  は次のようにして定義される:

$$T_{\alpha, A}(\langle \varphi \rangle) = T_A^{\alpha}(\varphi) \quad \text{if } \varphi \in Sentence^{\alpha}$$

それ以外は undefined

$$K_{\alpha, A}(\langle \exists_{x_i}^{\xi} \varphi(x_i) \rangle) = \text{the least } t \in Term_{\xi}^{\alpha} \text{ s.t. } T_A^{\alpha}(\varphi(t)) = 1$$

$$\text{if } \exists_{x_i}^{\xi} \varphi(x_i) \in Sentence^{\alpha} \ \& \ T_A^{\alpha}(\exists_{x_i}^{\xi} \varphi(x_i)) = 1$$

それ以外は undefined

容易にわかるように、 $T_{\alpha, A}(\langle \zeta \rangle), K_{\alpha, A}(\langle \zeta \rangle)$  は定義されていれば

$$T_{\alpha, A}(\langle \zeta \rangle) < \zeta, \quad K_{\alpha, A}(\langle \zeta \rangle) < \zeta.$$

である。

$\mathcal{M}_{\alpha}[A]$  については次が成り立つ。

3.11. 補題.  $\bar{\alpha} \leq \bar{\nu}$ ,  $\bar{\alpha}$  は  $J$ -closed とし、 $\pi : \bar{\nu} \rightarrow \nu$ ,  $\nu = J(\beta_0, \dots, \beta_{n-1})$  とする。  $\bar{\alpha} < \bar{\nu}$  なら  $\alpha = \pi(\bar{\alpha})$ ,  $\bar{\alpha} = \bar{\nu}$  なら  $\alpha = \nu$  とし、 $H$  を

$$H = \begin{cases} \{\beta_0, \dots, \beta_{n-1}\} \cap \nu, & \text{if } K_{\alpha, A}(\nu) \text{ が undefined} \\ (\{\beta_0, \dots, \beta_{n-1}\} \cap \nu) \cup \{K_{\alpha, A}(\nu)\}, & \text{if } K_{\alpha, A}(\nu) \text{ が defined} \end{cases}$$

とし、さらに  $H \subseteq \text{range}(\pi)$  と仮定する。このとき、もし

$$\pi : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\nu}} \rightarrow \mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\nu} \quad \text{mono}$$

ならば、 $\pi(\bar{\nu}) = \nu$  として拡張した  $\pi : \bar{\nu} + 1 \rightarrow \nu + 1$  については

$$\pi : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\nu}+1} \rightarrow \mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\nu+1} \quad \text{mono}$$

である。

証明. まず、もとの  $\pi$  については、 $\pi : \bar{\nu} \rightarrow \nu$  strong  $\mathcal{P}$ -map だから、 $H$  のとり方により、 $\pi : \bar{\nu} + 1 \rightarrow \nu + 1$  strong  $\mathcal{P}$ -map は明らか。さらに  $\pi(\bar{\alpha}) = \alpha$  だから、補題 3.6. により、 $\bar{\eta} \leq \bar{\nu}$  に対して

- (1)  $\bar{\eta} \in Fml_{\alpha}^{\bar{\alpha}}$  iff  $\pi(\bar{\eta}) \in Fml_{\alpha}^{\alpha}$
- (2)  $\bar{\eta} \in Term^{\bar{\alpha}}$  iff  $\pi(\bar{\eta}) \in Term^{\alpha}$
- (3)  $\bar{\eta} \in Sentence^{\bar{\alpha}}$  iff  $\pi(\bar{\eta}) \in Sentence^{\alpha}$

などがいえる。

補題を証明するには、 $\bar{\mu} < \bar{\nu} + 1$  に対して

$$(T) \quad \pi(T_{\bar{\alpha}, \bar{A}}^{\bar{\nu}+1}(\bar{\mu})) \simeq T_{\alpha, A}^{\nu+1}(\pi(\bar{\mu}))$$

$$(K) \quad \pi(K_{\bar{\alpha}, \bar{A}}^{\bar{\nu}+1}(\bar{\mu})) \simeq K_{\alpha, A}^{\nu+1}(\pi(\bar{\mu}))$$

をいえば良い。ここで、 $\bar{A} = A \cap \bar{\alpha}$  である。以下、 $T_{\bar{\alpha}, \bar{A}}, T_{\alpha, A}, K_{\bar{\alpha}, \bar{A}}, K_{\alpha, A}$  をそれぞれ、 $\bar{T}, T, \bar{K}, K$  と略記する。

まず、(T) についていう。 $\bar{\mu} < \bar{\nu}$  のときを考える。 $\bar{T}^{\bar{\nu}+1}(\bar{\mu}) = i$  とする。 $i = 0, 1$  だから、 $\bar{T}^{\bar{\nu}}(\bar{\mu}) = i$ 。従って  $T^{\nu}(\pi(\bar{\mu})) = \pi(i)$  となるから、 $T^{\nu+1}(\pi(\bar{\mu})) = T^{\nu}(\pi(\bar{\mu})) = \pi(i)$ 。即ち、

$$\pi(\bar{T}^{\bar{\nu}+1}(\bar{\mu})) = T^{\nu+1}(\pi(\bar{\mu})).$$

さて、 $T^{\nu+1}(\pi(\bar{\mu}))$  が定義されていれば、その値は 0 または 1 だから、 $T^{\nu}(\pi(\bar{\mu}))$  も定義されることになる。従って  $\bar{T}^{\bar{\nu}}(\bar{\mu})$  が定義され、それ故、 $\bar{T}^{\bar{\nu}+1}(\bar{\mu})$  も定義される。故に

$$\pi(\bar{T}^{\bar{\nu}+1}(\bar{\mu})) \simeq T^{\nu+1}(\pi(\bar{\mu})).$$

さて、 $\bar{\mu} = \bar{\nu}$  のときが残った。まず、 $\bar{T}^{\bar{\nu}+1}(\bar{\nu}) = i$  とする。すると、 $\bar{\nu} \in Sentence^{\bar{\alpha}}$  である。次のように場合にわけて、 $\pi(i) = T^{\nu+1}(\pi(\bar{\nu}))$  をいう。

(a)  $\bar{\nu} = (t_1 = t_2)$  のとき

$$i = \bar{T}^{\bar{\nu}+1}(\bar{\nu}) = \bar{T}(\bar{\nu}) = \bar{T}(E(t_1 = t_2))$$

である。ところが、 $E(t_1 = t_2) < \bar{\nu}$  だから、 $i = \bar{T}^{\bar{\nu}}(E(t_1 = t_2))$  である。従って

$$\pi(i) = T^{\nu}(\pi(E(t_1 = t_2))) = T^{\nu}(E(\pi(t_1 = t_2))) = T(\pi(\bar{\nu})) = T^{\nu+1}(\pi(\bar{\nu})).$$

(b)  $\bar{\nu} = (t_1 \in t_2)$  のとき. (a) と同様にすれば良い。

(c)  $\bar{\nu} = (U(t))$  のとき. この場合、 $t$  は  $\xi$ -term $^{\bar{\alpha}}$ ,  $\xi < \bar{\alpha}$  である。従って  $\bar{\alpha}$  が  $J$ -closed なことにより、 $(U(t)) < \bar{\alpha} \leq \bar{\nu}$ . 従って、この場合は考えなくても良い。

(d)  $\bar{\nu} = (\neg\varphi)$  のとき、 $\varphi < \bar{\nu}$  であり、 $i = \bar{T}(\bar{\nu}) = 1 - \bar{T}(\varphi)$  である。 $i = 0$  とすると、 $\bar{T}(\varphi) = \bar{T}^{\bar{\nu}}(\varphi) = 1$ . 従って  $T^{\nu}(\pi(\varphi)) = T(\pi(\varphi)) = \pi(1) = 1$ .  $\pi(\bar{\nu}) = (\neg\pi(\varphi))$  であるから、 $T(\pi(\bar{\nu})) = 0$ , i.e.,  $T^{\nu+1}(\pi(\bar{\nu})) = 0 = \pi(0)$ .  $i = 1$  としても同様にして、 $T^{\nu+1}(\pi(\bar{\nu})) = \pi(1)$  となる。従って、 $\pi(i) = T^{\nu+1}(\pi(\bar{\nu}))$  である。

(e)  $\bar{\nu} = (\varphi \vee \psi)$  のとき. (d) と同様にすれば良い。

(f)  $\bar{\nu} = (\exists_{x_i}^{\xi} \varphi(x_i))$  のとき、まず  $i = 1$  とする。すると、ある  $t \in \text{Term}_{\xi}^{\bar{\alpha}}$  に対して

$$\bar{T}(\varphi(t)) = 1$$

さらに、 $\varphi(t) < \bar{\nu}$  だから、これより、 $\bar{T}^{\bar{\nu}}(\varphi(t)) = 1$ . 従って  $T^{\nu}(\pi(\varphi(t))) = \pi(1) = 1$ . 今、 $\pi(\varphi(t)) = \pi(\varphi)(\pi(t))$  であり、 $\pi(t) \in \text{Term}_{\pi(\xi)}^{\alpha}$  であり、さらに、

$$\pi(\bar{\nu}) = (\exists_{x_i}^{\pi(\xi)} \pi(\varphi)(x_i))$$

だから、これらのことから、 $T(\pi(\bar{\nu})) = 1$ , i.e.,  $T^{\nu+1}(\pi(\bar{\nu})) = 1 = \pi(1)$  となる。

次に  $i = 0$  とする。 $\pi(\bar{\nu}) \in \text{Sentence}^{\alpha}$  だから  $T^{\nu+1}(\pi(\bar{\nu})) = T(\pi(\bar{\nu})) = 0, 1$ . そこで  $T(\pi(\bar{\nu})) = 1$  と仮定して矛盾を導く。 $\pi(\bar{\nu}) = \nu$  は、上記のような sentence $^{\alpha}$  だから、 $K(\nu)$  が定義される。 $t = K(\nu) = K(\pi(\bar{\nu}))$  とすると、 $t \in H \subseteq \text{range}(\pi \upharpoonright \bar{\nu})$  により、 $t = \pi(\bar{t})$ ,  $\bar{t} < \bar{\nu}$  とできる。さらに  $t \in \text{Term}_{\pi(\xi)}^{\alpha}$  だから、 $\bar{t} \in \text{Term}_{\xi}^{\bar{\alpha}}$ . さらに、

$$T(\pi(\varphi)(\pi(\bar{t}))) = 1, \text{ i.e., } T(\pi(\varphi(\bar{t}))) = 1$$

が成り立つ。 $\varphi(\bar{t}) < \bar{\nu}$  だから、 $\pi(\varphi(\bar{t})) < \pi(\bar{\nu}) = \nu$  により、これは、 $T^{\nu}(\pi(\varphi(\bar{t}))) = 1$  を意味する。従って、 $\bar{T}^{\bar{\nu}}(\varphi(\bar{t})) = 1$ ,  $\bar{t} \in \text{Term}_{\xi}^{\bar{\alpha}}$  となる。このことから、 $\bar{T}^{\bar{\nu}+1}(\bar{\nu}) = 1$  を得るが、 $i = 0$  だから、不合理。故に、 $T^{\nu+1}(\pi(\bar{\nu})) = 0$  とならねばならず、それ故

$$\pi(i) = T^{\nu+1}(\pi(\bar{\nu}))$$

となる。

さて逆に  $T^{\nu+1}(\pi(\bar{\nu}))$  が定義されていれば、 $\pi(\bar{\nu}) \in \text{Sentence}^{\alpha}$  だから、 $\bar{\nu} \in \text{Sentence}^{\bar{\alpha}}$  となり、 $\bar{T}^{\bar{\nu}+1}(\bar{\nu})$  も定義される。これで

$$\pi(\bar{T}^{\bar{\nu}+1}(\bar{\nu})) \simeq T^{\nu+1}(\pi(\bar{\nu}))$$

がわかり、(T) がいえた。

最後に (K) をいう。これもまず、 $\bar{\mu} < \bar{\nu}$  とする。 $\bar{t} = \bar{K}^{\bar{\nu}+1}(\bar{\mu})$  とすると、 $\bar{K}$  の性質から、 $\bar{t} < \bar{\mu} < \bar{\nu}$  だから、 $\bar{t} = \bar{K}^{\bar{\nu}}(\bar{\mu})$ 。従って  $\pi(\bar{t}) = K^{\nu}(\pi(\bar{\mu})) = K^{\nu+1}(\pi(\bar{\mu}))$  となり、このときは

$$\pi(\bar{K}^{\bar{\nu}+1}(\bar{\mu})) = K^{\nu+1}(\pi(\bar{\mu})).$$

さて、今  $K^{\nu+1}(\pi(\bar{\mu})) = t$  とすると、このときも、 $t < \pi(\bar{\mu}) < \pi(\bar{\nu}) = \nu$  となるので、 $t = K^{\nu}(\pi(\bar{\mu}))$  である。従って  $K^{\nu}(\pi(\bar{\mu}))$  は定義され、それ故に、 $K^{\bar{\nu}}(\bar{\mu})$  も定義される。故に  $\bar{K}^{\bar{\nu}+1}(\bar{\mu})$  も定義される。これらのことにより、

$$\pi(\bar{K}^{\bar{\nu}+1}(\bar{\mu})) \simeq K^{\nu+1}(\pi(\bar{\mu})).$$

次に  $\bar{\mu} = \bar{\nu}$  のときを考える。 $\bar{t} = \bar{K}^{\bar{\nu}+1}(\bar{\nu})$  とすると、 $\bar{\nu} = (\exists x_i^{\xi} \varphi(x_i))$ ,  $\bar{\nu} \in \text{Sentence}^{\bar{\alpha}}$ ,  $\bar{T}(\bar{\nu}) = 1$ 。さらに、 $\bar{t} \in \text{Term}_{\xi}^{\bar{\alpha}}$  であり、 $\bar{T}(\varphi(\bar{t})) = 1$  である。故に (T) により、

$$T(\pi(\varphi(\bar{t}))) = T(\pi(\varphi)(\pi(\bar{t}))) = 1.$$

さらに  $\pi(\bar{t}) \in \text{Term}_{\pi(\xi)}^{\alpha}$  である。ところで、 $\pi(\bar{\nu}) = (\exists x_i^{\pi(\xi)} \pi(\varphi)(x_i)) \in \text{Sentence}^{\alpha}$  であり、 $\bar{T}(\bar{\nu}) = 1$  と (T) により  $T(\pi(\bar{\nu})) = 1$  がいえるので、 $K(\pi(\bar{\nu}))$  が定義される。そこで  $t = K(\pi(\bar{\nu})) = K(\nu)$  とすると、 $t \in H \subseteq \text{range}(\pi \upharpoonright \bar{\nu})$ 。そこで、 $t = \pi(s)$ ,  $s < \bar{\nu}$  とする。

$t = \pi(\bar{t})$  をいう。まず、 $t$  の最小性から、 $t \leq \pi(\bar{t})$  である。また、 $t$  の性質と (T) により

$$s \in \text{Term}_{\xi}^{\bar{\alpha}}, \quad \bar{T}(\varphi(s)) = 1$$

だから、 $t$  の最小性により、 $\bar{t} \leq s$ 。従って  $\pi(\bar{t}) \leq \pi(s) = t$ 。これで  $t = \pi(\bar{t})$  がいえた。さて、 $t < \nu < \nu+1$  だから、 $t = K^{\nu+1}(\nu) = K^{\nu+1}(\pi(\bar{\nu}))$ 。故に

$$\pi(\bar{K}^{\bar{\nu}+1}(\bar{\nu})) = \pi(\bar{t}) = t = K^{\nu+1}(\pi(\bar{\nu})).$$

さて、 $K^{\nu+1}(\pi(\bar{\nu})) = t$  とすると、上の議論により、 $\bar{K}^{\bar{\nu}+1}(\bar{\nu})$  も定義できることがわかる。これで

$$\pi(\bar{K}^{\bar{\nu}+1}(\bar{\nu})) \simeq K^{\nu+1}(\pi(\bar{\nu}))$$

となるから、(K) がいえた。

3.12. 補題  $\delta \in \text{On}$ ,  $\alpha \in X \subseteq \delta$  とし、 $\pi : \bar{\delta} \rightarrow X$  を  $X$  の collapsing map とする。さらに、 $X$  は  $\mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\delta}$  の subalgebra であるとし、 $\pi(\bar{\alpha}) = \alpha$  とする。このとき、もし  $\bar{\alpha}$  が  $J$ -closed で、 $\pi \upharpoonright \bar{\alpha} = \text{id}$  であれば

$$\pi : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\delta}} \rightarrow \mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\delta} \quad \text{mono}$$

証明. まず、 $X$  は  $\mathcal{P}^{\delta}$  の subalgebra だから、CP(定理2.7.) により、

$$\pi : \bar{\delta} \rightarrow \delta \quad \text{strong } \mathcal{P}\text{-map}$$

である。今、 $\pi$ を拡張して、 $\pi(\bar{\delta}) = \delta$ としておく。

Claim A. 任意の  $\bar{\eta} \leq \bar{\delta}$  に対し、 $\text{range}(\pi \upharpoonright \bar{\eta})$  は  $\mathcal{M}_\alpha[A]^{\pi(\bar{\eta})}$  の subalgebra.

証明.  $u \in \text{range}(\pi \upharpoonright \bar{\eta})^{<\omega}$  とする。  $u = \pi(\bar{u})$ ,  $\bar{u} \in \bar{\eta}^{<\omega}$  とできる。  $F$  を  $\mathcal{M}_\alpha[A]$  の関数とし、  $y = F^{\pi(\bar{\eta})}(u)$  とする。  $y < \pi(\bar{\eta}) \leq \delta$  だから、  $y = F^\delta(u)$ . さて、  $u \in X^{<\omega}$  であり、  $X$  は  $\mathcal{M}_\alpha[A]^\delta$  の subalgebra だから、  $y \in X$ . 従って、  $y = \pi(x)$  とする  $x < \bar{\delta}$  があるが、  $y < \pi(\bar{\eta})$  により、  $x < \bar{\eta}$ . 故に

$$y = \pi(x) \in \text{range}(\pi \upharpoonright \bar{\eta})$$

となり、claim は証明された。

Claim B.  $\bar{\eta} \leq \bar{\delta}$ ,  $\bar{\alpha} \leq \bar{\eta}$  に対し、  $\sigma = \sup\{\pi(\bar{\nu}) + 1 \mid \bar{\nu} < \bar{\eta}\}$  とする。もし、

$$\pi \upharpoonright \bar{\eta} : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\eta}} \rightarrow \mathcal{M}_\alpha[A]^\sigma \quad \text{mono}$$

であれば、 $\sigma$  を  $\pi(\bar{\eta})$  にかえても

$$\pi \upharpoonright \bar{\eta} : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\eta}} \rightarrow \mathcal{M}_\alpha[A]^{\pi(\bar{\eta})} \quad \text{mono.}$$

証明. まず明らかに  $\sigma \leq \pi(\bar{\eta})$  である。今、  $\bar{F}$  を  $\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]$  の関数とし、  $F$  をそれに対応する  $\mathcal{M}_\alpha[A]$  の関数とする。  $u \in \bar{\eta}^{<\omega}$  とする。

まず、  $\bar{F}^{\bar{\eta}}(u)$  が定義されていれば、

$$\pi(\bar{F}^{\bar{\eta}}(u)) = F^\sigma(\pi(u)) = F^{\pi(\bar{\eta})}(\pi(u)).$$

そこで、  $F^{\pi(\bar{\eta})}(\pi(u))$  が定義されていたとする。  $\pi(u) \in \text{range}(\pi \upharpoonright \bar{\eta})^{<\omega}$  だから、 Claim A によって  $F^{\pi(\bar{\eta})}(\pi(u)) \in \text{range}(\pi \upharpoonright \bar{\eta})$ . 従って

$$F^{\pi(\bar{\eta})}(\pi(u)) = \pi(\bar{\nu}), \quad \bar{\nu} < \bar{\eta}$$

とできる。ところが、  $\pi(\bar{\nu}) < \pi(\bar{\nu}) + 1 \leq \sigma$  なので、  $F^{\pi(\bar{\eta})}(\pi(u)) < \sigma$  となる。それ故、  $F^\sigma(\pi(u)) = F^{\pi(\bar{\eta})}(\pi(u))$  となって  $F^\sigma(\pi(u))$  が定義されるので、  $\bar{F}^{\bar{\eta}}(u)$  も定義される。これで

$$\pi(\bar{F}^{\bar{\eta}}(u)) \simeq F^{\pi(\bar{\eta})}(\pi(u))$$

がいえた。これで claim の証明は終わった。

補題を証明するために、  $\bar{\eta} \leq \bar{\delta}$ ,  $\bar{\eta} \geq \bar{\alpha}$  に対し

$$\pi \upharpoonright \bar{\eta} : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\eta}} \rightarrow \mathcal{M}_\alpha[A]^{\pi(\bar{\eta})} \quad \text{mono}$$

を示す。  $\bar{\eta}$  についての帰納法による。

(a)  $\bar{\eta} = \bar{\alpha}$  のとき、まず  $\pi \upharpoonright \bar{\alpha} : \bar{\alpha} \rightarrow \pi(\bar{\alpha})$  strong  $\mathcal{P}$ -map である。したがって  $\mathcal{P}$  の関数  $F_0, J, C_i (i < \omega)$  については問題ない。また、 $\pi \upharpoonright \bar{\alpha} = id$  だから、補題 3.9. により、容易に

$$\pi \upharpoonright \bar{\alpha} : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\alpha}} \rightarrow \mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\pi(\bar{\alpha})} \text{ mono}$$

がわかる。

(b)  $\bar{\eta}$  が limit ordinal のとき、帰納法の仮定から、 $\bar{\nu} < \bar{\eta}, \bar{\nu} \geq \bar{\alpha}$  に対し、

$$\pi \upharpoonright \bar{\nu} : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\nu}} \rightarrow \mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\pi(\bar{\nu})} \text{ mono}$$

が成り立っている。 $\sigma = \sup\{\pi(\bar{\nu}) + 1 \mid \bar{\nu} < \bar{\eta}\}$  とすると

$$\pi \upharpoonright \bar{\eta} : \bar{\eta} \rightarrow \sigma \text{ cofinal.}$$

従って、 $\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\nu}} = (\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\eta}})^{\bar{\nu}}, \mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\pi(\bar{\nu})} = (\mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\sigma})^{\pi(\bar{\nu})}$  に注意すれば、補題 1.8. により

$$\pi \upharpoonright \bar{\eta} : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\eta}} \rightarrow \mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\sigma} \text{ mono}$$

となるので、Claim B により、

$$\pi \upharpoonright \bar{\eta} : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\nu}} \rightarrow \mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\pi(\bar{\eta})} \text{ mono.}$$

(c)  $\bar{\eta} = \bar{\nu} + 1$  のとき、帰納法の仮定から

$$\pi \upharpoonright \bar{\nu} : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\nu}} \rightarrow \mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\nu} \text{ mono}$$

である。 $\nu = \pi(\bar{\nu})$  とおいた。さて、 $\nu = J(\beta_0, \dots, \beta_{n-1})$  とする。すると  $\beta_i = C_i(\nu), \beta_i \leq \nu < \delta$  だから、 $\beta_i = C_i^{\delta}(\nu) = C_i^{\delta}(\pi(\bar{\nu})).\pi(\bar{\nu}) \in X$  だから、 $\beta_i \in X$  となる。したがって  $\beta_i = \pi(\bar{\beta}_i), \bar{\beta}_i < \bar{\delta}$  とできるが、もし  $\beta_i < \nu$  ならば、 $\bar{\beta}_i < \bar{\nu}$  となるので、 $\beta_i \in \text{range}(\pi \upharpoonright \bar{\nu})$ 。従って、補題 3.11. の記号を用いれば

$$K_{\alpha,A}(\nu) \text{ が undefined} \rightarrow H \subseteq \text{range}(\pi \upharpoonright \bar{\nu}).$$

次に  $K_{\alpha,A}(\nu)$  が定義されているとすると、 $K_{\alpha,A}(\nu) < \nu < \delta$  だから、 $K_{\alpha,A}(\nu) = K_{\alpha,A}^{\delta}(\nu). \nu \in X$  だから、 $K_{\alpha,A}(\nu) \in X$  となるので、 $K_{\alpha,A} = \pi(t), t < \bar{\delta}$  とできる。しかし、 $K_{\alpha,A}(\nu) < \nu = \pi(\bar{\nu})$  により、 $t < \bar{\nu}$  だから、

$$K_{\alpha,A}(\nu) \in \text{range}(\pi \upharpoonright \bar{\nu}).$$

従って、補題 3.11. の記号を用いると

$$K_{\alpha,A}(\nu) \text{ が defined} \rightarrow H \subseteq \text{range}(\pi \upharpoonright \bar{\nu}).$$

補題 3.11. を用いて

$$\pi \upharpoonright (\bar{\nu} + 1) : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\nu}+1} \rightarrow \mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\nu+1} \quad \text{mono}$$

即ち、

$$\pi \upharpoonright \bar{\eta} : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\eta}} \rightarrow \mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\nu+1} \quad \text{mono}$$

となる。さて、 $\nu + 1 = \sup\{\pi(\bar{\mu}) + 1 \mid \bar{\mu} < \bar{\eta}\}$  だから、Claim B により、

$$\pi \upharpoonright \bar{\eta} : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\eta}} \rightarrow \mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\pi(\bar{\eta})} \quad \text{mono.}$$

以上により、 $\bar{\eta} \leq \bar{\delta}, \bar{\eta} \geq \bar{\alpha}$  に対して

$$\pi \upharpoonright \bar{\eta} : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\eta}} \rightarrow \mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\pi(\bar{\eta})} \quad \text{mono}$$

となることがわかった。これで、 $\bar{\eta} = \bar{\delta}$  とすれば、補題が示される。

この補題 3.12. は CP に対応する。以下、これを CP として用いることがある。

3.13. 補題.  $\alpha \in \delta \in On, Y \subseteq \delta$  とする。今、 $\delta = J(\beta_0, \dots, \beta_{n-1})$  とし、 $H$  を補題 3.11. のように

$$H = \begin{cases} \{\beta_0, \dots, \beta_{n-1}\} \cap \delta, & \text{if } K_{\alpha, A}(\delta) \text{ が undefined} \\ (\{\beta_0, \dots, \beta_{n-1}\} \cap \delta) \cup \{K_{\alpha, A}(\delta)\}, & \text{if } K_{\alpha, A}(\delta) \text{ が defined.} \end{cases}$$

とする。 $X = \mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\delta}(Y \cup H)$  とし、 $\alpha \in X$  と仮定する。さらに、 $\bar{\alpha} \in On$  が  $J$ -closed で、 $\bar{\alpha} = X \cap \alpha$  であれば

$$\delta \cap \mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\delta+1}(Y \cup \{\delta\}) \subseteq X$$

である。

証明. まず、 $\pi : \bar{\delta} \rightarrow X$  を  $X$  の collapsing map とする。すると、 $\pi \upharpoonright \bar{\alpha} = id, \pi(\bar{\alpha}) = \alpha$  であるから、補題 3.12. により、 $\pi$  は、

$$\pi : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\delta}} \rightarrow \mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\delta} \quad \text{mono}$$

である。さらに、 $H \subseteq X = \text{range}(\pi)$  であるから、補題 3.11. により、 $\pi$  を  $\pi(\bar{\delta}) = \delta$  として拡張したもの

$$\pi : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\delta}+1} \rightarrow \mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\delta+1} \quad \text{mono}$$

となっている。

今、 $u \in \text{range}(\pi)^{<\omega}$  とする。 $u = \pi(\bar{u}), \bar{u} \in (\bar{\delta} + 1)^{<\omega}$  とできる。そこで  $F$  を  $\mathcal{M}_{\alpha}[A]$  の関数とし、 $\bar{F}$  をそれに対応する  $\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]$  の関数とする。 $F^{\delta+1}(u) = F^{\delta+1}(\pi(\bar{u}))$  が定義されていれば、 $\bar{F}^{\bar{\delta}+1}(\bar{u})$  も定義されている。 $\bar{y} = \bar{F}^{\bar{\delta}+1}(\bar{u})$  とする。このとき、 $\pi(\bar{y}) = F^{\delta+1}(\pi(\bar{u}))$  だから、 $F^{\delta+1}(u) \in \text{range}(\pi)$ 。このことから、 $\text{range}(\pi)$  は  $\mathcal{M}_{\alpha}[A]^{\delta+1}$  の subalgebra になることがわかる。



さて、 $Y \cup \{\delta\} \subseteq X \cup \{\delta\} = \text{range}(\pi)$  により

$$\mathcal{M}_\alpha[A]^{\delta+1}(Y \cup \{\delta\}) \subseteq \mathcal{M}_\alpha[A]^{\delta+1}(\text{range}(\pi))$$

であるが、 $\text{range}(\pi)$  が  $\mathcal{M}_\alpha[A]^{\delta+1}$  の subalgebra なので

$$\mathcal{M}_\alpha[A]^{\delta+1}(\text{range}(\pi)) = \text{range}(\pi).$$

従って、

$$\mathcal{M}_\alpha[A]^{\delta+1}(Y \cup \{\delta\}) \subseteq \text{range}(\pi) = X \cup \{\delta\}.$$

故に  $\delta$  との共通部分をとって

$$\delta \cap \mathcal{M}_\alpha[A]^{\delta+1}(Y \cup \{\delta\}) \subseteq X.$$

この補題 3.13. は FP に相当する。

## II. $(\omega_1, 1)$ -Morass

### 1. Admissible Sets, $L_\xi[A]$ の性質

最初に、準備として、admissible sets と、 $L_\xi[A]$  の性質について述べておくことにする。証明は省くか、概略にとどめる。詳しくは [1], [3] を参照のこと。

#### 1.1. 定義・KP の公理系

##### (1) Extensionality

$$\forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b) \rightarrow a = b$$

##### (2) Foundation

$$\exists x \varphi(x) \rightarrow \exists x[\varphi(x) \wedge \forall y \in x \neg \varphi(y)]$$

ここで、 $\varphi(x)$  は、自由な  $y$  が現れない formula である。

##### (3) Pair

$$\exists a(x \in a \wedge y \in a)$$

##### (4) Union

$$\exists b \forall y \in a \forall x \in y(x \in b)$$

##### (5) Infinity

$$\exists x(x \neq 0 \wedge x \text{ is a limit ordinal})$$

##### (6) $\Delta_0$ -Separation

$$\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x))$$

ここで、 $\varphi(x)$  は、自由な  $y$  が現れない  $\Delta_0$ -formula である。

(7)  $\Delta_0$ -Collection

$$\forall x \in a \exists y \varphi(x, y) \rightarrow \exists z \forall x \in a \exists y \in z \varphi(x, y)$$

ここで、 $\varphi(x, y)$  は自由な  $z$  が現れない  $\Delta_0$ -formula である。

これらの (1)-(7) が KP の公理系である。尚、(2),(6),(7) は、公理の Schema である。

KP からさまざまな結果が導かれるが、ここでは次のことに注意しておく。

1.2. 定理 ( $\Sigma_1$ -Recursion).  $G$  が  $\Sigma_1$ -定義可能な関数であるとき、 $\Sigma_1$ -定義可能な関数  $F$  で

$$\forall x \in \text{dom}(F)[F(x) = G(x, F \upharpoonright x)]$$

をみたすものが存在する。

1.3. 定義. Amenable Set, Admissible Set, Admissible Ordinal.

(1) 集合  $M$  が amenable とは、 $M$  が transitive であって、次の条件をみたしていることである：

(i)  $x, y \in M \rightarrow \{x, y\} \in M$ .

(ii)  $x \in M \rightarrow \bigcup x \in M$ .

(iii)  $\omega \in M$ .

(iv)  $x, y \in M \rightarrow x \times y \in M$ .

(v)  $R \subseteq M$  が  $M$  上  $\Delta_0$ -定義可能であれば、 $\forall x \in M (R \cap x \in M)$ .

(2) 集合  $M$  が admissible であるとは、 $M$  が amenable であって、 $M$  が KP のモデルになっていることをいう。

(3)  $\alpha \in On$  が admissible であるとは、ある admissible set  $M$  に対して

$$\alpha = M \cap On$$

となることをいう。

1.4. 補題.  $\xi > \omega$  が limit ordinal であれば、 $L_\xi[A]$  は amenable である。

1.5. 補題.  $\Delta_1^{KP}$ -formula  $H(x, \alpha, a)$  で

$$H(x, \alpha, a) \text{ iff } x = L_\alpha[a]$$

となるものが存在する。

1.6. 補題. 関数  $\nu \mapsto L_\nu[A]$  は uniformly  $\Delta_1^{L_\alpha[A]}$  for limit  $\alpha > \omega$ .

1.7. 補題.  $M$  が admissible であれば、 $a \in M, \alpha \in M$  に対して

$$(L_\alpha[a])^M = L_\alpha[a]$$

1.8. 定理.  $\alpha > \omega$  が limit ordinal で、 $X \prec_1 L_\alpha[A]$  のとき

$$\pi : X \simeq L_\beta[B] \quad \text{ただし、} B = \pi[A \cap X]$$

となる  $\pi, \beta$  が一意的に存在する。

この節の最後に、一変数の  $\Delta_0$ -formula  $\text{Adm}(x)$  で

$$\text{Adm}(L_\xi[A]) \text{ iff } L_\xi[A] \text{ は admissible}$$

となるものを定める。

1.9. 定義. 集合論言語  $\mathcal{L}$  の formula の Gödel 集合.

formula  $\varphi$  の Gödel 集合を  $\ulcorner \varphi \urcorner$  で表すことにする。

(i)  $\ulcorner v_i = v_j \urcorner = \langle 0, i, j \rangle$ ,  $\ulcorner v_i \in v_j \urcorner = \langle 1, i, j \rangle$

(ii)  $\varphi, \psi$  が formulas のとき

$$\ulcorner \varphi \wedge \psi \urcorner = \langle 2, \ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner \rangle$$

$$\ulcorner \neg \varphi \urcorner = \langle 3, \ulcorner \varphi \urcorner \rangle$$

$$\ulcorner \exists v_i \varphi \urcorner = \langle 4, i, \ulcorner \varphi \urcorner \rangle$$

1.10. 定義.  $V_\omega = \{x \mid \text{rank}(x) < \omega\}$  とする。

(1)  $Fm(w, f, n) \equiv n \in \omega \wedge f \text{ は function} \wedge \text{dom}(f) = n + 1 \wedge f(n) = w \wedge \forall k \leq n R(k, f)$ .

ただし

$$R(k, f) \equiv \exists i, j \in \omega (f(k) = \langle 0, i, j \rangle \vee f(k) = \langle 1, i, j \rangle)$$

$$\vee \exists l, m < k (f(k) = \langle 2, f(l), f(m) \rangle \vee f(k) = \langle 3, f(l) \rangle)$$

$$\vee \exists l < k \exists i \in \omega (f(k) = \langle 4, i, f(l) \rangle)$$

(2)  $Fm_0(w, f, n) \equiv n \in \omega \wedge f \text{ は function} \wedge \text{dom}(f) = n + 1 \wedge f(n) = w \wedge \forall k \leq n R_0(k, f)$ .

ただし

$$R_0(k, f) \equiv \exists i, j \in \omega (f(k) = \langle 0, i, j \rangle \vee f(k) = \langle 1, i, j \rangle)$$

$$\vee \exists l, m < k (f(k) = \langle 2, f(l), f(m) \rangle \vee f(k) = \langle 3, f(l) \rangle)$$

$$\vee \exists l < k \exists m < l \exists i, j \in \omega (f(k) = \langle 4, i, f(l) \rangle \wedge f(l) = \langle 2, \langle 1, i, j \rangle, f(m) \rangle).$$

(3)  $\widetilde{Fm}(w, f, n) \equiv Fm(w, f, n) \wedge \forall m < n \neg \exists g \in V_\omega Fm(w, g, m)$ .

(4)  $\widetilde{Fm}_0(w, f, n) \equiv Fm_0(w, f, n) \wedge \forall m < n \neg \exists g \in V_\omega Fm_0(w, g, m)$ .

(5)  $Fmla(w) \equiv \exists n \in \omega \exists f \in V_\omega \widetilde{Fm}(w, f, n)$ .

(6)  $Fmla_0(w) \equiv \exists n \in \omega \exists f \in V_\omega \widetilde{Fm}_0(w, f, n)$ .

$Fmla(w), Fmla_0(w)$  は、それぞれ、 $w$  が、formula,  $\Delta_0$ -formula の Gödel 集合であることを表している。

## 1.11. 定義.

$$Sat(w, u, b) \equiv \exists g \exists f \in V_w \exists n, r \in \omega [\widetilde{Fm}(w, f, n) \wedge r = rank(w) \\ \wedge g \text{ は function } \wedge dom(g) = n + 1 \wedge b \in g(n) \wedge \forall k \leq n S(k, g, r, f, u)]$$

ここで

$$\begin{aligned} S(k, g, r, f, u) \equiv & \exists i, j \in \omega [(f(k) = \langle 0, i, j \rangle \wedge g(k) = \{a \in {}^r u \mid a(i) = a(j)\}) \\ & \vee (f(k) = \langle 1, i, j \rangle \wedge g(k) = \{a \in {}^r u \mid a(i) \in a(j)\})] \\ & \vee \exists l, m < k [f(k) = \langle 2, f(l), f(m) \rangle \wedge g(k) = g(l) \cap g(m)] \\ & \vee \exists l < k [f(k) = \langle 3, f(l) \rangle \wedge g(k) = {}^r u - g(l)] \\ & \vee \exists l < k \exists i \in \omega [f(k) = \langle 4, i, f(l) \rangle \\ & \wedge g(k) = \{a \in {}^r u \mid \exists x \in u (a(i/x) \in g(l))\}] \end{aligned}$$

尚、 $a(i/x)$  は、 $dom(a(i/x)) = dom(a)$  なる関数で、 $j \in dom(a)$  に対して

$$a(i/x)(j) = \begin{cases} a(j), & \text{if } j \neq i \\ x, & \text{if } j = i. \end{cases}$$

1.12. 定理.  $\varphi(v_{i_1}, \dots, v_{i_n})$  が  $\mathcal{L}$  の formula で、示されたものの以外に自由変数を含まないとし、 $w = \ulcorner \varphi \urcorner$  とする。  $r = rank(w)$ ,  $b \in {}^r u$  ならば

$$Sat(w, u, b) \text{ iff } u \models \varphi(b(i_1), \dots, b(i_n)).$$

注意. 1.9. から 1.12. については [8] を参照のこと。

1.13. 補題.  $\xi > \omega$  が limit ordinal のとき、 $Fmla_0(w)$  なる  $w$  と  $b \in L_\xi[A]$  に対して

$$Sat(w, L_\xi[A], b) \text{ iff } \exists u \in L_\xi[A] [u \text{ は transitive } \wedge range(b) \subseteq u \wedge Sat^{L_\xi[A]}(w, u, b)]$$

証明.  $w = \ulcorner \varphi \urcorner$  とする。  $\varphi$  は  $\Delta_0$ -formula である。さらに、 $v_{i_1}, \dots, v_{i_n}$  が自由変数として現れているとする。まず、 $Sat(w, L_\xi[A], b)$  とすると

$$L_\xi[A] \models \varphi(b(i_1), \dots, b(i_n))$$

ところが、 $\varphi$  が  $\Delta_0$ -formula であるから、 $b(i_1), \dots, b(i_n) \in u$  なる transitive set  $u$  に対しては

$$u \models \varphi(b(i_1), \dots, b(i_n)).$$

今、 $b \in L_\zeta[A]$ となるように $\zeta < \xi$ をとり、 $u = L_\zeta[A]$ とおけば

$$u \in L_\xi[A], \quad u \text{ は transitive, } \text{range}(b) \subseteq u$$

であり、さらに

$$u \models \varphi(b(i_1), \dots, b(i_n))$$

である。故に  $Sat(w, u, b)$  となるが、 $u \in L_\xi[A]$ であるから、 $Sat$  の定義式を調べれば

$$Sat^{L_\xi[A]}(w, u, b)$$

となることが容易にわかる。故に

$$\exists u \in L_\xi[A] [u \text{ は transitive} \wedge \text{range}(b) \subseteq u \wedge Sat^{L_\xi[A]}(w, u, b)]$$

となる。逆は殆ど明らかである。今の議論を逆にたどれば良い。

この補題によって、 $Sat(w, L_\xi[A], b)$  を  $\Delta_0$ -formula と考えても良いことがわかる。

1.14.  $\xi > \omega$  が limit ordinal のとき、“ $L_\xi[A] \models \Delta_0\text{-Collection}$ ” は  $\Delta_0$ -formula で表される。

証明. 次のような formula を考えれば良い:

$$\begin{aligned} \forall w \in L_\xi[A] \forall b \in L_\xi[A] \forall a \in L_\xi[A] [Fmla_0(w) \wedge \forall x \in a \exists y \in L_\xi[A] Sat(w, L_\xi[A], b(0/x, 1/y)) \\ \rightarrow \exists z \in L_\xi[A] \forall x \in a \exists y \in z Sat(w, L_\xi[A], b(0/x, 1/y))] \end{aligned}$$

ここで、 $b(0/x, 1/y)$  は定義 1.11. の  $a(i/x)$  と同様に定義されるものである。補題 1.13.. によって、これは  $\Delta_0$ -formula で表されることがわかる。

1.15. 補題. “ $L_\xi[A]$  は admissible” は  $\Delta_0$ -formula で表される。

証明.  $L_\xi[A]$  は admissible iff  $\xi > \omega \wedge \xi$  は limit  $\wedge L_\xi[A] \models \Delta_0\text{-Collection}$  であるが

$$\begin{aligned} \xi > \omega \quad \text{iff} \quad L_\xi[A] \models \exists x (x \neq 0 \wedge x \text{ は limit ordinal}) \\ \xi \text{ は limit ordinal} \quad \text{iff} \quad L_\xi[A] \models \forall \alpha \exists \beta (\alpha < \beta) \end{aligned}$$

であるから、補題 1.14. により、明らかである。

1.16. 定義.  $Adm(x)$  は 1.13. から 1.15. のようにして作られた  $\Delta_0$ -formula で

$$Adm(L_\xi[A]) \quad \text{iff} \quad L_\xi[A] \text{ は admissible}$$

をみたすものである。

## 2. $(\omega_1, 1)$ -Morass の定義と、存在証明の準備

まず、 $(\omega_1, 1)$ -Morass の定義をする。[3]の定義をそのまま用いる。

2.1. 定義. まず、 $\alpha \in On$  が adequate であるとは、 $\alpha$  が admissible であるか、それとも、 $\alpha$  が admissible ordinals の極限になっていることをいう。即ち、

$$\alpha \text{ が admissible } \vee \forall \beta < \alpha \exists \gamma < \alpha (\beta \leq \gamma \wedge \gamma \text{ は admissible})$$

となることである。

さて、今、 $S$  を、adequate ordinals の対  $(\alpha, \nu)$  の集合で、条件

(i)  $\alpha < \nu < \omega_2$  &  $\alpha \leq \omega_1$

(ii)  $(\alpha, \nu), (\alpha', \nu') \in S$  &  $\alpha < \alpha' \rightarrow \nu < \nu'$

をみたすものとする。このとき、次のように定義する。

$$S^0 = \{\alpha \leq \omega_1 \mid \exists \nu (\alpha, \nu) \in S\}$$

$$S^1 = \{\nu < \omega_2 \mid \exists \alpha (\alpha, \nu) \in S\}$$

$$S = S^0 \cap S^1$$

$$S_\alpha = \{\nu \in S^1 \mid (\alpha, \nu) \in S\}, \quad \text{for } \alpha \in S^0$$

$$\alpha_\nu = \text{the unique } \alpha \in S^0 \text{ such that } (\alpha, \nu) \in S, \quad \text{for } \nu \in S^1$$

$\alpha_\nu$  が一意的なのは、 $S$  についての条件 (ii) によることに注意しておく。

さらに、 $\prec$  を tree ordering on  $S^1$  で

$$\nu \prec \tau \rightarrow \alpha_\nu < \alpha_\tau$$

をみたすものとし、 $(\pi_{\nu\tau} \mid \nu \prec \tau)$  を、写像  $\pi_{\nu\tau} : (\nu + 1) \rightarrow (\tau + 1)$  の commutative system とする。そこで、

$$\mathfrak{M} = (S, S, \prec, (\pi_{\nu\tau})_{\nu \prec \tau})$$

とする。 $\mathfrak{M}$  が、次の (M0) から (M7) をみたすとき、 $\mathfrak{M}$  は  $(\omega_1, 1)$ -morass (以下、単に morass) であるという。

(M0) (a)  $\alpha \in S^0$  に対し、 $S_\alpha$  は closed in  $\sup(S_\alpha)$  であり、 $\alpha < \omega_1$  であれば、 $\sup(S_\alpha) \in S_\alpha$ .

(b)  $\omega_1 = \max(S^0) = \sup(S^0 \cap \omega_1)$  であり、 $\omega_2 = \sup(S_{\omega_1})$

(M1)  $\nu \prec \tau$  であれば、

$$\pi_{\nu\tau} \upharpoonright \alpha_\nu = id \upharpoonright \alpha_\nu, \quad \pi_{\nu\tau}(\alpha_\nu) = \alpha_\tau, \quad \pi_{\nu\tau}(\nu) = \tau$$

であり、 $\pi_{\nu\tau}$  は  $S_{\alpha_\nu} \cap (\nu + 1)$  を  $S_{\alpha_\tau} \cap (\tau + 1)$  の中へ、順序を保存して写し、しかも次の (i)-(iii) をみたす。

(i)  $\gamma$  が  $S_{\alpha_\nu}$  の最小元ならば、 $\pi(\gamma)$  は  $S_{\alpha_\tau}$  の最小元。

- (ii)  $S_{\alpha_\nu} \cap (\nu + 1)$  の中で、 $\gamma$  が  $\beta$  の直後元であれば、 $S_{\alpha_\tau} \cap (\tau + 1)$  の中で  $\pi(\gamma)$  は  $\pi(\beta)$  の直後元。  
 (iii)  $\gamma$  が  $S_{\alpha_\nu} \cap (\nu + 1)$  の limit point であれば、 $\pi(\gamma)$  は  $S_{\alpha_\tau} \cap (\tau + 1)$  の limit point である。

ここで、 $\pi_{\nu\tau}$  を単に  $\pi$  と書いた。

(M2)  $\bar{\tau} \prec \tau, \bar{\nu} \in S_{\alpha_\tau} \cap \bar{\tau}$  とし、 $\nu = \pi_{\bar{\tau}\tau}(\bar{\nu})$  とする。このとき、

$$\bar{\nu} \prec \nu \text{ であり、 } \pi_{\bar{\nu}\nu} \upharpoonright \bar{\nu} = \pi_{\bar{\tau}\tau} \upharpoonright \bar{\nu}$$

(M3)  $\tau \in S^1$  に対して、 $\{\alpha_\nu \mid \nu \prec \tau\}$  は closed in  $\alpha_\tau$ 。

(M4) もし、 $\tau$  が  $S_{\alpha_\tau}$  の極大元でないならば、 $\{\alpha_\nu \mid \nu \prec \tau\}$  は unbounded in  $\alpha_\tau$ 。

(M5) もし、 $\{\alpha_\nu \mid \nu \prec \tau\}$  が unbounded in  $\alpha_\tau$  ならば

$$\tau = \bigcup_{\nu \prec \tau} \pi_{\nu\tau} \text{ “ } \nu$$

(M6)  $\bar{\nu}$  が limit point of  $S_{\alpha_{\bar{\nu}}}$  で、 $\bar{\nu} \prec \nu$  とし、さらに  $\nu' = \sup(\pi_{\bar{\nu}\nu} \text{ “ } \bar{\nu})$  とすると、

$$\bar{\nu} \prec \nu', \quad \pi_{\bar{\nu}\nu'} \upharpoonright \bar{\nu} = \pi_{\bar{\nu}\nu} \upharpoonright \bar{\nu}$$

(M7)  $\bar{\nu}$  が  $S_{\alpha_{\bar{\nu}}}$  の limit point で、 $\bar{\nu} \prec \nu, \nu = \sup(\pi_{\bar{\nu}\nu} \text{ “ } \bar{\nu})$  とする。もし

$$\theta \in \bigcap_{\bar{\tau} \in S_{\alpha_{\bar{\nu}}} \cap \bar{\nu}} \{\alpha_\eta \mid \bar{\tau} \preceq \eta \preceq \pi_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\tau})\}$$

であれば、

$$\exists \eta \in S_\theta(\bar{\nu} \preceq \eta \preceq \nu)$$

((M2) により、 $\bar{\tau} \in S_{\alpha_{\bar{\nu}}} \cap \bar{\nu} \rightarrow \bar{\tau} \prec \pi_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\tau})$  であることに注意する。)

これで、morass の定義は終った。この節の残りで、morass の存在証明のための準備をする。

## 2.2. 定義.Q-submodel.

$\nu$  を limit ordinal とし、 $X \subseteq L_\nu[A]$  とする。 $X$  が  $L_\nu[A]$  の Q-submodel であるとは、任意の  $\Sigma_1$ -formula  $\varphi(v_0, v_1, \dots, v_n)$  と任意の  $x_1, \dots, x_n \in X$  に対して、

$$X \models \forall \beta \exists \gamma > \beta \varphi(\gamma, x_1, \dots, x_n) \text{ iff } L_\nu[A] \models \forall \beta \exists \gamma > \beta \varphi(\gamma, x_1, \dots, x_n)$$

が成り立つことと定める。このとき、 $X \prec_Q L_\nu[A]$  と書く。

## 2.3. 補題. $X \prec_Q L_\nu[A]$ であれば、 $X \prec_1 L_\nu[A]$ .

証明.  $\psi(v_1, \dots, v_n)$  を  $\Sigma_1$ -formula とし、 $x_1, \dots, x_n \in X$  とする。

$$\varphi(v_0, v_1, \dots, v_n) \equiv v_0 = v_0 \wedge \psi(v_1, \dots, v_n)$$

とすると、 $\varphi$  は  $\Sigma_1$  と考えて良い。また、 $\nu$  は limit ordinal だから

$$L_\nu[A] \models \forall \beta \exists \gamma > \beta (\gamma = \gamma).$$

従って、 $X \models \forall \beta \exists \gamma > \beta (\gamma = \gamma)$  である。故に

$$\begin{aligned} X \models \psi(x_1, \dots, x_n) &\text{ iff } X \models \forall \beta \exists \gamma > \beta \varphi(\gamma, x_1, \dots, x_n) \\ &\text{ iff } L_\nu[A] \models \forall \beta \exists \gamma > \beta \varphi(\gamma, x_1, \dots, x_n) \\ &\text{ iff } L_\nu[A] \models \psi(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

2.4. 補題.  $\nu$  を limit ordinal とする。  $X \prec_1 L_\nu[A]$ ,  $X \cap \nu$  が cofinal in  $\nu$  であれば、 $X \prec_Q L_\nu[A]$  である。

証明.  $\varphi(v_0, v_1, \dots, v_n)$  を  $\Sigma_1$ -formula とし、 $x_1, \dots, x_n \in X$  とする。まず、

$$X \models \forall \beta \exists \gamma > \beta \varphi(\gamma, x_1, \dots, x_n)$$

と仮定し、 $\beta < \nu$  を任意にとる。  $X \cap \nu$  は cofinal in  $\nu$  だから、 $\beta \leq \beta'$  なる  $\beta' \in X \cap \nu$  がとれる。この  $\beta'$  に対して

$$X \models \exists \gamma > \beta' \varphi(\gamma, x_1, \dots, x_n)$$

よって、 $X \prec_1 L_\nu[A]$  及び  $\beta \leq \beta'$  により

$$L_\nu[A] \models \exists \gamma > \beta \varphi(\gamma, x_1, \dots, x_n)$$

従って、 $L_\nu[A] \models \forall \beta \exists \gamma > \beta \varphi(\gamma, x_1, \dots, x_n)$  となる。

逆に  $L_\nu[A] \models \forall \beta \exists \gamma > \beta \varphi(\gamma, x_1, \dots, x_n)$  と仮定する。  $\beta \in X$  とする。このとき、 $\beta \in L_\nu[A]$  だから

$$L_\nu[A] \models \exists \gamma > \beta \varphi(\gamma, x_1, \dots, x_n).$$

故に、 $X \prec_1 L_\nu[A]$  により

$$X \models \exists \gamma > \beta \varphi(\gamma, x_1, \dots, x_n)$$

となるので、

$$X \models \forall \beta \exists \gamma > \beta \varphi(\gamma, x_1, \dots, x_n)$$

である。

次に、順序数の間の関係を表すために first-order language  $\mathcal{M}$  を定める。

2.5. 定義.  $\mathcal{M}$  は、次のものから成る。

変数:  $x, y, z, x_0, x_1$  等

述語記号:  $<, =, P_{F_0}, P_J^n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ),  $P_{C_i}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ),  $P_T, P_K, \in M(\Box \cup \{ \})$ .

connectives:  $\neg, \vee$ .



quantifier:  $\exists$

括弧:  $(, )$ .

## 2.6. 定義. $\mathcal{M}$ の formula.

まず、atomic formula は次のとおりである。

$$\begin{aligned} x < y, \quad x &= y \\ P_{F_0}(x_1, x_2, y) \\ P_J^n(x_1, \dots, x_n, y) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ P_{C_i}(x, y) \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \\ P_T(x, y), \quad P_K(x, y) \\ x \in M^y(\square \cup \{z_1, \dots, z_n\}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

$\mathcal{M}$  の formula は、これらの atomic formula から作られるものである。

## 2.7. 定義. $\mathcal{M}$ の propositional formula.

$\mathcal{M}$  の atomic formulas を  $\neg$  及び  $\vee$  のみでつないだ formula のことを、特に propositional formula(prop. formula) と呼ぶことにする。即ち、quantifier が現れない formula のことである。

## 2.8. 定義. $A \subseteq \alpha \subseteq X \subseteq On$ , $\alpha' \in On$ とする。 $\mathcal{M}$ の formula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ と、 $x_1, \dots, x_n \in X$ に対して

$$(X, \alpha, A, \alpha') \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

を次のように定める。  $\varphi$  が atomic formula のときは次のとおりである。

$$\begin{aligned} (X, \alpha, A, \alpha') \models x < y & \text{ iff } x < y \text{ (順序数の大小関係)} \\ (X, \alpha, A, \alpha') \models x &= y \text{ iff } x = y \\ (X, \alpha, A, \alpha') \models P_{F_0}(x_1, x_2, y) & \text{ iff } F_0(x_1, x_2) = y \\ (X, \alpha, A, \alpha') \models P_J^n(x_1, \dots, x_n, y) & \text{ iff } J(x_1, \dots, x_n) = y \\ (X, \alpha, A, \alpha') \models P_{C_i}(x, y) & \text{ iff } C_i(x) = y \\ (X, \alpha, A, \alpha') \models P_T(x, y) & \text{ iff } T_{\alpha, A}(x) = y \\ (X, \alpha, A, \alpha') \models P_K(x, y) & \text{ iff } K_{\alpha, A}(x) = y \\ (X, \alpha, A, \alpha') \models x \in M^y(\square \cup \{z_1, \dots, z_n\}) & \text{ iff } x \in M_\alpha[A]^y(\alpha' \cup \{z_1, \dots, z_n\}) \end{aligned}$$

$\varphi$  が  $\neg\psi$  のときは、

$$(X, \alpha, A, \alpha') \models \varphi \text{ iff } \neg[(X, \alpha, A, \alpha') \models \psi]$$

$\varphi$  が  $\psi \vee \theta$  のときは

$$(X, \alpha, A, \alpha') \models \varphi \text{ iff } (X, \alpha, A, \alpha') \models \psi \text{ または } (X, \alpha, A, \alpha') \models \theta$$

$\varphi$  が  $\exists z\psi(z)$  のときは

$$(X, \alpha, A, \alpha') \models \varphi \quad \text{iff} \quad \text{ある } z \in X \text{ に対して } (X, \alpha, A, \alpha') \models \psi(z)$$

ここで、 $F_0, J, C_i, T_{\alpha, A}, K_{\alpha, A}$  は、 $M_\alpha[A]$  の関数である。

2.9. 補題.  $A \subseteq \alpha \subseteq X \subseteq Y \subseteq On$ ,  $\alpha' \in On$  とする。  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  が prop.formula のとき、 $x_1, \dots, x_n \in X$  に対して、

$$(X, \alpha, A, \alpha') \models \varphi(x_1, \dots, x_n) \quad \text{iff} \quad (Y, \alpha, A, \alpha') \models \varphi(x_1, \dots, x_n).$$

証明は容易である。

### 3. Morass の存在証明. 其一

以上の準備のもとで、この論文の目標である次の定理を証明する。

3.1. 定理.  $A \subseteq \omega_1$  とし、 $V = L[A]$  と仮定する。このとき、 $(\omega_1, 1)$ -morass が存在する。

以下で、この定理 3.1. を証明する。  $A \subseteq \omega_1$  を固定し、 $V = L[A]$  と仮定する。

### 3.2. 定義.

$$\begin{aligned} \bar{S} = \{(\alpha, \nu) \mid & \omega < \alpha \leq \omega_1 \wedge \alpha < \nu < \omega_2 \\ & \wedge \forall \beta < \nu \exists \gamma < \nu (\beta < \gamma \wedge L_\gamma[A \cap \alpha] \text{ は admissible}) \\ & \wedge L_\nu[A \cap \alpha] \models \text{"}\forall \beta < \alpha \exists f(f: \omega \rightarrow \beta \text{ onto}) \\ & \wedge \alpha \text{ は regular } \wedge \alpha \text{ は最大の cardinal"} \} \end{aligned}$$

とし、

$$\begin{aligned} \bar{S}^0 &= \{\alpha \leq \omega_1 \mid \exists \nu (\alpha, \nu) \in \bar{S}\} \\ \bar{S}^1 &= \{\nu < \omega_2 \mid \exists \alpha (\alpha, \nu) \in \bar{S}\} \\ \bar{S} &= \bar{S}^0 \cup \bar{S}^1 \\ S_\alpha &= \{\nu \in \bar{S}^1 \mid (\alpha, \nu) \in \bar{S}\}, \quad \text{for } \alpha \in \bar{S}^0 \end{aligned}$$

とする。  $\bar{S}$  は adequate ordinals の対の集合であり、 $\bar{S}^0, \bar{S}^1$  等は、定義 2.1. と同様に定義されていることに注意する。尚、 $\bar{S}_\alpha$  のみ、 $S_\alpha$  と書くことにする。

3.3. 補題.  $(\bar{\alpha}, \nu), (\alpha, \nu) \in \bar{S}$  ならば、 $\bar{\alpha} = \alpha$  である。

証明.  $\bar{\alpha} < \alpha$  とする。  $A \cap \alpha \in L_{\alpha+1}[A \cap \alpha] \subseteq L_\nu[A \cap \alpha]$  だから

$$A \cap \bar{\alpha} = A \cap \alpha \cap \bar{\alpha} \in L_\nu[A \cap \alpha]$$

である。 $\nu = \sup\{\gamma < \nu \mid L_\gamma[A \cap \alpha] \text{ は admissible}\}$  であるから、 $L_\nu[A \cap \alpha]$  の中で、 $L_\xi[A \cap \bar{\alpha}]$ ,  $\xi < \nu$  を構成することができる。即ち、 $\xi < \nu$  に対して

$$L_\xi[A \cap \bar{\alpha}] \in L_\nu[A \cap \alpha]$$

である (補題 1.7. を用いた)。故に  $L_\nu[A \cap \alpha]$  が transitive なことから

$$L_\nu[A \cap \bar{\alpha}] \subseteq L_\nu[A \cap \alpha]$$

がわかる。さて、 $\alpha \in L_\nu[A \cap \bar{\alpha}]$  だから、 $(\alpha, \nu) \in \bar{S}$  により

$$L_\nu[A \cap \bar{\alpha}] \models \alpha \text{ は regular cardinal}$$

ところが、 $\bar{\alpha} < \alpha$  だから、これは

$$L_\nu[A \cap \bar{\alpha}] \models \bar{\alpha} \text{ は最大の cardinal}$$

に反する。 $\bar{\alpha} > \alpha$  としても同様にして矛盾が導かれるので、 $\bar{\alpha} = \alpha$  である。

3.4. 定義.  $\nu \in \bar{S}^1$  に対して

$$\alpha_\nu = \text{the unique ordinal } \alpha \in \bar{S}^0 \text{ such that } (\alpha, \nu) \in \bar{S}$$

と定める。 $\alpha_\nu$  の一意性は補題 3.3. による。

3.5. 補題.  $\nu \in S_\alpha$  なら、 $\nu \leq \omega_2^{L[A \cap \alpha]}$ .

証明.  $(\alpha, \nu) \in \bar{S}$  なら

$$L_\nu[A \cap \alpha] \models \alpha \text{ は the unique uncountable cardinal}$$

であることに注意する。もし、 $\omega_2^{L[A \cap \alpha]} < \nu$  であれば

$$L_\nu[A \cap \alpha] \models \omega_1^{L[A \cap \alpha]} \text{ と } \omega_2^{L[A \cap \alpha]} \text{ は uncountable cardinals}$$

となって明らかに不合理。故に  $\nu \leq \omega_2^{L[A \cap \alpha]}$  である。

この補題によって

$$\omega_2^{L[A \cap \alpha]} \in S_\alpha \rightarrow \sup(S_\alpha) = \omega_2^{L[A \cap \alpha]}$$

がいえる。即ち、 $\omega_2^{L[A \cap \alpha]}$  は  $S_\alpha$  の最大元である。

3.6. 補題.  $\nu \in S_\alpha$  ならば、 $\nu \neq \omega_1^{L[A \cap \alpha]}$ .

証明.  $\nu = \omega_1^{L[A \cap \alpha]}$  であったとする。以下、 $L[A \cap \alpha]$  で考える。

$\alpha < \nu = \omega_1$  だから、 $|\alpha| = \omega$  である。従って  $f : \omega \rightarrow \alpha$  onto となる  $f \in L[A \cap \alpha]$  がとれる。limit ordinal  $\xi > \omega$  を大きくとり、 $f \in L_\xi[A \cap \alpha]$  とする。すると

$$L_\xi[A \cap \alpha] \models \exists f (f : \omega \rightarrow \alpha \text{ onto}).$$

である。今、

$$\alpha \cup \{\alpha, f\} \subseteq X \prec L_\xi[A \cap \alpha] \text{ \& } |X| = |\alpha \cup \{\alpha, f\}| = \omega$$

となる  $X$  をとる。定理 1.8. により

$$\pi : X \cong L_\beta[B], \quad B = \pi[A \cap \alpha \cap X] = \pi[A \cap \alpha]$$

となる  $\pi, \beta$  がある。 $\pi \upharpoonright (\alpha + 1) = id$  に注意すれば、 $B = A \cap \alpha$  であり、

$$L_\beta[A \cap \alpha] \models \exists f (f : \omega \rightarrow \alpha \text{ onto}).$$

さて、 $|X| = \omega$  により、 $|\beta| = |L_\beta[A \cap \alpha]| = \omega$  となるので、 $\beta < \omega_1$ . 従って

$$L_{\omega_1}[A \cap \alpha] \models \exists f (f : \omega \rightarrow \alpha \text{ onto}).$$

$\omega < \alpha$  なので、これは

$$L_\nu[A \cap \alpha] \models \alpha \text{ は cardinal でない}$$

を意味する。しかし、これは  $\nu \in S_\alpha$  に反するので、 $\nu \neq \omega_1^{L[A \cap \alpha]}$  となる。

3.7. 系.  $\nu \in S_\alpha, \nu \neq \omega_2^{L[A \cap \alpha]}$  ならば、 $L[A \cap \alpha] \models \neg(\nu \text{ は cardinal})$ . 従って

$$L[A \cap \alpha] \models \nu \text{ は singular.}$$

証明. 補題 3.5., 3.6. により明らかである。

3.8. 補題.  $\nu \in \bar{S}^1$  に対し、 $S_{\alpha_\nu} \cap \nu$  は uniformly  $\Sigma_1^{L_\nu[A \cap \alpha_\nu]}(\{\alpha_\nu, A \cap \alpha_\nu\})$ .

証明.  $\tau \in S_{\alpha_\nu} \cap \nu$  iff

- (1)  $\alpha_\nu < \tau$
- (2)  $\forall \beta < \tau \exists \gamma < \tau (\beta < \gamma \wedge L_\gamma[A \cap \alpha_\nu] \text{ は admissible})$
- (3)  $L_\tau[A \cap \alpha_\nu] \models \text{“}\forall \beta < \alpha_\nu \exists f (f : \omega \rightarrow \beta \text{ onto})$   
 $\wedge \alpha_\nu \text{ は regular } \wedge \alpha_\nu \text{ は最大の cardinal”}$

である。(2) は次のように書くことができる:

$$(2') \quad L_\tau[A \cap \alpha_\nu] \models \forall \beta \exists \gamma \exists x (\beta < \gamma \wedge x = L_\gamma[A \cap \alpha_\nu] \wedge \text{Adm}(x))$$

尚、 $L_\gamma[A \cap \alpha_\nu]$ の absoluteness については、補題 1.6. を用いる。すると (2') と (3) をまとめて

$$L_\tau[A \cap \alpha_\nu] \models \varphi(\alpha_\nu, A \cap \alpha_\nu)$$

と書くことができる。 $\varphi$  は (2') と (3) の formula を  $\wedge$  でつないだものである。これより

$$\tau \in S_{\alpha_\nu} \cap \nu \text{ iff } \alpha_\nu < \tau \wedge \exists z (z = L_\tau[A \cap \alpha_\nu] \wedge z \models \text{"}\varphi(\alpha_\nu, A \cap \alpha_\nu)\text{"})$$

である。 $z = L_\tau[A \cap \alpha_\nu]$  は uniformly  $\Sigma_1^{L_\nu[A \cap \alpha_\nu]}(\{A \cap \alpha_\nu\})$  だから、これで補題は示された。

3.9. 補題.  $\nu \in S_\alpha$ ,  $\nu \neq \omega_2^{L[A \cap \alpha]}$  とすると

$$\exists \delta \in On \exists p \subseteq \delta [p \text{ は有限集合} \wedge \nu \subseteq M_\alpha[A \cap \alpha]^\delta(\alpha \cup p)]$$

証明. 系 3.7. により

$$L[A \cap \alpha] \models \neg(\nu \text{ は cardinal})$$

従って、 $f \in L[A \cap \alpha]$ ,  $f: \beta \rightarrow \nu$  onto,  $\beta < \nu$  なる  $f, \beta$  がある。さて、 $\beta < \nu$  だから、

$$L_\nu[A \cap \alpha] \models \alpha \text{ は最大の cardinal}$$

により、 $\beta = \alpha$  として良い。そこで、 $f: \beta \rightarrow \nu$  onto とする。

$f = D_{A \cap \alpha}^\alpha(t)$  なる  $\text{term}^\alpha$  をとる。 $t = \hat{x}^\xi \varphi(x)$  としておく。そこで  $\delta$  を、 $\nu, t, \xi < \delta$  なる  $J$ -closed な順序数とする。すると、

$$\nu \subseteq M_\alpha[A \cap \alpha]^\delta(\alpha \cup \{t\})$$

となる。以下、これを示す。まず、 $\alpha \subseteq M_\alpha[A \cap \alpha]^\delta(\alpha \cup \{t\})$  は明らかであるので、

$$\nu - \alpha \subseteq M_\alpha[A \cap \alpha]^\delta(\alpha \cup \{t\})$$

をいう。 $\beta \in \nu - \alpha$  とすると、 $f$  が全射であるから、

$$\beta = f(\gamma), \quad \gamma < \alpha$$

とできる。故に、

$$\beta = \text{the least } x \in \nu \text{ such that } x = f(\gamma)$$

である。故に、 $s = K(\exists_x^\nu (x = t(o_\gamma)))$  とすると、 $D_{A \cap \alpha}^\alpha(s) = \beta$  となる。まず、

$$s \in M_\alpha[A \cap \alpha]^\delta(\alpha \cup \{t\})$$

をいう。ここで、 $X = M_\alpha[A \cap \alpha]^\delta(\alpha \cup \{t\})$  とおく。

$t = \hat{x}^\xi \varphi(x) \in X$ だから、 $\sim^\xi = J(0, \omega + \xi, \omega + \xi)$ を思い出せば、 $C_i$ を用いることにより、 $\omega + \xi \in X$ .  
さて、 $\gamma < \alpha$ であり、 $\alpha$ は admissible だから、

$$\omega + \gamma < \alpha \subseteq X$$

従って、 $J^\delta$ を用いれば、 $\delta$ が  $J$ -closed なので、

$$o_\gamma = \hat{x}_0^\gamma \text{Ord}(x_0) \in X$$

である。尚、 $\text{Ord}(x_0)$ に現れる quantifier は  $\exists^\gamma$ を用いる。また、 $x = t(o_\gamma)$  は

$$\exists z(z \in t \wedge z = \langle x, o_\gamma \rangle)$$

と書けるが、 $t = \hat{x}^\xi \varphi(x)$ だから、ここに現れる quantifier はすべて  $\exists^\xi$ としても良い。また、 $\omega^2 < \nu$ だから、 $\omega + \nu = \nu$ である (I.3.6. の証明を見よ)。これらのことから、 $\exists^\nu, \exists^\gamma, \exists^\xi, t, o_\gamma$ 等の、 $\exists_x^\nu(x = t(o_\gamma))$ に用いる記号は全て  $X$ に属することがわかる。故にこれらを  $J^\delta$ で組み合わせて、

$$\exists_x^\nu(x = t(o_\gamma)) \in X \subseteq \delta$$

従って

$$s = K(\exists_x^\nu(x = t(o_\gamma))) = K^\delta(\exists_x^\nu(x = t(o_\gamma))) \in X$$

となる。

さて、 $s = \hat{x}^\zeta \psi(x)$ ,  $\zeta < \nu$ とすることができる。ところで  $D_{A \cap \alpha}^\alpha(s) = \beta$ だから、 $\zeta \geq \beta$ とならねばならない。しかし、 $\zeta > \beta$ であれば、

$$o_\beta = \hat{x}^\beta \text{Ord}(x) < s, D_{A \cap \alpha}^\alpha(o_\beta) = \beta$$

となるから、 $s$ の最小性に反する。したがって  $\zeta = \beta$ でなければならないので

$$s = \hat{x}^\beta \psi(x) \in X$$

従って、 $t$ のときと同様にして、 $\omega + \beta \in X$ を得る。ところが、 $\beta \geq \alpha > \omega^2$ だから、 $\omega + \beta = \beta$ . 故に  $\beta \in X$ となって、

$$\nu \subseteq X = M_\alpha[A \cap \alpha]^\delta(\alpha \cup \{t\})$$

となる。

3.10. 定義.  $D_\nu$ と  $p_\nu$

$\nu \in \bar{S}^1, \nu \neq \omega_2^{L[A \cap \alpha_\nu]}$ に対し

$$D_\nu = \min\{\delta \mid \nu \leq \delta \wedge \exists p \subseteq \delta [p \text{は有限} \wedge \alpha_\nu \in M_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^\delta(\alpha_\nu \cup p) \\ \wedge \nu \cap M_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^\delta(\alpha_\nu \cup p) \text{は cofinal in } \nu]\}.$$

$p_\nu = \text{the } <^* \text{-least } p \subseteq D_\nu \text{ such that}$

$$p \text{は有限} \wedge \alpha_\nu \in M_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^\delta(\alpha_\nu \cup p) \\ \wedge \nu \cap M_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^\delta(\alpha_\nu \cup p) \text{は cofinal in } \nu.$$

と定める。尚、 $<^*$ は $[On]^{<\omega} = \{p \mid p \subseteq On \wedge p \text{ は有限} \}$  上の整列順序で、

$$p <^* q \text{ iff } \exists \alpha [p - \alpha = q - \alpha \wedge q \cap \alpha \neq \emptyset \\ \wedge (p \cap \alpha = \emptyset \vee \max(p \cap \alpha) < \max(q \cap \alpha))]$$

と定められるものである。

$D_\nu, p_\nu$ の性質を調べておく。

3.11. 補題.  $D_\nu$ は limit ordinal である。

証明. まず、明らかに  $\nu \leq D_\nu$  である。今、 $D_\nu = \delta + 1$  とする。 $\nu$ は limit ordinal だから、 $\nu \leq \delta$  である。I の補題 3.13. において、 $\alpha = \alpha_\nu, Y = \alpha_\nu \cup (p_\nu \cap \delta)$  とし、 $A$  を  $A \cap \alpha_\nu$  とすると

$$\delta \cap \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{D_\nu}(\alpha_\nu \cup p_\nu) \subseteq \delta \cap \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{\delta+1}(Y \cup \{\delta\}) \\ \subseteq \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^\delta(Y \cup H)$$

であり、 $Y \cup H = \alpha_\nu \cup ((p_\nu \cap \delta) \cup H)$  である。さらに、 $(p_\nu \cap \delta) \cup H \subseteq \delta$  であり、これは有限集合である。 $\nu \leq \delta$  だから

$$\nu \cap \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{D_\nu}(\alpha_\nu \cup p_\nu) \subseteq \nu \cap \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^\delta(\alpha_\nu \cup (p_\nu \cap \delta) \cup H)$$

しかし、これは  $D_\nu$  の最小性に反するので、 $D_\nu$  は limit ordinal でなければならない。

3.12. 補題.  $D_\nu = \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{D_\nu}(\alpha_\nu \cup p_\nu)$

証明.  $\pi : \delta \rightarrow \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^\delta(\alpha_\nu \cup p_\nu)$  を collapsing map とする。CP(I. 補題 3.12.) により、 $\alpha = \alpha_\nu$  とおくと

$$\pi : \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^\delta \rightarrow \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\nu} \quad \text{mono}$$

$p = \pi^{-1}[p_\nu]$  とすると、

$$\delta = \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^\delta(\alpha_\nu \cup p)$$

である。

Claim.  $\nu \subseteq \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\nu}(\alpha_\nu \cup p_\nu)$ .

今、claim が証明されたと仮定すると、 $\pi \upharpoonright \nu = id$  だから

$$\alpha < \nu \subseteq \delta = \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^\delta(\alpha_\nu \cup p)$$

故に  $D_\nu$  の最小性から  $\delta = D_\nu$ 。また、明らかに  $p \leq^* p_\nu$  だから、これも  $p_\nu$  の最小性から  $p = p_\nu$ 。これで

$$D_\nu = \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\nu}(\alpha_\nu \cup p_\nu)$$

がいえる。そこで、claim を証明する。

$\bar{\nu} \leq \delta$  を  $\pi \upharpoonright \bar{\nu} : \bar{\nu} \rightarrow \nu$  が cofinal になるような最小の順序数とする。明らかに  $\alpha < \bar{\nu} \leq \nu$ 。また、 $\bar{\nu}$  は limit ordinal である。I の補題 1.7., 1.8. により

$$\pi \upharpoonright \bar{\nu} : \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\bar{\nu}} \rightarrow \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^\nu \quad \text{mono}$$

特に、

$$\pi \upharpoonright \bar{\nu} : \bar{\nu} \rightarrow \nu \quad \text{strong } \mathcal{P}\text{-map}$$

である。 $\nu$  は  $J$ -closed だから、 $\bar{\nu}$  も  $J$ -closed になる。よって  $\pi \upharpoonright \bar{\nu}$  を拡張して、

$$(1) \quad \hat{\pi} : L_{\bar{\nu}}[A \cap \alpha] \prec_1 L_\nu[A \cap \alpha]$$

$$\hat{\pi}(D_{A \cap \alpha}^\alpha(t)) = D_{A \cap \alpha}^\alpha(\pi(t)) \quad \text{for } t \in \text{Term}_{\bar{\nu}}^\alpha$$

を得る。特に、 $t = o_\beta = \hat{x}^\beta \text{Ord}(x)$  とすると、 $\pi(t) = o_{\pi(\beta)} = \hat{x}^{\pi(\beta)} \text{Ord}(x)$  だから、

$$\hat{\pi}(\beta) = \pi(\beta), \quad \beta < \bar{\nu}$$

である。

さて、 $\alpha \in \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\nu}(\alpha \cup p_\nu)$  なので、明らかに  $\pi(\alpha) = \alpha$  である。次に、 $\bar{\beta} < \bar{\nu}$  に対して

$$(2) \quad \pi(\bar{\beta}) \subseteq \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\nu}(\alpha \cup p_\nu)$$

である。これを示すために、 $\beta = \pi(\bar{\beta})$  とおくと、 $\beta < \nu$  だから

$$L_\nu[A \cap \alpha] \models \exists f(f : \alpha \rightarrow \beta \text{ onto})$$

よって、(1) により、 $\hat{\pi}(\alpha) = \pi(\alpha) = \alpha$  に注意して

$$L_{\bar{\nu}}[A \cap \alpha] \models \exists f(f : \alpha \rightarrow \bar{\beta} \text{ onto})$$

$\bar{f} \in L_{\bar{\nu}}[A \cap \alpha]$ ,  $\bar{f} : \alpha \rightarrow \bar{\beta}$  onto とし、 $\bar{f} = D_{A \cap \alpha}^\alpha(\bar{t})$  とする。 $t = \pi(\bar{t})$  とおき、 $f = D_{A \cap \alpha}^\alpha(t) = \hat{\pi}(\bar{f})$  とすると、 $f : \alpha \rightarrow \beta$  onto である。ところで

$$t, \alpha, \beta < \nu, \quad \nu \text{ は } J\text{-closed}$$

であり、 $t, \alpha, \beta \in \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\nu}(\alpha \cup p_\nu)$  だから、補題 3.9. の証明と同様にして

$$\beta \subseteq \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\nu}(\alpha \cup p_\nu).$$

すなわち (2) がいえる。

これで

$$\nu = \bigcup_{\bar{\beta} < \bar{\nu}} \pi(\bar{\beta}) \subseteq \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\nu}(\alpha \cup p_\nu)$$

となる。



3.13. 補題.  $\nu < D_\nu$ 

証明.  $\nu \leq D_\nu$ ,  $p_\nu \subseteq D_\nu$ だから、 $\neg(p_\nu \subseteq \nu)$ をいえば良い。 $p_\nu \subseteq \nu$ と仮定して矛盾を導く。 $\nu$ は admissible ordinals の極限だから、 $p_\nu$ が有限集合であることにより、

$$\delta < \nu \leq D_\nu, p_\nu \subseteq \delta, \delta \text{ は } J\text{-closed}$$

となる順序数 $\delta$ がとれる。このとき、補題 3.12. により

$$\nu \subseteq D_\nu = M_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{D_\nu}(\alpha_\nu \cup p_\nu) = M_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^\delta(\alpha_\nu \cup p_\nu)$$

となるので、 $D_\nu$ の最小性に反する。

3.14. 補題.  $\nu, \tau \in S_\alpha$ ,  $\nu < \tau$ ならば、 $D_\nu < \tau$ .

証明.  $\alpha < \nu < \tau$ だから、

$$L_\tau[A \cap \alpha] \models \exists f(f : \alpha \rightarrow \nu \text{ onto})$$

$f \in L_\tau[A \cap \alpha]$ ,  $f : \alpha \rightarrow \nu$  onto とし、 $f = D_{A \cap \alpha}^\alpha(t)$  となる  $t \in \text{Term}_\tau^\alpha$  をとる。 $t < \tau$ である。従って、 $\nu, t < \delta < \tau$ となる  $J$ -closed な $\delta$ をとると、再び補題 3.9. の証明と同様にして、

$$\alpha < \nu \subseteq M_\alpha[A \cap \alpha]^\delta(\alpha \cup \{t\})$$

がわかるから、 $D_\nu \leq \delta < \tau$ である。

次に、 $\bar{S}^1$ 上に tree ordering  $\triangleleft$ を定める。

3.15. 定義.  $\nu, \tau \in \bar{S}^1$ に対して、 $\nu \triangleleft \tau$ を

$$\begin{aligned} \nu \triangleleft \tau \text{ iff } & \nu \neq \omega_2^{L[A \cap \alpha_\nu]} \ \& \ \tau \neq \omega_2^{L[A \cap \alpha_\tau]} \ \& \ \alpha_\nu < \alpha_\tau \\ & \& \ \exists \sigma(\sigma : D_\nu \rightarrow D_\tau \ \& \ \sigma \text{ は (i)-(viii) の条件をみたす}) \end{aligned}$$

ここで、条件 (i)-(viii) は次のとおりである。

$$(i) \ \sigma : (D_\nu, \alpha_\nu, A \cap \alpha_\nu, \alpha_\nu) \prec_{\exists \text{ prop.}} (D_\tau, \alpha_\tau, A \cap \alpha_\tau, \alpha_\tau)$$

すなわち、 $\varphi(\vec{x}, y_1, \dots, y_n)$  が言語  $\mathcal{M}$  の prop.formula であり、 $\beta_1, \dots, \beta_n \in D_\nu$  のときに

$$\begin{aligned} (D_\nu, \alpha_\nu, A \cap \alpha_\nu, \alpha_\nu) \models \exists \vec{x} \varphi(\vec{x}, \beta_1, \dots, \beta_n) \\ \text{iff } (D_\tau, \alpha_\tau, A \cap \alpha_\tau, \alpha_\tau) \models \exists \vec{x} \varphi(\vec{x}, \sigma(\beta_1), \dots, \sigma(\beta_n)) \end{aligned}$$

となることである。

$$(ii) \ \sigma \upharpoonright \alpha_\nu = id$$

$$(iii) \ \sigma(\nu) = \tau$$

$$(iv) \ \sigma(\alpha_\nu) = \alpha_\tau$$

$$(v) \sigma[p_\nu] = p_\tau$$

$$(vi) (\sigma \upharpoonright \nu)^\wedge : L_\nu[A \cap \alpha_\nu] \prec_Q L_\tau[A \cap \alpha_\tau]$$

尚、 $(\sigma \upharpoonright \nu)^\wedge$ は、 $t \in Term_\nu^{\alpha_\nu} \subseteq \nu$ に対して

$$(\sigma \upharpoonright \nu)^\wedge(D_{A \cap \alpha_\nu}^{\alpha_\nu}(t)) = D_{A \cap \alpha_\tau}^{\alpha_\tau}(\sigma(t))$$

と定められるものである。

$$(vii) (\sigma \upharpoonright \nu)^\wedge(A \cap \alpha_\nu) = A \cap \alpha_\tau$$

(viii)  $\xi \in D_\nu$ が、 $p_\nu \subseteq \xi$  &  $\alpha_\nu \in \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^\xi(\alpha_\nu \cup p_\nu)$ をみたすとき、 $\xi$ を十分大きいと言うことにする。このとき、 $\xi \in D_\nu$ が十分大きく、

$$\bar{\pi} : \bar{\gamma} \rightarrow \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^\xi(\alpha_\nu \cup p_\nu)$$

$$\pi : \gamma \rightarrow \mathcal{M}_{\alpha_\tau}[A \cap \alpha_\tau]^{\sigma(\xi)}(\alpha_\tau \cup p_\tau)$$

が共に collapsing map であれば、

$$\sigma(\bar{\gamma}) = \gamma, \quad \sigma \circ \bar{\pi}^{-1}[p_\nu] = \pi^{-1}[p_\tau]$$

3.16. 補題.  $\sigma : (D_\nu, \alpha_\nu, A \cap \alpha_\nu, \alpha_\nu) \prec_{\exists \text{ prop.}} (D_\tau, \alpha_\tau, A \cap \alpha_\tau, \alpha_\tau)$  ならば

$$\sigma : \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{D_\nu} \rightarrow \mathcal{M}_{\alpha_\tau}[A \cap \alpha_\tau]^{D_\tau} \quad \text{mono}$$

証明. 例えば、 $J^{D_\nu}$ と $J^{D_\tau}$ に対して

$$\sigma(J^{D_\nu}(\vec{\xi})) \simeq J^{D_\tau}(\sigma(\vec{\xi})), \quad \vec{\xi} < D_\nu$$

を示す。他のものについても同様である。

$\xi_1, \dots, \xi_n < D_\nu$ とし、 $\beta = J^{D_\nu}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ とすると、 $\beta < D_\nu$ であり、 $\beta = J(\xi_1, \dots, \xi_n)$ であるので

$$(D_\nu, \alpha_\nu, A \cap \alpha_\nu, \alpha_\nu) \models P_J^n(\xi_1, \dots, \xi_n, \beta)$$

であるから、 $\sigma$ でうつせば

$$(D_\tau, \alpha_\tau, A \cap \alpha_\tau, \alpha_\tau) \models P_J^n(\sigma(\xi_1), \dots, \sigma(\xi_n), \sigma(\beta))$$

即ち、 $\sigma(\beta) = J(\sigma(\vec{\xi}))$ ,  $\sigma(\beta) < D_\tau$ となるので

$$\sigma(J^{D_\nu}(\vec{\xi})) = J^{D_\tau}(\sigma(\vec{\xi})).$$

逆に、 $J^{D_\tau}(\sigma(\vec{\xi}))$  が定義されているとする。これは

$$\exists \beta < D_\tau(\beta = J(\sigma(\vec{\xi})))$$

のことであり、従って

$$(D_\tau, \alpha_\tau, A \cap \alpha_\tau, \alpha_\tau) \models \exists \beta P_J^n(\sigma(\xi_1), \dots, \sigma(\xi_n), \beta)$$

とできる。これを  $\sigma^{-1}$  でもどせば

$$(D_\nu, \alpha_\nu, A \cap \alpha_\nu, \alpha_\nu) \models \exists \beta P_J^n(\xi_1, \dots, \xi_n, \beta)$$

となる。これは、 $J^{D_\nu}(\vec{\xi})$  が定義されることを意味する。

3.17. 補題.  $\nu \triangleleft \tau$  の定義にある  $\sigma$  は、 $\nu, \tau$  に対して一意である。

証明. まず、補題 3.16. によって、

$$\sigma : M_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{D_\nu} \rightarrow M_{\alpha_\tau}[A \cap \alpha_\tau]^{D_\tau} \quad \text{mono}$$

であり、また、 $\text{dom}(\sigma) = D_\nu = M_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{D_\nu}(\alpha_\nu \cup p_\nu)$  だから、 $\sigma$  は  $\sigma \upharpoonright (\alpha_\nu \cup p_\nu)$  により定まる。しかし、 $\sigma \upharpoonright \alpha_\nu = \text{id}$ ,  $\sigma[p_\nu] = p_\tau$  だから、 $\sigma$  は一意に定まる。

3.18. 定義.  $\nu \triangleleft \tau$  の定義にある一意的な  $\sigma$  を  $\sigma_{\nu\tau}$  と書く。

3.19. 補題.  $\triangleleft$  は  $\bar{S}^1$  上の tree order である。

証明.  $\triangleleft$  が非反射的順序であることはすぐわかる。また、 $\nu \triangleleft \tau$  なら  $\alpha_\nu < \alpha_\tau$  であるから、well-founded であることも明らかである。そこで、 $\{\nu \mid \nu \triangleleft \tau\}$  が  $\triangleleft$  で全順序になっていることをいえば良い。

$\alpha = \alpha_\tau$  とし、 $\nu, \nu' \triangleleft \tau$  とする。 $\sigma = \sigma_{\nu\tau}$ ,  $\sigma' = \sigma_{\nu'\tau}$  とする。 $\sigma$  については

$$\sigma : M_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{D_\nu} \rightarrow M_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\tau} \quad \text{mono}$$

であり、 $\text{dom}(\sigma) = D_\nu = M_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{D_\nu}(\alpha_\nu \cup p_\nu)$ ,  $\sigma[\alpha_\nu \cup p_\nu] = \alpha_\nu \cup p_\tau$  であるから、

$$\text{range}(\sigma) = M_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\tau}(\alpha_\nu \cup p_\tau).$$

また、同様にして、

$$\text{range}(\sigma') = M_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\tau}(\alpha_{\nu'} \cup p_\tau)$$

である。

今、 $\alpha_\nu < \alpha_{\nu'}$ であれば、 $\text{range}(\sigma) \subseteq \text{range}(\sigma')$ だから、 $\sigma'^{-1} \circ \sigma$ が定義されるが、実は $\sigma'^{-1} \circ \sigma = \sigma_{\nu\nu'}$ となっている。 $\nu \triangleleft \nu'$ の条件のうち、(i)-(vii)は容易に確かめられるから、(viii)のみ示すことにする。 $\xi < D_\nu$ が十分大きいものとし、 $\xi' = \sigma'^{-1} \circ \sigma(\xi)$ とすると、 $\xi' < D_{\nu'}$ も十分大きい。さらに、

$$\begin{aligned}\bar{\pi} : \bar{\gamma} &\rightarrow M_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^\xi(\alpha_\nu \cup p_\nu) \\ \pi : \gamma &\rightarrow M_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma(\xi)}(\alpha \cup p_\tau) \\ \bar{\pi}' : \bar{\gamma}' &\rightarrow M_{\alpha_{\nu'}}[A \cap \alpha_{\nu'}]^{\xi'}(\alpha_{\nu'} \cup p_{\nu'})\end{aligned}$$

がそれぞれ、collapsing map であるとする。 $\sigma'(\xi') = \sigma(\xi)$ だから、 $\nu \triangleleft \tau$ 及び、 $\nu' \triangleleft \tau$ により、

$$\begin{aligned}\sigma(\bar{\gamma}) &= \gamma, \quad \sigma \circ \bar{\pi}^{-1}[p_\nu] = \pi^{-1}[p_\tau] \\ \sigma'(\bar{\gamma}') &= \gamma, \quad \sigma' \circ \bar{\pi}'^{-1}[p_{\nu'}] = \pi^{-1}[p_\tau]\end{aligned}$$

これより直ちに

$$\sigma'^{-1} \circ \sigma(\bar{\gamma}) = \bar{\gamma}', \quad (\sigma'^{-1} \circ \sigma) \circ \bar{\pi}^{-1}[p_\nu] = \bar{\pi}'^{-1}[p_{\nu'}]$$

これで、条件(viii)はいえ、 $\nu \triangleleft \nu'$ がいえる。

もし、 $\alpha_{\nu'} < \alpha_\nu$ ならば、今のものと同様にして $\sigma^{-1} \circ \sigma' = \sigma_{\nu'\nu}$ となるので、 $\nu' \triangleleft \nu$ がわかる。

今、 $\alpha_\nu = \alpha_{\nu'}$ とすると、 $\text{range}(\sigma) = \text{range}(\sigma')$ 。また、 $\sigma, \sigma'$ は共に、1対1で、順序を保存するので、

$$\begin{aligned}\sigma^{-1} \circ \sigma' : D_{\nu'} &\rightarrow D_\nu \\ \sigma'^{-1} \circ \sigma : D_\nu &\rightarrow D_{\nu'}\end{aligned}$$

も共に1対1で順序を保存する。これより、 $D_\nu = D_{\nu'}$ である。さて、もし、 $\nu \in \nu'$ であれば、補題3.14.により、 $D_\nu < \nu' < D_{\nu'}$ とならねばならぬが、これは不合理。また、 $\nu' \in \nu$ としても同様にして矛盾を生ずるから、 $\nu = \nu'$ とならねばならない。

以上により、 $\nu \triangleleft \nu', \nu = \nu', \nu' \triangleleft \nu$ のどれかが成り立つことがわかった。故に $\{\nu \mid \nu \triangleleft \tau\}$ は $\triangleleft$ で全順序となる。

3.20. 補題. $\sigma : D_\nu \rightarrow D_\tau$ が、 $\nu \triangleleft \tau$ の定義の(i)-(vii)をみたすとき、

$$(viii) \quad \text{iff} \quad (viii)'$$

である。ここで、 $(viii)'$ は(viii)において、 $\sigma(\bar{\gamma}) = \gamma, \sigma \circ \bar{\pi}^{-1}[p_\nu] = \pi^{-1}[p_\tau]$ を

$$\gamma \in \text{range}(\sigma), \quad \pi^{-1}[p_\tau] \subseteq \text{range}(\sigma)$$

に弱めたものである。

証明.(viii)  $\rightarrow$  (viii)'は明らかである。そこで、(viii)'が成り立っていると仮定し、 $\xi < D_\nu$ が十分大きいとする。さらに

$$\begin{aligned}\bar{\pi} : \bar{\gamma} &\rightarrow M_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^\xi(\alpha_\nu \cup p_\nu) \\ \pi : \gamma &\rightarrow M_{\alpha_\tau}[A \cap \alpha_\tau]^{\sigma(\xi)}(\alpha_\tau \cup p_\tau)\end{aligned}$$

が共に collapsing map であるとする。  $\bar{p} = \bar{\pi}^{-1}[p_\nu]$ ,  $p = \pi^{-1}[p_\tau]$  とおく。また (viii)' が成り立っているから、  $\delta < D_\nu$  と、有限な  $q \subseteq D_\nu$  をとり、

$$\sigma(\delta) = \gamma, \quad \sigma[q] = \pi^{-1}[p_\tau] = p$$

とできる。  $\delta = \bar{\gamma}$ ,  $q = \bar{p}$  をいえば良い。まず、  $\pi$  は collapsing map だから、CP によって、

$$\pi : \mathcal{M}_{\alpha_\tau}[A \cap \alpha_\tau]^\gamma \rightarrow \mathcal{M}_{\alpha_\tau}[A \cap \alpha_\tau]^{\sigma(\xi)} \quad \text{mono}$$

従って、  $\gamma = \mathcal{M}_{\alpha_\tau}[A \cap \alpha_\tau]^\gamma(\alpha_\tau \cup p)$ 。即ち、

$$\sigma(\delta) = \mathcal{M}_{\alpha_\tau}[A \cap \alpha_\tau]^{\sigma(\delta)}(\alpha_\tau \cup \sigma[q])$$

これは、

$$(D_\tau, \alpha_\tau, A \cap \alpha_\tau, \alpha_\tau) \models \forall z (z < \sigma(\delta) \leftrightarrow z \in M^{\sigma(\delta)}(\Box \cup \sigma[q]))$$

と書けるので、(i) により、  $\sigma^{-1}$  でもどせば

$$\delta = \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^\delta(\alpha_\nu \cup q)$$

今、  $j : \delta \rightarrow \bar{\gamma}$  を  $j(x) = \bar{\pi}^{-1} \circ \sigma^{-1} \circ \pi \circ \sigma(x)$  と定める。まず、  $j(x)$  が定義されることを確かめておく。  $x \in \delta$  であれば、  $\sigma(x) \in \sigma(\delta) = \gamma$ 。従って

$$\pi \sigma(x) \in \mathcal{M}_{\alpha_\tau}[A \cap \alpha_\tau]^{\sigma(\xi)}(\alpha_\tau \cup p_\tau)$$

ところが、  $x \in \delta = \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^\delta(\alpha_\nu \cup q)$  であるから、

$$x = \bar{F}^\delta(\vec{\beta}, q), \quad \vec{\beta} < \alpha_\nu, \quad \bar{F} \text{ は } \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu] \text{ の関数の合成}$$

と書けるので、  $F$  を、  $\bar{F}$  に対応する  $\mathcal{M}_{\alpha_\tau}[A \cap \alpha_\tau]$  の関数の合成とすると、(i) により、

$$\sigma(x) = F^{\sigma(\delta)}(\sigma(\vec{\beta}), \sigma[q]) = F^\gamma(\vec{\beta}, p)$$

従って

$$\begin{aligned} \pi \sigma(x) &= F^{\sigma(\xi)}(\vec{\beta}, p_\tau) \in \mathcal{M}_{\alpha_\tau}[A \cap \alpha_\tau]^{\sigma(\xi)}(\alpha_\tau \cup p_\tau) \\ &= \sigma[\mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^\xi(\alpha_\nu \cup p_\nu)] \end{aligned}$$

故に、  $\sigma^{-1} \pi \sigma(x)$  は定義され、

$$\sigma^{-1} \pi \sigma(x) = \bar{F}^\xi(\vec{\beta}, p_\nu) \in \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^\xi(\alpha_\nu \cup p_\nu) = \text{range}(\bar{\pi})$$

よって、 $\bar{\pi}^{-1}\sigma^{-1}\pi\sigma(x)$  は定義され、しかも、その値は  $< \bar{\gamma}$  である。これで  $j(x)$  が定義され、 $j(x) < \bar{\gamma}$  となる。また、明らかに  $j(x)$  は、 $x$  に対して一意的に定まる。これで、 $j: \delta \rightarrow \bar{\gamma}$  が定義されることがわかった。

さて、 $\bar{\pi}, \sigma, \pi$  が全て、1対1で順序保存だから、 $j: \delta \rightarrow \bar{\gamma}$  も1対1, 順序保存となる。さらに、 $j$  は onto である。これを示すために、まず、 $\bar{\pi}$  が collapsing map であるので、CP により

$$\bar{\pi}: M_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{\bar{\gamma}} \rightarrow M_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^\xi \quad \text{mono}$$

であり、それ故、 $\bar{\gamma} = M_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{\bar{\gamma}}(\alpha_\nu \cup \bar{p})$  であることに注意しておく。 $y \in \bar{\gamma}$  とすると

$$y = \bar{G}^{\bar{\gamma}}(\vec{\beta}, \bar{p}), \quad \vec{\beta} < \alpha_\nu, \quad \bar{G} \text{ は } M_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu] \text{ の関数の合成}$$

と表せる。 $z = \bar{G}^\delta(\vec{\beta}, q)$  とすると、上で  $j(x)$  が定義されることを確かめたときと同様にして、 $z < \delta$  が存在することと、 $j(z) = y$  となることがわかる。これで、 $j: \delta \rightarrow \bar{\gamma}$  が、1対1, onto で順序保存であることが示された。ゆえに、 $\delta = \bar{\gamma}, j = id$  となる。最後に、

$$\begin{aligned} j[q] &= \bar{\pi}^{-1}\sigma^{-1}\pi\sigma[q] \\ &= \bar{\pi}^{-1}\sigma^{-1}\pi[p] \\ &= \bar{\pi}^{-1}\sigma^{-1}[p_\tau] \\ &= \bar{\pi}^{-1}[p_\nu] \\ &= \bar{p} \end{aligned}$$

だから、 $j = id$  により、 $q = \bar{p}$ . 従って

$$\sigma(\bar{\gamma}) = \gamma, \quad \sigma\bar{\pi}^{-1}[p_\nu] = \pi^{-1}[p_\tau]$$

となり、(viii) がいえた。

この補題 3.20. は、次の節で用いられる。

#### 4. Morass の存在証明. 其二

4.1. 定義.  $\nu \triangleleft \tau$  となる  $\nu, \tau$  に対して、 $\pi_{\nu\tau}: (\nu+1) \rightarrow (\tau+1)$  を

$$\pi_{\nu\tau} = \sigma_{\nu\tau} \upharpoonright (\nu+1)$$

で定める。さらに、

$$\overline{\mathfrak{M}} = (\bar{S}, \bar{S}, \triangleleft, (\pi_{\nu\tau})_{\nu \triangleleft \tau})$$

とする。

注意. 前節の結果によれば、 $\triangleleft$  は  $\bar{S}^1$  上の tree ordering であり、 $(\pi_{\nu\tau})_{\nu \triangleleft \tau}$  は、写像の commutative system である。

この節では、 $\overline{\mathcal{M}}$  が、morass の公理 (M0)-(M7) をみたすことを証明する。

(M0)

(a).  $S_\alpha$  が closed in  $\sup(S_\alpha)$ , for all  $\alpha \in \bar{S}^0$  は容易に確かめられる。それで、 $\alpha \in \bar{S}^0 \cap \omega_1$  とし、 $\tau = \sup(S_\alpha)$  とする。 $\tau \in S_\alpha$  をいうためには、 $(\alpha, \tau) \in \bar{S}$  をいえば良いが、 $\tau < \omega_2$  以外は容易に確かめられるので、 $\tau < \omega_2$  のみ証明する。まず

$$L_\tau[A \cap \alpha] \models \alpha \text{ は最大の cardinal}$$

である (容易にわかる)。さて、 $S_\alpha \subseteq \omega_2$  なので、 $\tau \leq \omega_2$  は明らか。そこで、 $\tau = \omega_2$  と仮定する。すると、 $\omega_1 < \tau$  となるので、

$$L_\tau[A \cap \alpha] \models \omega_1 \text{ は cardinal}$$

しかし、 $\alpha < \omega_1$  だから、これは

$$L_\tau[A \cap \alpha] \models \alpha \text{ は最大の cardinal}$$

に反する。故に  $\tau \neq \omega_2$  であり、従って  $(\alpha, \tau) \in \bar{S}$  となる。

(b). まず、 $A \subseteq \omega_1$  だから、次のことに注意しておく。

Claim.  $\forall \xi < \omega_2 \exists \beta < \omega_2 (\beta > \xi \wedge L_\beta[A] \text{ は admissible})$

証明.  $\xi < \omega_2$  とする。 $\omega_1 \leq \xi$  として良い。

$$\begin{aligned} \xi \cup \{\xi\} &\subseteq N \subseteq L_{\omega_2}[A] \\ \langle N, A \cap N \rangle &\prec \langle L_{\omega_2}[A], A \rangle \\ |N| &= \omega_1 \end{aligned}$$

となる  $N$  がとれる。すると、 $\pi$  を  $N$  の collapsing map とすれば、

$$\pi : N \cong L_\beta[B], \quad B = \pi[A \cap N]$$

ところで、 $\pi \restriction \xi \cup \{\xi\} = id$  だから、 $\xi = \pi(\xi) \in L_\beta[B]$  となり、 $\xi < \beta$  である。さらに、 $\omega_1 \leq \xi \subseteq N$  により、

$$B = \pi[A \cap N] = \pi[A] = id[A] = A$$

従って、 $\pi^{-1} : L_\beta[A] \prec L_{\omega_2}[A]$  となるので、 $L_\beta[A]$  は admissible. さらに、 $|N| = \omega_1$  により、 $|\beta| = \omega_1$ . 従って  $\beta < \omega_2$  である。これで claim は証明された。

さて、この claim は

$$L_{\omega_2}[A] \models \forall \xi \exists \beta \exists x (\beta > \xi \wedge x = L_\beta[A] \wedge Adm(x))$$

とも書ける。すると、claim の証明中の  $\pi, N, L_\beta[A]$  については、

$$\pi : \langle N, A \rangle \cong \langle L_\beta[A], A \rangle$$

であり、 $A = A \cap \omega_1 \in L_{\omega_1+1}[A] \subseteq L_\beta[A]$  であるから、 $\pi^{-1}(A) = A$  がわかる。故に、

$$L_\beta[A] \models \forall \xi \exists \gamma \exists x (\gamma > \xi \wedge x = L_\gamma[A] \wedge \text{Adm}(x))$$

となるから、このことより、 $\beta \in S_{\omega_1}$  が容易にわかる。従って、これより

$$\omega_1 = \max(\bar{S}^0), \quad \omega_2 = \sup(S_{\omega_1})$$

となる。

今、 $\omega_1 = \sup(\bar{S}^0 \cap \omega_1)$  をいうために、 $\xi < \omega_1$  とする。 $\omega \leq \xi$  として良い。

$$\begin{aligned} \xi \cup \{\xi\} &\subseteq N \subseteq L_{\omega_2}[A] \\ \langle N, A \cap N \rangle &\prec \langle L_{\omega_2}[A], A \rangle \\ |N| &= \omega_0 \\ N \cap \omega_1 &\in \omega_1 \end{aligned}$$

となる  $N$  をとる。 $\delta = N \cap \omega_1$  とすると、 $\xi \cup \{\xi\} \subseteq \delta$  である。

$$\pi : \langle N, A \cap N \rangle \cong \langle L_\beta[B], B \rangle, \quad B = \pi[A \cap N]$$

とできる。 $|N| = \omega_0$  により、 $|\beta| = \omega_0$ 。従って、 $\beta < \omega_1$  であり、また  $\pi \upharpoonright \delta = id$  により、 $B = \pi[N \cap A] = \pi[N \cap A \cap \omega_1] = \pi[\delta \cap A] = \delta \cap A$  となるので、

$$\pi : \langle N, A \cap N \rangle \cong \langle L_\beta[A \cap \delta], A \cap \delta \rangle, \quad \xi < \delta \leq \beta < \omega_1$$

である。ところで

$$\begin{aligned} \langle L_{\omega_2}[A], A \rangle &\models \forall \gamma < \omega_1 \exists f (f : \omega \rightarrow \gamma \text{ onto} \wedge \omega_1 \text{ は regular} \\ &\quad \wedge \omega_1 \text{ は最大の cardinal} \wedge \forall x (U(x) \rightarrow x \in \omega_1) \wedge \xi < \omega_1) \end{aligned}$$

である。尚、 $U(x)$  は  $x \in A$  を表す述語である。従って

$$\begin{aligned} \langle L_{\omega_2}[A], A \rangle &\models \exists \alpha [\forall \gamma < \alpha \exists f (f : \omega \rightarrow \gamma \text{ onto}) \wedge \alpha \text{ は regular} \\ &\quad \wedge \alpha \text{ は最大の cardinal} \wedge \forall x (U(x) \rightarrow x \in \alpha) \wedge \xi < \alpha] \end{aligned}$$



となるが、これは  $\langle N, A \cap N \rangle$  でも成り立つから、さらに  $\pi$  でうつせば

$$\begin{aligned} \langle L_\beta[A \cap \delta], A \cap \delta \rangle \models & \exists \alpha [\forall \gamma < \alpha \exists f (f : \omega \rightarrow \gamma \text{ onto}) \wedge \alpha \text{ は regular} \\ & \wedge \alpha \text{ は最大の cardinal} \wedge \forall x (U(x) \rightarrow x \in \alpha) \wedge \xi < \alpha] \end{aligned}$$

ここで、 $\pi \upharpoonright \delta = id$  だから、 $\pi(\omega) = \omega$ ,  $\pi(\xi) = \xi$  に注意する。そこで、このような  $\alpha \in L_\beta[A \cap \delta]$  をとれば、 $\omega \leq \xi < \alpha < \beta < \omega_1$  であり、

$$L_{\omega_2}[A] \models \pi^{-1}(\alpha) \text{ は最大の cardinal}$$

により、 $\pi^{-1}(\alpha) = \omega_1$ . これを用いて、 $\alpha \subseteq \delta$  をいう。 $x \in \alpha$  とすると、 $x \in L_\beta[A \cap \delta]$  だから、 $\pi^{-1}(x) < \pi^{-1}(\alpha) = \omega_1$ .  $\pi^{-1}(x) \in N$  なので、 $\pi^{-1}(x) \in N \cap \omega_1 = \delta$ . それ故、 $x = \pi^{-1}(x) < \delta$  となるので、 $\alpha \subseteq \delta$  を得る。これで、 $A \cap \alpha \subseteq A \cap \delta$  がわかるが、一方

$$\langle L_\beta[A \cap \delta], A \cap \delta \rangle \models \forall x (U(x) \rightarrow x \in \alpha)$$

なので、 $A \cap \delta \subseteq \alpha$  を得る。これより、 $A \cap \delta = A \cap \alpha$  となる。故に

$$\begin{aligned} L_\beta[A \cap \alpha] \models & \text{“}\forall \gamma < \alpha \exists f (f : \omega \rightarrow \gamma \text{ onto}) \wedge \alpha \text{ は regular} \\ & \wedge \alpha \text{ は最大の cardinal”} \end{aligned}$$

である。また、 $A \cap \alpha \in L_{\alpha+1}[A \cap \alpha] \subseteq L_\beta[A \cap \alpha]$  であり、 $\pi^{-1}(\alpha) = \omega_1$  に気をつければ、 $\pi^{-1}(A \cap \alpha) = A \cap \omega_1 = A$  であるから、最初の claim を書き直したものにより、

$$L_\beta[A \cap \alpha] \models \forall \xi \exists \gamma \exists x (\gamma > \xi \wedge x = L_\gamma[A \cap \alpha] \wedge \text{Adm}(x)).$$

以上により、 $(\alpha, \beta) \in \bar{S}$  となるので、 $\xi < \alpha$ ,  $\alpha \in \bar{S}^0 \cap \omega_1$  となる。

これで、(M0) はいえた。

(M1).  $\nu \triangleleft \tau$  とし、 $\sigma = \sigma_{\nu\tau}$  とする。まず、 $\triangleleft$  の定義により

$$\pi_{\nu\tau} \upharpoonright \alpha_\nu = id \upharpoonright \alpha_\nu, \pi_{\nu\tau}(\alpha_\nu) = \alpha_\tau, \pi_{\nu\tau}(\nu) = \tau$$

は明らかである。また、 $\sigma$  は順序保存であることに注意しておく。さらに、 $(\sigma \upharpoonright \nu)^\wedge : L_\nu[A \cap \alpha_\nu] \prec_Q L_\tau[A \cap \alpha_\tau]$  については、

$$(\sigma \upharpoonright \nu)^\wedge \upharpoonright \nu = \sigma \upharpoonright \nu$$

であることにも注意しておく。補題 3.8. により、 $S_{\alpha_\nu} \cap \nu$  は uniformly  $\Sigma_1^{L_\nu[A \cap \alpha_\nu]}(\{\alpha_\nu, A \cap \alpha_\nu\})$  であるから、 $\gamma \in S_{\alpha_\nu} \cap (\nu + 1)$  であれば、 $\pi_{\nu\tau}(\gamma) = \sigma_{\nu\tau}(\gamma) \in S_{\alpha_\tau} \cap (\tau + 1)$ . 後は (i)-(iii) を示せば良い。

(i)  $\gamma$ を $S_{\alpha_\nu}$ の最小元であるとする。 $\gamma < \nu$ ならば、 $S_{\alpha_\nu} \cap \nu$ の最小元である。 $\pi_{\nu\tau}(\gamma) \in S_{\alpha_\tau} \cap \tau$ は今示したことからわかる。もし、 $\pi_{\nu\tau}(\gamma)$ が $S_{\alpha_\tau}$ の最小元でなければ

$$L_\tau[A \cap \alpha_\tau] \models \exists x(x < \pi_{\nu\tau}(\gamma) \wedge x \in S_{\alpha_\tau} \cap \tau).$$

従って、 $((\sigma \upharpoonright \nu)^\sim)^{-1}$ でもどせば

$$L_\nu[A \cap \alpha_\nu] \models \exists x(x < \gamma \wedge x \in S_{\alpha_\nu} \cap \nu)$$

となり、 $\gamma$ が $S_{\alpha_\nu} \cap \nu$ の最小元であることに反するので、 $\pi_{\nu\tau}(\gamma)$ は $S_{\alpha_\tau}$ の最小元である。

次に $\gamma = \nu$ とすると、 $\pi_{\nu\tau}(\gamma) = \pi_{\nu\tau}(\nu) = \tau \in S_{\alpha_\tau} \cap (\tau + 1)$ である。もし、 $\tau$ が $S_{\alpha_\tau}$ の最小元でなければ、

$$L_\tau[A \cap \alpha_\tau] \models \exists x(x \in S_{\alpha_\tau} \cap \tau)$$

だから、 $\gamma < \nu$ のときと同様にして矛盾が出るので、 $\tau = \pi_{\nu\tau}(\gamma)$ は $S_{\alpha_\tau}$ の最小元である。

(ii)  $S_{\alpha_\nu} \cap (\nu + 1)$ の中で、 $\gamma$ が $\beta$ の直後元になっているとする。すると、

$$\pi_{\nu\tau}(\beta), \pi_{\nu\tau}(\gamma) \in S_{\alpha_\nu} \cap (\nu + 1), \quad \pi_{\nu\tau}(\beta) < \pi_{\nu\tau}(\gamma)$$

である。まず、 $\gamma < \nu$ とする。 $\pi_{\nu\tau}(\gamma)$ が $\pi_{\nu\tau}(\beta)$ の直後元でなかったとすると、

$$L_\tau[A \cap \alpha_\tau] \models \exists x(\pi_{\nu\tau}(\beta) < x < \pi_{\nu\tau}(\gamma) \wedge x \in S_{\alpha_\tau} \cap \tau)$$

だから、(i)と同様にして矛盾が出るので、 $\pi_{\nu\tau}(\gamma)$ は $S_{\alpha_\tau} \cap (\tau + 1)$ の中で $\pi_{\nu\tau}(\beta)$ の直後元である。 $\gamma = \nu$ でも同様である。

(iii)  $\gamma$ が $S_{\alpha_\nu} \cap (\nu + 1)$ の limit point であるとする。 $\pi_{\nu\tau}(\gamma) \in S_{\alpha_\tau} \cap (\tau + 1)$ である。また、

$$(1) \quad \forall \delta < \gamma \exists \beta < \gamma (\delta < \beta \wedge \beta \in S_{\alpha_\nu} \cap \gamma).$$

である。今、 $\beta \in S_{\alpha_\nu} \cap \gamma$ は uniformly  $\Sigma_1^{L_\gamma[A \cap \alpha_\nu]}(\{\alpha_\nu, A \cap \alpha_\nu\})$  だから、これを表す  $\Sigma_1$ -formula  $\varphi(x, y, z)$  が、uniformly にとれる。即ち、

$$\beta \in S_{\alpha_\nu} \cap \gamma \text{ iff } L_\gamma[A \cap \alpha_\nu] \models \varphi(\beta, \alpha_\nu, A \cap \alpha_\nu)$$

である。まず、 $\gamma < \nu$ とすると、(1) は

$$(2) \quad L_\gamma[A \cap \alpha_\nu] \models \forall \delta \exists \beta (\delta < \beta \wedge \varphi(\beta, \alpha_\nu, A \cap \alpha_\nu))$$

と書けるが、 $L_\gamma[A \cap \alpha_\nu] \in L_\nu[A \cap \alpha_\nu]$ だから、 $\Sigma_0$ -formula  $\psi(x, y, z)$  を用い

$$L_\nu[A \cap \alpha_\nu] \models \psi(L_\gamma[A \cap \alpha_\nu], \alpha_\nu, A \cap \alpha_\nu)$$

と書ける。従って  $(\sigma \upharpoonright \nu)^\wedge$  でうつせば、 $(\sigma \upharpoonright \nu)^\wedge(L_\gamma[A \cap \alpha_\nu]) = L_{\pi_{\nu\tau}(\gamma)}[A \cap \alpha_\tau]$  に注意して

$$L_\tau[A \cap \alpha_\tau] \models \psi(L_{\pi_{\nu\tau}(\gamma)}[A \cap \alpha_\tau], \alpha_\tau, A \cap \alpha_\tau)$$

これは

$$(3) \quad \forall \delta < \pi_{\nu\tau}(\gamma) \exists \beta < \pi_{\nu\tau}(\gamma) (\delta < \beta \wedge \beta \in S_{\alpha_\tau} \cap \pi_{\nu\tau}(\gamma))$$

を表す。これで、 $\pi_{\nu\tau}(\gamma)$  が  $S_{\alpha_\tau} \cap (\tau + 1)$  の limit point であることがわかる。

さて、 $\gamma = \nu$  のときは、(2) までは同じであるが、これを直ちに  $(\sigma \upharpoonright \nu)^\wedge$  でうつして

$$(4) \quad L_\tau[A \cap \alpha_\tau] \models \forall \delta \exists \beta (\delta < \beta \wedge \varphi(\beta, \alpha_\tau, A \cap \alpha_\tau))$$

を得る。 $\pi_{\nu\tau}(\nu) = \tau$  なので、これは (3) と同じことである。(2) から (4) を導くときに、 $(\sigma \upharpoonright \nu)^\wedge : L_\nu[A \cap \alpha_\nu] \prec_Q L_\tau[A \cap \alpha_\tau]$  を用いることに注意しておく。

(M2).  $\bar{\tau} \triangleleft \tau, \bar{\alpha} = \alpha_{\bar{\tau}}, \bar{\nu} \in S_{\bar{\alpha}} \cap \bar{\tau}, \nu = \pi_{\bar{\tau}\tau}(\bar{\nu}) = \sigma_{\bar{\tau}\tau}(\bar{\nu})$  とする。また、 $\alpha = \alpha_\tau$  とおく。まず、 $\bar{\nu} < \bar{\tau}$  だから、 $\nu < \tau$  である。また (M1) により、 $\nu \in S_\alpha \cap \tau$  である。

$\bar{\nu} < \bar{\tau}$  だから、補題 3.13. と 3.14. により、 $\bar{\nu} < D_{\bar{\nu}} < \bar{\tau} < D_{\bar{\tau}}$  である。そこで、 $\sigma = \sigma_{\bar{\tau}\tau} \upharpoonright D_{\bar{\nu}}$  とする。 $\sigma = \sigma_{\bar{\nu}\nu}$  となることを示す。

Claim.1.  $\sigma_{\bar{\tau}\tau}(D_{\bar{\nu}}) = D_\nu$

証明. まず、machine  $\mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]$  の概念が uniformly  $\Sigma_1^{L_\nu[A \cap \alpha_\nu]}(\{\alpha_\nu, A \cap \alpha_\nu\})$  であること、及び、 $\delta < \nu$  に対しては

$$Y \in L_\nu[A \cap \alpha_\nu], Y \subseteq \delta \rightarrow \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^\delta(Y) \in L_\nu[A \cap \alpha_\nu]$$

であることに注意する。 $D_{\bar{\nu}}, p_{\bar{\nu}}$  の性質 (補題 3.12. の証明中の claim) により、

$$\bar{\nu} \subseteq \mathcal{M}_{\alpha_{\bar{\nu}}}[A \cap \alpha_{\bar{\nu}}]^{D_{\bar{\nu}}}(\alpha_{\bar{\nu}} \cup p_{\bar{\nu}})$$

これは、 $\Sigma_1^{L_{\bar{\tau}}[A \cap \alpha_{\bar{\tau}}]}(L_{\bar{\tau}}[A \cap \alpha_{\bar{\tau}}])$  で書けるので、 $(\sigma_{\bar{\tau}\tau} \upharpoonright \tau)^\wedge$  でうつして、

$$(1) \quad \nu \subseteq \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^D(\alpha_\nu \cup \sigma_{\bar{\tau}\tau}[p_{\bar{\nu}}])$$

ここで、 $D = \sigma_{\bar{\tau}\tau}(D_{\bar{\nu}})$  である。 $D_\nu$  の最小性より、 $D_\nu \leq D$  となる。さて、 $D_\nu < D$  と仮定し、 $p_\nu = \{p_\nu^1, \dots, p_\nu^n\}$  とすると、

$$\exists \delta < D \exists x_1 < \delta \exists x_2 < x_1 \dots \exists x_n < x_{n-1} [\nu \subseteq \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^\delta(\alpha_\nu \cup \{x_1, \dots, x_n\})]$$

が出来る。これは  $\Sigma_1^{L_\tau[A \cap \alpha_\tau]}(L_\tau[A \cap \alpha_\tau])$  だから、 $((\sigma_{\bar{\tau}\tau} \upharpoonright \tau)^\wedge)^{-1}$ でもどせば

$$\exists \delta < D_{\bar{\nu}} \exists x_1 < \delta \exists x_2 < x_1 \cdots \exists x_n < x_{n-1} [\bar{\nu} \subseteq M_{\alpha_{\bar{\nu}}}[A \cap \alpha_{\bar{\nu}}]^\delta (\alpha_{\bar{\nu}} \cup \{x_1, \dots, x_n\})]$$

となるが、これは  $D_{\bar{\nu}}$  の最小性に反する。故に、 $D_\nu = D = \sigma_{\bar{\tau}\tau}(D_{\bar{\nu}})$  となる。

Claim.2.  $\sigma[p_{\bar{\nu}}] = \sigma_{\bar{\tau}\tau}[p_{\bar{\nu}}] = p_\nu$ .

証明. まず、 $\sigma_{\bar{\tau}\tau}(D_{\bar{\nu}}) = D_\nu$  がわかったから、claim.1.(1) により

$$\nu \subseteq M_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{D_\nu} (\alpha_\nu \cup \sigma[p_{\bar{\nu}}])$$

となるので、 $p_\nu$  の最小性から、 $p_\nu \leq^* \sigma[p_{\bar{\nu}}]$  は明らかである。そこで、 $p_\nu <^* \sigma[p_{\bar{\nu}}]$  と仮定し、 $p_\nu = \{p_\nu^1, \dots, p_\nu^n\}$  とする。さらに、 $p_{\bar{\nu}} = \{p_{\bar{\nu}}^1, \dots, p_{\bar{\nu}}^m\}$  としておく。また、 $p_\nu^1 > \dots > p_\nu^n$ ,  $p_{\bar{\nu}}^1 > \dots > p_{\bar{\nu}}^m$  としておく。すると、 $p_\nu <^* \sigma[p_{\bar{\nu}}]$  は例えば

$$p_\nu^1 = \sigma(p_{\bar{\nu}}^1) \wedge p_\nu^2 < \sigma(p_{\bar{\nu}}^2)$$

のように、 $=$  と  $<$ 、即ち、等号と大小関係だけで書くことができることに注意する。すると、 $p_\nu$  の性質により

$$\nu \subseteq M_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{D_\nu} (\alpha_\nu \cup p_\nu)$$

だから、

$$\begin{aligned} \exists x_1 < D_\nu \exists x_2 < x_1 \cdots \exists x_n < x_{n-1} [\{x_1, \dots, x_n\} <^* \sigma[p_{\bar{\nu}}] \\ \wedge \nu \subseteq M_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{D_\nu} (\alpha_\nu \cup \{x_1, \dots, x_n\})] \end{aligned}$$

となるので、 $((\sigma_{\bar{\tau}\tau} \upharpoonright \tau)^\wedge)^{-1}$ でもどせば、

$$\begin{aligned} \exists x_1 < D_{\bar{\nu}} \exists x_2 < x_1 \cdots \exists x_n < x_{n-1} [\{x_1, \dots, x_n\} <^* p_{\bar{\nu}} \\ \wedge \bar{\nu} \subseteq M_{\alpha_{\bar{\nu}}}[A \cap \alpha_{\bar{\nu}}]^{D_{\bar{\nu}}} (\alpha_{\bar{\nu}} \cup \{x_1, \dots, x_n\})] \end{aligned}$$

となるが、これは  $p_{\bar{\nu}}$  の最小性に反する。従って、 $\sigma[p_{\bar{\nu}}] = p_\nu$  である。

これらの claims により、 $\sigma$  が  $\triangleleft$  の定義の (i)-(vii) までをみたすことがわかる。特に (vi) については、

$$(\sigma \upharpoonright \nu)^\wedge : L_{\bar{\nu}}[A \cap \alpha_{\bar{\nu}}] \prec L_\nu[A \cap \alpha_\nu] \quad \text{elementary embedding}$$

である。そこで、(viii) を示す。  $\xi < D_{\bar{\nu}}$  が十分大きいとし、

$$\bar{\pi} : \bar{\gamma} \rightarrow M_{\alpha_{\bar{\nu}}}[A \cap \alpha_{\bar{\nu}}]^\xi (\alpha_{\bar{\nu}} \cup p_{\bar{\nu}})$$

を collapsing map とする。  $\bar{\pi}, \bar{\gamma} \in L_{\bar{\tau}}[A \cap \alpha_{\bar{\nu}}]$  に注意しておく。まず、CP により、

$$\bar{\pi} : \mathcal{M}_{\alpha_{\bar{\nu}}}[A \cap \alpha_{\bar{\nu}}]^{\bar{\gamma}} \rightarrow \mathcal{M}_{\alpha_{\bar{\nu}}}[A \cap \alpha_{\bar{\nu}}]^{\xi}(\alpha_{\bar{\nu}} \cup p_{\bar{\nu}}) \quad \text{mono}$$

であるから、

$$\bar{\gamma} = \mathcal{M}_{\alpha_{\bar{\nu}}}[A \cap \alpha_{\bar{\nu}}]^{\bar{\gamma}}(\alpha_{\bar{\nu}} \cup \bar{\pi}^{-1}[p_{\bar{\nu}}])$$

である。ところで、もし、 $\bar{\nu} \leq \bar{\gamma}$  であれば、 $D_{\bar{\nu}}$  の最小性より、 $D_{\bar{\nu}} \leq \bar{\gamma}$  とならねばならないが、 $\bar{\gamma} \leq \xi < D_{\bar{\nu}}$  だから、これは不合理。従って、 $\bar{\gamma} < \bar{\nu}$  である。

さて、 $\pi = (\sigma_{\bar{\tau}\tau} \upharpoonright \bar{\tau})^{\wedge}(\bar{\pi})$ ,  $\gamma = (\sigma_{\bar{\tau}\tau} \upharpoonright \bar{\tau})^{\wedge}(\bar{\gamma}) = \sigma_{\bar{\tau}\tau}(\bar{\gamma}) = \sigma(\bar{\gamma})$  とすると、 $(\sigma_{\bar{\tau}\tau} \upharpoonright \bar{\tau})^{\wedge}$  が  $\Sigma_1$  elementary embedding なので、 $\sigma_{\bar{\tau}\tau}(\xi) = \sigma(\xi)$  に気をつけて、

$$\pi : \gamma \rightarrow \mathcal{M}_{\alpha_{\nu}}[A \cap \alpha_{\nu}]^{\sigma(\xi)}(\alpha_{\nu} \cup p_{\nu})$$

が collapsing map になることがわかる。ここで

$$\sigma(\bar{\gamma}) = \gamma$$

であった。また、 $p_{\nu} \subseteq \text{range}((\sigma_{\bar{\tau}\tau} \upharpoonright \bar{\tau})^{\wedge})$  なので、 $\pi^{-1}[p_{\nu}] \subseteq \text{range}((\sigma_{\bar{\tau}\tau} \upharpoonright \bar{\tau})^{\wedge})$  となるが、 $\pi^{-1}[p_{\nu}] \subseteq \gamma < \nu$  だから

$$\pi^{-1}[p_{\nu}] \subseteq \text{range}(\sigma)$$

これで (viii)' がいえたので、補題 3.20. により、(viii) がいえた。

以上で、 $\bar{\nu} < \nu$  がわかった。また

$$\pi_{\bar{\nu}\nu} \upharpoonright \bar{\nu} = \sigma_{\bar{\nu}\nu} \upharpoonright \bar{\nu} = \sigma_{\bar{\tau}\tau} \upharpoonright \bar{\nu} = \pi_{\bar{\tau}\tau} \upharpoonright \bar{\nu}$$

となる。

(M3).  $\tau \in S_{\alpha}$ ,  $\bar{\alpha} < \alpha$ ,  $\bar{\alpha}$  : limit ordinal とし、

$$\{\alpha_{\nu} \mid \nu < \tau \wedge \alpha_{\nu} < \bar{\alpha}\} \text{ は unbounded in } \bar{\alpha}$$

と仮定する。 $\bar{\alpha} \in \{\alpha_{\nu} \mid \nu < \tau\}$  を証明する。

まず、 $P = \{\nu < \tau \mid \alpha_{\nu} < \bar{\alpha}\}$  とおく。 $\eta \in P$  に対し、 $X_{\eta} = \text{range}(\sigma_{\eta\tau})$  とすると、

$$\sigma_{\eta\tau} : \mathcal{M}_{\alpha_{\eta}}[A \cap \alpha_{\eta}]^{D_{\eta}} \rightarrow \mathcal{M}_{\alpha}[A \cap \alpha]^{D_{\tau}} \quad \text{mono}$$

$$D_{\eta} = \mathcal{M}_{\alpha_{\eta}}[A \cap \alpha_{\eta}]^{D_{\eta}}(\alpha_{\eta} \cup p_{\eta})$$

$$\sigma_{\eta\tau} \upharpoonright \alpha_{\eta} = id$$

$$\sigma_{\eta\tau}[p_{\eta}] = p_{\tau}$$

等の性質により、

$$X_\eta = \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\tau}(\alpha_\eta \cup p_\tau) \\ \alpha, \tau \in X_\eta$$

がいえる。そこで

$$X = \bigcup \{X_\eta \mid \eta \in P\}$$

とする。

$$\text{Claim.1. } X = \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\tau}(\bar{\alpha} \cup p_\tau)$$

証明. まず

$$(1) \eta, \eta' \in P, \eta \leq \eta' \rightarrow X_\eta \subseteq X_{\eta'}$$

に注意する。  $X_\eta = \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\tau}(\alpha_\eta \cup p_\tau)$  だからこれは明らかである。また

$$X \subseteq \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\tau}(\bar{\alpha} \cup p_\tau)$$

も、  $\alpha_\eta < \bar{\alpha}$  だから明らかである。そこで、逆向きの不等式を証明する。

$$\bar{\alpha} = \sup\{\alpha_\eta \mid \eta \in P\}$$

だから

$$\bar{\alpha} \cup p_\tau \subseteq X$$

は明らかである。今、  $P$  は  $\triangleleft$  によって全順序集合となっており、(1) により、  $X_\eta, \eta \in P$  は増加列である。さらに、各  $X_\eta$  ( $\eta \in P$ ) は  $\mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\tau}$  の subalgebra だから、  $X$  も  $\mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\tau}$  の subalgebra となる。故に

$$\mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\tau}(\bar{\alpha} \cup p_\tau) \subseteq X$$

となるので、claim は証明された。

$$\text{Claim.2. } X \cap \alpha = \bar{\alpha}$$

証明.  $x \in X \cap \alpha$  とする。  $x \in X_\eta = \text{range}(\sigma_{\eta\tau})$  となる  $\eta \in P$  があり、また

$$x = \sigma_{\eta\tau}(\beta), \quad \beta < D_\eta$$

とすることができる。さて、  $\sigma_{\eta\tau}(\beta) = x < \alpha = \sigma_{\eta\tau}(\alpha_\eta)$  だから、  $\beta < \alpha_\eta$  となる。従って、  $x = \sigma_{\eta\tau}(\beta) = \text{id}(\beta) = \beta < \alpha_\eta < \bar{\alpha}$  となるので、  $X \cap \alpha \subseteq \bar{\alpha}$  である。

次に、  $x \in \bar{\alpha}$  とすると、  $x \in \alpha_\eta$  となる  $\eta \in P$  がとれる。  $x = \sigma_{\eta\tau}(x)$  なので、  $x \in \text{range}(\sigma_{\eta\tau}) = X_\eta \subseteq X$ 。また、  $x < \alpha_\eta$  だから、  $x = \sigma_{\eta\tau}(x) < \sigma_{\eta\tau}(\alpha_\eta) = \alpha$  となるので、  $x \in X \cap \alpha$  となる。これで、  $\bar{\alpha} \subseteq X \cap \alpha$  となる。以上のことから、  $X \cap \alpha = \bar{\alpha}$  となることがわかる。

ここで、  $\sigma : D \rightarrow X$  を  $X$  の collapsing map とする。明らかに  $\sigma \upharpoonright \bar{\alpha} = \text{id}$  だが、  $\alpha \in X$  と claim.2. により、  $\sigma^{-1}(\alpha) = \bar{\alpha}$ 、即ち、  $\sigma(\bar{\alpha}) = \alpha$  である。また、 claim.1. により、  $X$  は  $\mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\tau}$  の subalgebra だから、CP によって

$$\sigma : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^D \rightarrow \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\tau} \quad \text{mono}$$

となり、従って、再び claim.1. により

$$D = \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^D(\bar{\alpha} \cup p), \quad p = \sigma^{-1}[p_\tau] \subseteq D$$

である。今、 $\nu = \sigma^{-1}(\tau)$  とする。 $\nu < D$  である。

以下では、 $\bar{\alpha} = \alpha_\nu, \nu \triangleleft \tau$  を証明する。まず、 $\tau \neq \omega_2^{L[A \cap \alpha]}$  として良いことに注意しておく。もし、 $\tau = \omega_2^{L[A \cap \alpha]}$  であれば、 $\{\alpha_\eta \mid \eta \triangleleft \tau\} = \emptyset$  になってしまうからである。(M3) の今までの議論は、実は  $\tau \neq \omega_2^{L[A \cap \alpha]}$  が仮定されていたことに注意しておく。以下では、 $\tau \neq \omega_2^{L[A \cap \alpha]}$  である。

Claim.3.  $(\sigma \upharpoonright \nu)^\wedge : L_\nu[A \cap \bar{\alpha}] \prec_Q L_\tau[A \cap \alpha]$ .

証明. まず、 $\nu$  が  $J$ -closed であることに注意する。これは、 $\sigma : D \rightarrow D_\tau$  が strong  $\mathcal{P}$ -map で、 $\tau = \sigma(\nu)$  が  $J$ -closed なことからすぐにわかる。このことにより、各  $x \in L_\tau[A \cap \bar{\alpha}]$  は

$$x = D_{A \cap \bar{\alpha}}^{\bar{\alpha}}(t), \quad t < \nu, t \in \text{Term}_\nu^{\bar{\alpha}}$$

と表される。従って、 $\sigma : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^D \rightarrow \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\tau}$  mono により、

$$(\sigma \upharpoonright \nu)^\wedge : L_\nu[A \cap \bar{\alpha}] \prec_0 L_\tau[A \cap \alpha]$$

がすぐにわかる。これは、 $\Sigma_0$ -formula が、ramified language  $\mathcal{R}_U$  の formula で表され、しかも、その formula の Gödel number が  $\nu$  より小さいからである。

次に  $(\sigma \upharpoonright \nu)^\wedge : L_\nu[A \cap \bar{\alpha}] \prec_1 L_\tau[A \cap \alpha]$  をいう。 $(\sigma \upharpoonright \nu)^\wedge$  を単に  $\hat{\sigma}$  と書くことにする。 $\hat{\sigma}_{\eta\tau}$  についても同様である。まず、次のことを示しておく。

(1)  $\text{range}(\hat{\sigma}) = \bigcup \{\text{range}(\hat{\sigma}_{\eta\tau}) \mid \eta \in P\}$

(2)  $\eta, \eta' \in P, \eta \triangleleft \eta' \rightarrow \text{range}(\hat{\sigma}_{\eta\tau}) \subseteq \text{range}(\hat{\sigma}_{\eta'\tau})$

(1) の証明.  $\eta \in P$  とし、 $x \in L_\eta[A \cap \alpha_\eta] = \text{dom}(\hat{\sigma}_{\eta\tau}), x = D_{A \cap \alpha_\eta}^{\alpha_\eta}(t), t < \eta$  とする。

$$\hat{\sigma}_{\eta\tau}(x) = D_{A \cap \alpha}^\alpha(\sigma_{\eta\tau}(t))$$

であり、 $\sigma_{\eta\tau}(t) < \sigma_{\eta\tau}(\eta) = \tau$  である。今、 $s < D$  を、 $\sigma(s) = \sigma_{\eta\tau}(t)$  なるものとする、 $s < \sigma^{-1}(\tau) = \nu$  であり、 $D_{A \cap \bar{\alpha}}^{\bar{\alpha}}(s) \in L_\nu[A \cap \bar{\alpha}]$  である。さらに

$$\hat{\sigma}_{\eta\tau}(x) = D_{A \cap \alpha}^\alpha(\sigma_{\eta\tau}(t)) = D_{A \cap \alpha}^\alpha(\sigma(s)) = \hat{\sigma}(D_{A \cap \bar{\alpha}}^{\bar{\alpha}}(s))$$

だから、 $\supseteq$  がいえる。

逆に  $x \in L_\nu[A \cap \bar{\alpha}]$  とし、 $x = D_{A \cap \bar{\alpha}}^{\bar{\alpha}}(t)$  なる  $t < \nu$  をとる。すると

$$\hat{\sigma}(x) = D_{A \cap \alpha}^\alpha(\sigma(t)), \quad \sigma(t) < \sigma(\nu) = \tau$$

そこで、 $\sigma(t) \in X_\eta$  なる  $\eta \in P$  をとり、 $s = \sigma_\tau^{-1} \circ \sigma(t)$  とすると、 $s < \sigma_\tau^{-1}(\tau) = \eta$  であり、

$$\hat{\sigma}(x) = D_{A \cap \alpha}^\alpha(\sigma(t)) = D_{A \cap \alpha}^\alpha(\sigma_{\eta\tau}(s)) = \hat{\sigma}_{\eta\tau}(D_{A \cap \alpha_\eta}^{\alpha_\eta}(s))$$

となるので、 $\subseteq$ もいえた。これで、(1) はいえた。

(2) の証明.  $x \in L_\eta[A \cap \alpha_\eta]$  とし、 $x = D_{A \cap \alpha_\eta}^{\alpha_\eta}(t)$ ,  $t < \eta$  とすると、

$$\hat{\sigma}_{\eta\tau}(x) = D_{A \cap \alpha}^\alpha(\sigma_{\eta\tau}(t)), \quad \sigma_{\eta\tau}(t) < \tau$$

である。ここで、claim.1. の証明中の (1) により、 $\sigma_{\eta\tau} \in X_\eta \subseteq X_{\eta'}$  なので、 $\sigma_{\eta\tau}(t) = \sigma_{\eta'\tau}(s)$  となる  $s < \eta'$  がとれる。従って

$$\hat{\sigma}_{\eta\tau}(x) = D_{A \cap \alpha}^\alpha(\sigma_{\eta\tau}(t)) = D_{A \cap \alpha}^\alpha(\sigma_{\eta'\tau}(s)) = \hat{\sigma}_{\eta'\tau}(D_{A \cap \alpha_{\eta'}}^{\alpha_{\eta'}}(s))$$

となるので、 $\hat{\sigma}_{\eta\tau}(x) \in \text{range}(\hat{\sigma}_{\eta'\tau})$ 。これで (2) はいえた。

さて、 $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$  を  $\Sigma_0$ -formula とし、 $\vec{a} \in L_\nu[A \cap \bar{\alpha}]$  とする。

$$L_\nu[A \cap \bar{\alpha}] \models \exists \vec{y} \varphi(\vec{a}, \vec{y}) \text{ ならば } L_\tau[A \cap \alpha] \models \exists \vec{y} \varphi(\hat{\sigma}(\vec{a}), \vec{y})$$

は容易だから、逆を示す。 $L_\tau[A \cap \alpha] \models \exists \vec{y} \varphi(\hat{\sigma}(\vec{a}), \vec{y})$  と仮定する。今、(1), (2) により、 $\hat{\sigma}(\vec{a}) = \hat{\sigma}_{\eta\tau}(\vec{b})$  となる  $\eta \in P$ ,  $\vec{b} \in L_\eta[A \cap \alpha_\eta]$  が存在する。すると、

$$L_\tau[A \cap \alpha] \models \exists \vec{y} \varphi(\hat{\sigma}_{\eta\tau}(\vec{b}), \vec{y})$$

だから、

$$L_\eta[A \cap \alpha_\eta] \models \exists \vec{y} \varphi(\vec{b}, \vec{y})$$

そこで、 $\vec{y} \in L_\eta[A \cap \alpha_\eta]$ ,  $L_\eta[A \cap \alpha_\eta] \models \varphi(\vec{b}, \vec{y})$  なる  $\vec{y}$  をとり、 $\hat{\sigma}_{\eta\tau}$  でうつせば

$$L_\tau[A \cap \alpha] \models \varphi(\hat{\sigma}_{\eta\tau}(\vec{b}), \hat{\sigma}_{\eta\tau}(\vec{y})).$$

ここで、 $\hat{\sigma}_{\eta\tau}(\vec{y}) \in \text{range}(\sigma)$  だから、 $\sigma(\vec{z}) = \hat{\sigma}_{\eta\tau}(\vec{y})$  なる  $\vec{z} \in L_\nu[A \cap \bar{\alpha}]$  が存在する。すると、

$$L_\tau[A \cap \alpha] \models \varphi(\hat{\sigma}(\vec{a}), \hat{\sigma}(\vec{z}))$$

となるから、 $\varphi$  が  $\Sigma_0$  なことから

$$L_\nu[A \cap \bar{\alpha}] \models \varphi(\vec{a}, \vec{z}).$$

となるので

$$L_\nu[A \cap \bar{\alpha}] \models \exists \vec{y} \varphi(\vec{a}, \vec{y})$$

となる。

最後に、 $\hat{\sigma} : L_\nu[A \cap \bar{\alpha}] \prec_Q L_\tau[A \cap \alpha]$  をいう。 $\varphi(y, \vec{x})$  を  $\Sigma_1$ -formula とし、 $\vec{a} \in L_\nu[A \cap \bar{\alpha}]$  とする。まず

$$L_\tau[A \cap \alpha] \models \forall \beta \exists \gamma > \beta \varphi(\gamma, \hat{\sigma}(\vec{a}))$$



と仮定する。 $\beta < \nu$ を任意にとると、 $\hat{\sigma}(\beta) = \sigma(\beta) < \sigma(\nu) = \tau$ だから、

$$L_\tau[A \cap \alpha] \models \exists \gamma > \hat{\sigma}(\beta) \varphi(\gamma, \hat{\sigma}(\vec{a}))$$

よって、 $\hat{\sigma} : L_\nu[A \cap \vec{a}] \prec_1 L_\tau[A \cap \alpha]$ により、

$$L_\nu[A \cap \vec{a}] \models \exists \gamma > \beta \varphi(\gamma, \vec{a})$$

となるので、 $L_\nu[A \cap \vec{a}] \models \forall \beta \exists \gamma > \beta \varphi(\gamma, \vec{a})$ となる。逆に

$$L_\tau[A \cap \alpha] \models \neg \forall \beta \exists \gamma > \beta \varphi(\gamma, \hat{\sigma}(\vec{a}))$$

とする。 $\hat{\sigma}(\vec{a}) = \hat{\sigma}_{\eta\tau}(\vec{b})$ となる $\eta \in P, \vec{b} \in L_\eta[A \cap \alpha_\eta]$ をとると、

$$\hat{\sigma}_{\eta\tau} : L_\eta[A \cap \alpha_\eta] \prec_Q L_\tau[A \cap \alpha]$$

により、 $L_\eta[A \cap \alpha_\eta] \models \neg \forall \beta \exists \gamma > \beta \varphi(\gamma, \vec{b})$ , 即ち、

$$L_\eta[A \cap \alpha_\eta] \models \exists \beta \neg \exists \gamma > \beta \varphi(\gamma, \vec{b})$$

そこで、このような $\beta \in L_\eta[A \cap \alpha_\eta]$ を固定する。 $\hat{\sigma}_{\eta\tau}$ でうつせば

$$L_\tau[A \cap \alpha] \models \neg \exists \gamma > \hat{\sigma}_{\eta\tau}(\beta) \varphi(\gamma, \hat{\sigma}(\vec{a}))$$

となる。 $\hat{\sigma}_{\eta\tau}(\beta) \in \text{range}(\hat{\sigma})$ だから、 $\beta' = \hat{\sigma}^{-1} \circ \hat{\sigma}_{\eta\tau}(\beta)$ とすると、 $\beta' < \nu$ であり、

$$L_\nu[A \cap \vec{a}] \models \neg \exists \gamma > \beta' \varphi(\gamma, \vec{a})$$

故に、 $L_\nu[A \cap \vec{a}] \models \exists \beta \neg \exists \gamma > \beta \varphi(\gamma, \vec{a})$ , 即ち、

$$L_\nu[A \cap \vec{a}] \models \neg \forall \beta \exists \gamma > \beta \varphi(\gamma, \vec{a})$$

となる。これで、claim は証明された。

Claim.4.  $(\sigma \upharpoonright \nu)^\wedge(A \cap \vec{a}) = A \cap \alpha$ .

証明. $A \cap \vec{a}$ を表す  $\text{term}^{\vec{a}}$ は、 $t = \hat{x}^{\vec{a}} U(x)$ であり、 $\sigma(t) = \hat{x}^{\vec{a}} U(x)$ だから、

$$(\sigma \upharpoonright \nu)^\wedge(A \cap \vec{a}) = D_{A \cap \alpha}^{\vec{a}}(\hat{x}^{\vec{a}} U(x)) = A \cap \alpha$$

Claim.5.  $\nu \in S_{\bar{\alpha}}$  即ち、 $\bar{\alpha} = \alpha_\nu$ .

証明.  $(\bar{\alpha}, \nu) \in \bar{S}$  をいう。そのためには、

- (1)  $\forall \beta < \nu \exists \gamma < \nu (\beta < \gamma \wedge L_\gamma[A \cap \bar{\alpha}] \text{ は admissible})$   
 (2)  $L_\nu[A \cap \bar{\alpha}] \models \text{“}\forall \beta < \bar{\alpha} \exists f(f : \omega \rightarrow \beta \text{ onto})$   
 $\wedge \bar{\alpha} \text{ は regular } \wedge \bar{\alpha} \text{ は最大の cardinal”}$

をいえば良い。まず、(1) をいう。  $(\alpha, \tau) \in \bar{S}$  だから、

$$\forall \beta < \tau \exists \gamma < \tau (\beta < \gamma \wedge L_\gamma[A \cap \alpha] \text{ は admissible})$$

であるが、これは

$$L_\tau[A \cap \alpha] \models \forall \beta \exists \gamma > \beta \exists x (x = L_\gamma[A \cap \alpha] \wedge \text{Adm}(x))$$

とも書ける。claim3 と 4 により、  $((\sigma \upharpoonright \nu)^\wedge)^{-1}$  でもどせば

$$L_\nu[A \cap \bar{\alpha}] \models \forall \beta \exists \gamma > \beta \exists x (x = L_\gamma[A \cap \bar{\alpha}] \wedge \text{Adm}(x))$$

となり、これで (1) はいえた。(2) も容易にできる。(2) は  $(\sigma \upharpoonright \nu)^\wedge$  が  $\Sigma_1$  elementary であることで十分である。尚、  $(\sigma \upharpoonright \nu)^\wedge(\bar{\alpha}) = \sigma(\bar{\alpha}) = \alpha$  (claim2 の直後) にも注意する。

Claim.6.  $\nu \neq \omega_2^{L[A \cap \bar{\alpha}]}$

証明. まず、claim.5. により、  $\nu \in S_{\bar{\alpha}}$  だから、補題 3.5. により、

$$\bar{\alpha} < \nu \leq \omega_2^{L[A \cap \bar{\alpha}]}$$

従って、  $L[A \cap \bar{\alpha}] \models |\bar{\alpha}| \leq \omega_1^{L[A \cap \bar{\alpha}]}$  である。  $\nu < D = \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^D(\bar{\alpha} \cup p)$  であったが、machine の概念は  $L[A \cap \bar{\alpha}]$  の中でも変わらないので、

$$L[A \cap \bar{\alpha}] \models \nu \subseteq \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^D(\bar{\alpha} \cup p)$$

となる。従って、  $L[A \cap \bar{\alpha}] \models |\nu| = |\bar{\alpha}|$  となるので、  $\nu < \omega_2^{L[A \cap \bar{\alpha}]}$ .

この claim によって、  $D_\nu, p_\nu$  が定義されることがわかる。実は

$$D = D_\nu, p = p_\nu$$

である。これを示すために、次のことを証明する。

Claim.7.  $\sigma : (D, \bar{\alpha}, A \cap \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \prec_{\exists \text{ prop.}} (D_\tau, \alpha, A \cap \alpha, \alpha)$

証明. 最初に、  $(D, \bar{\alpha}, A \cap \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \prec_{\text{atomic}} (D_\tau, \alpha, A \cap \alpha, \alpha)$  をいっておく。

$\sigma : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^D \rightarrow \mathcal{M}_{\alpha}[A \cap \alpha]^{D_r}$  mono であったから、 $\mathcal{M}$  の atomic formula のうちで問題になるのは、 $x \in M^y(\Box \cup \{z_1, \dots, z_n\})$  のみである。まず

$$(D, \bar{\alpha}, A \cap \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \models x \in M^y(\Box \cup \{z_1, \dots, z_n\})$$

とすると、 $\sigma$  が monomorphism だから、 $\sigma(\bar{\alpha}) = \alpha$  に気をつけて

$$(D_r, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \sigma(x) \in M^{\sigma(y)}(\Box \cup \{\sigma(z_1), \dots, \sigma(z_n)\})$$

となる。逆に

$$(D_r, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \sigma(x) \in M^{\sigma(y)}(\Box \cup \{\sigma(z)\})$$

と仮定する。簡単のために、 $n = 1$  のときを考える。 $\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z) \in X_{\eta}$  となる  $\eta \in P$  をとり、

$$x' = \sigma_{\eta r}^{-1} \circ \sigma(x), \quad y' = \sigma_{\eta r}^{-1} \circ \sigma(y), \quad z' = \sigma_{\eta r}^{-1} \circ \sigma(z)$$

とおけば、

$$(D_{\eta}, \alpha_{\eta}, A \cap \alpha_{\eta}, \alpha_{\eta}) \models x' \in M^{y'}(\Box \cup \{z'\}).$$

故に、

$$x' = \tilde{F}^{y'}(\vec{\beta}, z'), \quad \vec{\beta} < \alpha_{\eta}, \quad \tilde{F} \text{ は } \mathcal{M}_{\alpha_{\eta}}[A \cap \alpha_{\eta}] \text{ の関数の合成}$$

と書くことができる。故に、monomorphism  $\sigma_{\eta r}$  でうつせば

$$\sigma(x) = F^{\sigma(y)}(\vec{\beta}, \sigma(z)), \quad \vec{\beta} < \alpha_{\eta}, \quad F \text{ は } \mathcal{M}_{\alpha}[A \cap \alpha] \text{ の関数の合成で } \tilde{F} \text{ に対応するもの}$$

とできる。再び、 $\sigma$  が monomorphism だから、 $\vec{\beta} = \sigma(\vec{\beta})$  に注意して

$$x = \bar{F}^y(\vec{\beta}, z), \quad \vec{\beta} < \alpha_{\eta} \leq \bar{\alpha}, \quad \bar{F} \text{ は } \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}] \text{ の関数の合成で } F \text{ に対応するもの}$$

と書けるので、 $x \in \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^y(\bar{\alpha} \cup \{z\})$  となり、

$$(D, \bar{\alpha}, A \cap \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \models x \in M^y(\Box \cup \{z\})$$

を得る。これで、 $\sigma : (D, \bar{\alpha}, A \cap \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \prec_{\text{atomic}} (D_r, \alpha, A \cap \alpha, \alpha)$  はいえ、従って

$$\sigma : (D, \bar{\alpha}, A \cap \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \prec_{\text{prop.}} (D_r, \alpha, A \cap \alpha, \alpha)$$

もわかった。よって、prop. formula  $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$  に対し、 $(D, \bar{\alpha}, A \cap \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \models \exists \vec{x} \varphi(\vec{x}, \vec{y})$  であれば、容易に、 $(D_r, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \exists \vec{x} \varphi(\vec{x}, \sigma(\vec{y}))$  がわかる。そこで

$$(D_r, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \exists \vec{x} \varphi(\vec{x}, \sigma(\vec{y}))$$

とする。  $\sigma(\vec{y}) \in X_\eta$  なる  $\eta \in P$  をとり、  $\sigma(\vec{y}) = \sigma_{\eta\tau}(\vec{z})$ ,  $\vec{z} < D_\eta$  とすると、

$$(D_\eta, \alpha_\eta, A \cap \alpha_\eta, \alpha_\eta) \models \exists \vec{x} \varphi(\vec{x}, \vec{z}).$$

よって、  $\vec{x} < D_\eta$ ,  $(D_\eta, \alpha_\eta, A \cap \alpha_\eta, \alpha_\eta) \models \varphi(\vec{x}, \vec{z})$  をみたす  $\vec{x}$  をとれば

$$(D_\tau, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \varphi(\sigma_{\eta\tau}(\vec{x}), \sigma(\vec{y}))$$

となる。  $\sigma_{\eta\tau}(\vec{x}) \in X = \text{range}(\sigma)$  だから、  $\vec{x}' = \sigma^{-1} \circ \sigma_{\eta\tau}(\vec{x})$  とすると

$$(D, \bar{\alpha}, A \cap \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \models \varphi(\vec{x}', \vec{y})$$

となるので、  $(D, \bar{\alpha}, A \cap \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \models \exists \vec{x} \varphi(\vec{x}, \vec{y})$  である。

これで、  $D = D_\nu$ ,  $p = p_\nu$  の証明ができる。

Claim.8.  $D = D_\nu$ ,  $p = p_\nu$

証明. まず、  $D = D_\nu$  を示す。  $D = \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{D_\nu}(\alpha_\nu \cup p)$ ,  $\nu < D$  (claim.2. の後に書いたことと、 claim.5.) であった。  $D_\nu$  の最小性から、  $D_\nu \leq D$  である。今、  $D_\nu < D$  と仮定する。すると、  $\nu \subseteq \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{D_\nu}(\alpha_\nu \cup p_\nu)$  だから、

$$(D, \alpha_\nu, A \cap \alpha_\nu, \alpha_\nu) \models \forall x (x < \nu \rightarrow x \in M^{D_\nu}(\square \cup \{p_\nu^1, \dots, p_\nu^n\}))$$

ここで、  $p_\nu = \{p_\nu^1, \dots, p_\nu^n\}$  とおいた。従って、 claim.7. により、  $\sigma$  でうつせば、

$$(D_\tau, \alpha_\tau, A \cap \alpha_\tau, \alpha_\tau) \models \forall x (x < \tau \rightarrow x \in M^{\sigma(D_\nu)}(\square \cup \{\sigma(p_\nu^1), \dots, \sigma(p_\nu^n)\}))$$

となる。即ち、

$$\tau \subseteq \mathcal{M}_{\alpha_\tau}[A \cap \alpha_\tau]^{\sigma(D_\nu)}(\alpha_\tau \cup \sigma[p_\nu])$$

であるが、  $\sigma(D_\nu) < D_\tau$  だから、これは  $D_\tau$  の最小性に反する。故に、  $D_\nu = D$ 。

次に、  $p = p_\nu$  を示す。  $D = D_\nu$  なので、  $D_\nu = \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{D_\nu}(\alpha_\nu \cup p)$ 。従って、  $p_\nu$  の最小性により、  $p_\nu \leq^* p$  である。今、  $p_\nu <^* p$  とし、  $p = \{p_1, \dots, p_n\}$  とおくと、  $p_1, \dots, p_n \in D_\nu = \mathcal{M}_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^{D_\nu}(\alpha_\nu \cup p_\nu)$  だから、

$$\sigma(p_1), \dots, \sigma(p_n) \in \mathcal{M}_{\alpha_\tau}[A \cap \alpha_\tau]^{D_\tau}(\alpha_\tau \cup \sigma[p_\nu])$$

さて、  $p = \sigma^{-1}[p_\tau]$  だったから、これは

$$p_\tau \subseteq \mathcal{M}_{\alpha_\tau}[A \cap \alpha_\tau]^{D_\tau}(\alpha_\tau \cup \sigma[p_\nu])$$

を意味する。従って、

$$D_\tau = \mathcal{M}_{\alpha_\tau}[A \cap \alpha_\tau]^{D_\tau}(\alpha_\tau \cup p_\tau) = \mathcal{M}_{\alpha_\tau}[A \cap \alpha_\tau]^{D_\tau}(\alpha_\tau \cup \sigma[p_\nu])$$

を得る。しかし、 $p_\nu <^* p$  により、 $\sigma[p_\nu] <^* \sigma[p] = p_\tau$  だから、これは  $p_\tau$  の最小性に反する。故に、 $p_\nu = p$  となる。

以上の claims によって、 $\nu < \tau$  の  $\sigma$  に関する条件の (i)-(vii) が満たされることがわかる。(viii) をいうために、 $\xi < D_\nu$  が十分大きいとし、

$$\begin{aligned}\bar{\pi} : \bar{\gamma} &\rightarrow M_{\alpha_\nu}[A \cap \alpha_\nu]^\xi(\alpha_\nu \cup p_\nu) \\ \pi : \gamma &\rightarrow M_{\alpha_\tau}[A \cap \alpha_\tau]^{\sigma(\xi)}(\alpha_\tau \cup p_\tau)\end{aligned}$$

を collapsing map とする。補題 3.20. により、

$$(1) \gamma \in \text{range}(\sigma), \quad \pi^{-1}[p_\tau] \subseteq (\sigma)$$

をいえば良い。まず、 $\sigma(\xi) \in X_\eta$  となる  $\eta \in P$  をとり、 $\sigma(\xi) = \sigma_{\eta\tau}(\xi')$  とする。すると、 $\xi' < D_\eta$  が十分大きいことがわかるので

$$\pi' : \gamma' \rightarrow M_{\alpha_\eta}[A \cap \alpha_\eta]^{\xi'}(\alpha_\eta \cup p_\eta)$$

を collapsing map とすると、 $\eta < \tau$  により、

$$\sigma_{\eta\tau}(\gamma') = \gamma, \quad \sigma_{\eta\tau} \circ \pi'^{-1}[p_\eta] = \pi^{-1}[p_\tau]$$

だが、 $\text{range}(\sigma_{\eta\tau}) = X_\eta \subseteq X = \text{range}(\sigma)$  なので (1) は明らか。これで、 $\bar{\alpha} = \alpha_\nu$ 、 $\nu < \tau$  が示され、(M3) の証明は終わった。

(M4).  $\tau \in S_\alpha$  が  $S_\alpha$  の極大元でないとする。従って、 $\lambda \in S_\alpha$ 、 $\tau < \lambda$  となる  $\lambda$  がある。 $D_\tau < \lambda$  だから、

$$D_\tau < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda, \quad L_{\lambda_1}[A \cap \alpha], L_{\lambda_2}[A \cap \alpha] \text{ は共に admissible}$$

となる  $\lambda_1, \lambda_2$  を固定しておく。

$\theta < \alpha$  とする。次のような  $Y \in L_{\lambda_2}[A \cap \alpha]$  を作ることが目的である：

$$\begin{cases} Y < L_{\lambda_1}[A \cap \alpha]. \\ Y \cap \alpha \text{ は順序数で、} \theta \leq Y \cap \alpha < \alpha. \\ \alpha, A \cap \alpha, \tau, D_\tau, p_\tau \in Y. \end{cases}$$

まず、 $L_{\lambda_1}[A \cap \alpha]$  の標準的な整列順序  $<_L$  を固定しておく。すると、 $<_L \in L_{\lambda_2}[A \cap \alpha]$  である。以下、 $L_{\lambda_2}[A \cap \alpha]$  の中で話を進める。

$Y_n, \beta_n$  ( $n < \omega$ ) を次のように定める：まず、

$$Y_0 = \theta \cup \{\alpha, A \cap \alpha, \tau, D_\tau, p_\tau\}$$

$$\beta_0 = \sup(Y_0 \cap \alpha)$$

とし、

$$Y_{n+1} = Y_n \cup \beta_n \cup \{x \in L_{\lambda_1}[A \cap \alpha] \mid x \text{ は} \dots\}$$

$$\beta_{n+1} = \sup(Y_{n+1} \cap \alpha)$$

とする。 $Y_{n+1}$  の定義式における“ $x$  は  $\dots$ ”は、次のものである：

集合論言語  $\mathcal{L}$  のある formula  $\varphi(v_1, \dots, v_k, v_{k+1})$  と  $a_1, \dots, a_k \in Y_n \cup \beta_n$  に対して、  
 $x = \min_{<L} \{y \in L_{\lambda_1}[A \cap \alpha] \mid L_{\lambda_1}[A \cap \alpha] \models \varphi(a_1, \dots, a_k, y)\}$   
 すると、 $n < \omega$  に対して、

$$\beta_n, Y_n \subseteq Y_{n+1}, \quad \text{及び、} \beta_n \leq \beta_{n+1} \leq \alpha < \lambda_1$$

である。また、列  $\langle Y_n \mid n < \omega \rangle$  と  $\langle \beta_n \mid n < \omega \rangle$  は、共に  $\Sigma_1^{L_{\lambda_2}[A \cap \alpha]}$  である。  
 さて、 $Y = \bigcup \{Y_n \mid n < \omega\}$  とおくと、 $Y \prec L_{\lambda_1}[A \cap \alpha]$ 。また、

$$\theta, \alpha, A \cap \alpha, \tau, D_\tau, p_\tau \in Y_0 \subseteq Y$$

である。さらに、 $\bar{\alpha} = \sup\{\beta_n \mid n < \omega\}$  とすると、

$$Y \cap \alpha = \bigcup_{n < \omega} (Y_{n+1} \cap \alpha) \supseteq \bigcup_{n < \omega} \beta_n = \bar{\alpha}$$

であり、

$$Y \cap \alpha = \bigcup_{n < \omega} (Y_n \cap \alpha) \subseteq \bigcup_{n < \omega} \beta_{n+1} = \bar{\alpha}$$

だから、 $Y \cap \alpha = \bar{\alpha}$  である。 $\bar{\alpha} < \alpha$  を示す。

Claim. 各  $n < \omega$  に対して、 $L_{\lambda_2}[A \cap \alpha] \models |Y_n| < \alpha \wedge \beta_n < \alpha$ 。

証明.  $\lambda \in S_\alpha$ ,  $\lambda_2 < \lambda$  により、

(1)  $L_{\lambda_2}[A \cap \alpha] \models \alpha > \omega \wedge \alpha$  は regular cardinal

であることに注意する。 $n$  についての帰納法で、claim を示す。まず、 $n = 0$  のときは明らかである。そこで、

$$L_{\lambda_2}[A \cap \alpha] \models |Y_n| < \alpha \wedge \beta_n < \alpha$$

と仮定する。このとき、 $Y_{n+1}$  の定義と、(1) により、

$$L_{\lambda_2}[A \cap \alpha] \models |Y_{n+1}| < \alpha.$$

また、このことから、 $L_{\lambda_2}[A \cap \alpha] \models |Y_{n+1} \cap \alpha| < \alpha$  なので、再び (1) により、

$$L_{\lambda_2}[A \cap \alpha] \models \beta_{n+1} < \alpha$$

である。

この claim 及び、claim の証明中の (1) によって、 $L_{\lambda_2}[A \cap \alpha] \models \bar{\alpha} < \alpha$ 、即ち、 $\bar{\alpha} < \alpha$  がわかる。

そこで、 $\pi^{-1} : Y \cong L_\beta[B]$ ,  $B = \pi^{-1}[Y \cap A \cap \alpha]$  とする。まず、 $Y \cap \alpha = \bar{\alpha}$  だから、 $\pi^{-1} \upharpoonright \bar{\alpha} = id$ 。従って、

$$B = \pi^{-1}[Y \cap A \cap \alpha] = \pi^{-1}[A \cap \bar{\alpha}] = A \cap \bar{\alpha}$$

となるので、

$$\pi : L_\beta[A \cap \bar{\alpha}] \cong Y \prec L_{\lambda_1}[A \cap \alpha]$$

である。また、 $\pi(\bar{\alpha}) = \alpha$  でもある。今、 $\nu = \pi^{-1}(\tau)$  とする。 $\bar{\alpha} = \alpha_\nu$ ,  $\nu \triangleleft \tau$  を証明すれば、

$$\theta \leq \alpha_\nu, \quad \alpha_\nu \in \{\alpha_\eta \mid \eta \triangleleft \tau\}$$

なので、(M4) はいえたことになる。その証明は殆ど (M3) と同じであるので省略する。唯、 $\pi$  が elementary embedding であるので、次のことがいえている:

$$x = \pi^{-1}(A \cap \alpha) \text{ とすると、 } x = A \cap \bar{\alpha}. \text{ 従って、 } \pi(A \cap \bar{\alpha}) = A \cap \alpha.$$

$$\pi(L_\nu[A \cap \bar{\alpha}]) = L_\tau[A \cap \alpha]$$

$$(\pi \upharpoonright \nu)^\wedge = \pi \upharpoonright L_\nu[A \cap \bar{\alpha}]$$

これらのことにより、 $D_\nu = \pi^{-1}(D_\tau)$ ,  $p_\nu = \pi^{-1}(p_\tau)$  等もわかる。さらに、

$$\sigma_{\nu\tau} = \pi \upharpoonright D_\nu$$

である。このようなことから、 $\bar{\alpha} = \alpha_\nu$ ,  $\nu \triangleleft \tau$  が証明できるわけである。尚、 $\pi$  が elementary embedding なので、その証明は、(M3) よりも簡単になる。

最後に、 $Y$  の作り方が  $\Sigma_1^{L_{\lambda_2}[A \cap \alpha]}$  であることに注意しておく。このことは、次の節で用いることになる。

(M5).  $\{\alpha_\nu \mid \nu \triangleleft \tau\}$  が unbounded in  $\alpha_\tau$  であるとする。 $\nu \triangleleft \tau$  に対して、 $\pi_{\nu\tau} = \sigma_{\nu\tau} \upharpoonright (\nu + 1)$  であったから、 $\pi_{\nu\tau} \text{“}\nu = \sigma_{\nu\tau} \text{“}\nu$ . さて、(M3) の証明の最初に書いたように、

$$\text{range}(\sigma_{\nu\tau}) = M_{\alpha_\tau}[A \cap \alpha_\tau]^{D_\tau}(\alpha_\nu \cup p_\tau)$$

であり、 $\sigma_{\nu\tau}$  が順序保存であることと、 $\sigma_{\nu\tau}(\nu) = \tau$  とを併せれば、

$$\pi_{\nu\tau} \text{“}\nu = \tau \cap M_{\alpha_\tau}[A \cap \alpha_\tau]^{D_\tau}(\alpha_\nu \cup p_\tau)$$

である。よって、 $\alpha_\tau = \sup\{\alpha_\nu \mid \nu \triangleleft \tau\}$  により、

$$\tau = \bigcup \{\pi_{\nu\tau} \text{“}\nu \mid \nu \triangleleft \tau\}$$

は容易にわかる。

(M6).  $\bar{\nu}$  が  $S_{\alpha_\nu}$  の limit point であるとし、 $\bar{\nu} \triangleleft \nu$  とする。さらに、

$$\nu' = \sup(\sigma_{\bar{\nu}\nu} \text{“}\bar{\nu})$$

とする。 $\bar{\alpha} = \alpha_{\bar{\nu}}$ ,  $\alpha = \alpha_\nu$  としておく。 $\bar{\alpha} < \alpha$  である。このとき、

$$\bar{\nu} \triangleleft \nu', \quad \pi_{\bar{\nu}\nu'} \upharpoonright \bar{\nu} = \pi_{\bar{\nu}\nu} \upharpoonright \bar{\nu}$$

をいう。まず、 $\nu' \leq \nu$  は明らかである。もし、 $\nu' = \nu$  ならば問題はないので、 $\nu' < \nu$  のときを考える。 $\nu' = \sup\{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\tau}) \mid \bar{\tau} \in S_{\bar{\alpha}} \cap \bar{\nu}\}$  であるから、(M1)、及び (M0) の (a) により、

$$\nu' \in S_\alpha$$

である。今、 $\eta = \sup(\sigma_{\bar{\nu}\nu} "D_{\bar{\nu}})$  とおくと、明らかに  $\eta \leq D_{\nu}$  である。また、補題 3.11. により、 $D_{\bar{\nu}}$  が limit ordinal なので、

$\eta$  は limit ordinal

$$p_{\nu} = \sigma_{\bar{\nu}\nu}[p_{\bar{\nu}}] \subseteq \eta$$

である。また、 $\sigma_{\bar{\nu}\nu} : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{D_{\bar{\nu}}} \rightarrow \mathcal{M}_{\alpha}[A \cap \alpha]^{D_{\nu}}$  mono であるから、

$$\sigma_{\bar{\nu}\nu} : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{D_{\bar{\nu}}} \rightarrow \mathcal{M}_{\alpha}[A \cap \alpha]^{\eta} \text{ mono}$$

である。(I. 補題 1.6.)

Claim.1.  $\sigma_{\bar{\nu}\nu} : (D_{\bar{\nu}}, \bar{\alpha}, A \cap \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \prec_{\exists \text{prop.}} (\eta, \alpha, A \cap \alpha, \alpha)$ .

証明. まず、 $\sigma_{\bar{\nu}\nu}$  の定義によって、

$$\sigma_{\bar{\nu}\nu} : (D_{\bar{\nu}}, \bar{\alpha}, A \cap \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \prec_{\exists \text{prop.}} (D_{\nu}, \alpha, A \cap \alpha, \alpha)$$

であることに注意する。従って、 $\alpha \subseteq \eta \subseteq D_{\nu}$  だから、補題 2.9. により、

$$\sigma_{\bar{\nu}\nu} : (D_{\bar{\nu}}, \bar{\alpha}, A \cap \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \prec_{\text{prop.}} (\eta, \alpha, A \cap \alpha, \alpha).$$

今、 $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$  を prop.formula とし、 $\vec{a} \in D_{\bar{\nu}}$  とする。 $\sigma_{\bar{\nu}\nu}$  を単に  $\sigma$  と書くと、

$$(D_{\bar{\nu}}, \bar{\alpha}, A \cap \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \models \exists \vec{y} \varphi(\vec{a}, \vec{y}) \text{ ならば } (\eta, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \exists \vec{y} \varphi(\sigma(\vec{a}), \vec{y})$$

は容易にわかる。そこで逆を証明するために、

$$(\eta, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \exists \vec{y} \varphi(\sigma(\vec{a}), \vec{y})$$

とする。すると、 $\eta \subseteq D_{\nu}$  なので、補題 2.9. によって

$$(D_{\nu}, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \exists \vec{y} \varphi(\sigma(\vec{a}), \vec{y})$$

であるから、 $\sigma^{-1}$  でもどせば、

$$(D_{\bar{\nu}}, \bar{\alpha}, A \cap \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \models \exists \vec{y} \varphi(\vec{a}, \vec{y}).$$

これで、claim は証明された。

さて、ここで、 $X = \mathcal{M}_{\alpha}[A \cap \alpha]^{\eta}(\alpha \cup p_{\nu})$  とする。すると、次のことがいえる。

Claim.2.  $\text{range}(\sigma_{\bar{\nu}\nu}) \subseteq X$ .

証明.  $\xi \in D_{\bar{\nu}} = \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{D_{\bar{\nu}}}(\bar{\alpha} \cup p_{\bar{\nu}})$  とすると、 $D_{\bar{\nu}}$  は limit ordinal なので、

$$\xi \in \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\zeta}(\bar{\alpha} \cup p_{\bar{\nu}})$$



となる  $\zeta < D_{\bar{\nu}}$  がとれる。すると、

$$\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi) \in M_{\alpha}[A \cap \alpha]^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\zeta)}(\bar{\alpha} \cup p_{\nu}) \subseteq X$$

となるので、これで、claim は証明された。

Claim.3.  $X \cap \nu = \nu'$ .

証明.  $x \in X \cap \nu$  とする。すると、ある  $\vec{\beta} < \alpha$  をとり、

$$x = F^{\eta}(\vec{\beta}, \vec{p}_{\nu}), \quad F \text{ は } M_{\alpha}[A \cap \alpha] \text{ の関数の合成}$$

とできる。尚、 $\vec{p}_{\nu}$  は  $p_{\nu}$  の元の列を表す。 $\eta$  は limit ordinal だから、 $\tau < \eta$  を十分大きくとって、

$$x = F^{\tau}(\vec{\beta}, \vec{p}_{\nu})$$

とできる。さらに、 $\eta = \sup(\sigma_{\bar{\nu}\nu} " D_{\bar{\nu}})$  なので、 $\tau \in \text{range}(\sigma_{\bar{\nu}\nu})$  としても良い。 $\bar{\tau} < D_{\bar{\nu}}$  を、 $\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\tau}) = \tau$  となるようにしておく。また、 $\bar{\tau} < D_{\bar{\nu}}$  は十分大きいものとしておく。即ち、

$$p_{\bar{\nu}} \subseteq \bar{\tau} \ \& \ \bar{\alpha} \in M_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\tau}}(\bar{\alpha} \cup p_{\bar{\nu}})$$

をみたしている。そこで

$$\bar{\theta} = \sup[\bar{\nu} \cap M_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\tau}}(\bar{\alpha} \cup p_{\bar{\nu}})]$$

とすると、 $\bar{\tau} < D_{\bar{\nu}}$  なので、 $D_{\bar{\nu}}$  の最小性から、 $\bar{\theta} < \bar{\nu}$  であり、

$$(D_{\bar{\nu}}, \bar{\alpha}, A \cap \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \models \forall x (x < \bar{\nu} \wedge x \in M^{\bar{\tau}}(\square \cup \{p_{\bar{\nu}}^1, \dots, p_{\bar{\nu}}^n\}) \rightarrow x \leq \bar{\theta})$$

よって、 $\theta = \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\theta})$  とすれば、 $\theta < \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\nu}) = \nu'$  であり、

$$(D_{\nu}, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \forall x (x < \nu \wedge x \in M^{\tau}(\square \cup \{p_{\nu}^1, \dots, p_{\nu}^n\}) \rightarrow x \leq \theta)$$

となる。今、 $x = F^{\tau}(\vec{\beta}, \vec{p}_{\nu}) \in M_{\alpha}[A \cap \alpha]^{\tau}(\alpha \cup p_{\nu})$ 、 $x < \nu$  であったから、

$$x \leq \theta = \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\theta}) < \sup(\sigma_{\bar{\nu}\nu} " \bar{\nu}) = \nu'$$

これで、 $X \cap \nu \subseteq \nu'$  がわかる。

逆に、 $\xi \in \nu'$  とする。 $\bar{\delta} < \bar{\nu}$  をとり、 $\xi < \delta = \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\delta})$  とすることができる。 $\bar{\delta} < \bar{\nu}$  だから、 $\bar{f} \in L_{\bar{\nu}}[A \cap \bar{\alpha}]$ 、 $\bar{f} : \bar{\alpha} \rightarrow \bar{\delta}$  onto となる  $\bar{f}$  がある。そこで、 $\bar{t} < \bar{\nu}$  を、 $D_{A \cap \bar{\alpha}}^{\bar{\alpha}}(\bar{t}) = \bar{f}$  なる  $\text{term}^{\bar{\alpha}}$  とし、 $t = \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{t})$  とする。すると、

$$f = D_{A \cap \alpha}^{\alpha}(t) = (\sigma_{\bar{\nu}\nu} \upharpoonright \bar{\nu})^{\wedge}(\bar{f})$$

だから、 $f: \alpha \rightarrow \delta$  onto である。よって、 $\xi = f(\beta)$  となる  $\beta < \alpha$  が存在する。また、 $t \in \text{range}(\sigma_{\bar{\nu}\nu}) \subseteq X$  である。従って、補題 3.9. と同様にして、 $K((\exists_x^\delta x = t(o_\beta)))$  と  $C_i$  の組合せで、 $\xi \in X$  となる。もちろん、 $\xi < \nu' < \nu$  なので、 $\xi \in X \cap \nu$  となり、 $\nu' \subseteq X \cap \nu$  を得る。

この claim により、 $\alpha \in \nu' \subseteq X$  がわかる。そこで、

$$\pi_1: D \rightarrow X \quad \text{collapsing map}$$

とする。すると、claim.3. により、 $\pi_1 \upharpoonright \nu' = id$  である。また、 $\nu \in \text{range}(\sigma_{\bar{\nu}\nu}) \subseteq X$  なので、 $\pi_1^{-1}(\nu) = \nu'$ , i.e.,  $\pi_1(\nu') = \nu$  となっている。また、CP により、

$$(1) \quad \pi_1: \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^D \rightarrow \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^\eta \quad \text{mono}$$

であり、従って、

$$(2) \quad D = \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha](\alpha \cup q), \quad q = \pi_1^{-1}[p_\nu].$$

である。また、

$$(3) \quad \pi_1: (D, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \prec_{\text{prop.}} (\eta, \alpha, A \cap \alpha, \alpha)$$

であることはすぐわかる。

さらに、 $\sigma = \pi_1^{-1} \circ \sigma_{\bar{\nu}\nu}$  とする。claim.2. により、これは定義できることに注意する。すると、 $\sigma: D_{\bar{\nu}} \rightarrow D$  であり、 $\sigma \upharpoonright \bar{\alpha} = id$ ,  $\sigma(\bar{\alpha}) = \alpha$ ,  $\sigma(\bar{\nu}) = \nu'$  がいえる。また、

$$\sigma_{\bar{\nu}\nu} \upharpoonright \bar{\nu} = \sigma \upharpoonright \bar{\nu}$$

である。なぜならば、 $\xi < \bar{\nu}$  に対しては、 $\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi) \in X \cap \nu = \nu'$  だから、

$$\sigma(\xi) = \pi_1^{-1} \circ \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi) = id^{-1} \circ \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi) = \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi)$$

となるからである。このことにより、

$$(4) \quad (\sigma \upharpoonright \bar{\nu})^\wedge = (\sigma_{\bar{\nu}\nu} \upharpoonright \bar{\nu})^\wedge$$

であり、また、 $(\sigma_{\bar{\nu}\nu} \upharpoonright \bar{\nu})^\wedge: L_{\bar{\nu}}[A \cap \bar{\alpha}] \prec_0 L_{\nu'}[A \cap \alpha]$ , cofinal なので

$$(5) \quad (\sigma \upharpoonright \bar{\nu})^\wedge: L_{\bar{\nu}}[A \cap \bar{\alpha}] \prec_Q L_{\nu'}[A \cap \alpha]$$

である。

Claim.4.  $\sigma: (D_{\bar{\nu}}, \bar{\alpha}, A \cap \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \prec_{\exists \bar{x} \text{ prop.}} (D, \alpha, A \cap \alpha, \alpha)$ .

証明.Claim.1. と (3) を用いれば、prop.formula  $\varphi(\vec{x})$  と  $\vec{a} < D_{\bar{\nu}}$  に対して、

$$\begin{aligned} (D_{\bar{\nu}}, \bar{\alpha}, A \cap \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \models \varphi(\vec{a}) &\text{ iff } (\eta, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \varphi(\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\vec{a})) \\ &\text{ iff } (D, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \varphi(\sigma(\vec{a})) \end{aligned}$$

はすぐわかる。従って、

$$\sigma: (D_{\bar{\nu}}, \bar{\alpha}, A \cap \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \prec_{\text{prop.}} (D, \alpha, A \cap \alpha, \alpha)$$

である。これより、prop.formula  $\psi(\vec{x}, \vec{y})$  と  $\vec{b} < D_{\bar{\nu}}$  に対して

$$(D_{\bar{\nu}}, \bar{\alpha}, A \cap \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \models \exists \vec{x} \psi(\vec{x}, \vec{b}) \text{ ならば } (D, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \exists \vec{x} \psi(\vec{x}, \sigma(\vec{b}))$$

は容易である。そこで、逆に

$$(D, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \exists \vec{x} \psi(\vec{x}, \sigma(\vec{b}))$$

とする。  $\vec{x} \in D$  で、  $(D, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \psi(\vec{x}, \sigma(\vec{b}))$  となるものを固定する。  $\pi_1$  でうつせば、(3) により、  $(\eta, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \psi(\pi_1(\vec{x}), \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\vec{b}))$ 。従って、

$$(\eta, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \exists \vec{x} \psi(\vec{x}, \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\vec{b}))$$

となるので、claim.1. により、  $\sigma_{\bar{\nu}\nu}^{-1}$  でもどせば、

$$(D_{\bar{\nu}}, \bar{\alpha}, A \cap \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \models \exists \vec{x} \psi(\vec{x}, \vec{b})$$

となり、claim は示される。

Claim.5.  $D = D_{\nu'}$

証明. まず、(2) により、

$$D = M_\alpha[A \cap \alpha]^D(\alpha \cup q), \quad q = \pi_1^{-1}[p_\nu]$$

であった。また、  $\nu' = \pi_1^{-1}(\nu) \in D$  であるから、  $D_{\nu'} \leq D$  はすぐにわかる。そこで、  $D_{\nu'} < D$  であると仮定する。  $p_{\nu'} = \{p_{\nu'}^1, \dots, p_{\nu'}^n\}$  とすると、

$$p_{\nu'}^1, \dots, p_{\nu'}^n < D_{\nu'} < D$$

であるから、

$$\pi_1(p_{\nu'}^1), \dots, \pi_1(p_{\nu'}^n) \in X = M_\alpha[A \cap \alpha]^\eta(\alpha \cup p_\nu)$$

$$\pi_1(D_{\nu'}) \in X \subseteq \eta$$

となる。従って、ある  $\bar{\tau} < D_{\bar{\nu}}$  に対し、  $\tau = \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\tau})$  とすると、

$$\pi_1(p_{\nu'}^1), \dots, \pi_1(p_{\nu'}^n) \in M_\alpha[A \cap \alpha]^\tau(\alpha \cup p_\nu)$$

$$\pi_1(D_{\nu'}) < \tau$$

となる。今、  $\tau \in \text{range}(\sigma_{\bar{\nu}\nu}) \subseteq X = \text{range}(\pi_1)$  に注意すると、  $\pi_1$  の性質(3) により、  $\pi_1^{-1}(\tau) = \sigma(\bar{\tau})$  なので

$$p_{\nu'}^1, \dots, p_{\nu'}^n \in M_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma(\bar{\tau})}(\alpha \cup q)$$

$$D_{\nu'} < \sigma(\bar{\tau})$$

故に

$$\sigma(\bar{\nu}) = \nu' \subseteq M_\alpha[A \cap \alpha]^{D_{\nu'}}(\alpha \cup p_{\nu'})$$

$$\subseteq M_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma(\bar{\tau})}(\alpha \cup q) = M_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma(\bar{\tau})}(\alpha \cup \sigma[p_{\bar{\nu}}])$$

となる。これは、

$$(D, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \forall x (x < \sigma(\bar{\nu}) \rightarrow x \in M^{\sigma(\bar{\tau})}(\square \cup \{\sigma(p_{\bar{\nu}}^1), \dots, \sigma(p_{\bar{\nu}}^m)\}))$$

となる。尚、 $p_{\bar{\nu}} = \{p_{\bar{\nu}}^1, \dots, p_{\bar{\nu}}^m\}$  とした。claim.4. により、 $\sigma^{-1}$ でもどせば

$$(D_{\bar{\nu}}, \bar{\alpha}, A \cap \bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \models \forall x (x < \bar{\nu} \rightarrow x \in M^{\bar{\tau}}(\square \cup \{p_{\bar{\nu}}^1, \dots, p_{\bar{\nu}}^m\}))$$

すなわち、

$$\bar{\nu} \subseteq \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\tau}}(\bar{\alpha} \cup p_{\bar{\nu}})$$

となるが、 $\bar{\tau} < D_{\bar{\nu}}$ だから、これは不合理。従って、 $D_{\nu'} = D$ とならねばならない。

Claim.6.  $q = \pi_1^{-1}[p_{\nu}] = p_{\nu'}$ .

証明.  $D = D_{\nu'}$ がわかったので、 $D_{\nu'} = \mathcal{M}_{\alpha}[A \cap \alpha]^{D_{\nu'}}(\alpha \cup q)$  である。従って、 $p_{\nu'} \leq^* q$  は明らかである。そこで、 $p_{\nu'} <^* q$  と仮定する。  $q \subseteq D = D_{\nu'}$  だから、

$$q \subseteq D_{\nu'} = \mathcal{M}_{\alpha}[A \cap \alpha]^{D_{\nu'}}(\alpha \cup p_{\nu'}).$$

故に、 $\pi_1$ でうつせば、 $D_{\nu'} = D = \text{dom}(\pi_1)$  なので、

$$p_{\nu} \subseteq \mathcal{M}_{\alpha}[A \cap \alpha]^{\eta}(\alpha \cup \pi_1[p_{\nu'}]) \subseteq \mathcal{M}_{\alpha}[A \cap \alpha]^{D_{\nu}}(\alpha \cup \pi_1[p_{\nu'}]).$$

従って、

$$\nu < D_{\nu} = \mathcal{M}_{\alpha}[A \cap \alpha]^{D_{\nu}}(\alpha \cup p_{\nu}) = \mathcal{M}_{\alpha}[A \cap \alpha]^{D_{\nu}}(\alpha \cup \pi_1[p_{\nu'}]).$$

ところが、 $p_{\nu'} <^* q$  だったから、 $\pi_1[p_{\nu'}] <^* \pi_1[q] = p_{\nu}$  となるが、これは  $p_{\nu}$  の最小性に反する。故に、 $q = p_{\nu'}$  である。

以上の claims 及び、(1)-(5) 等によって、 $\sigma : D_{\bar{\nu}} \rightarrow D_{\nu'}$  が、 $\sigma_{\bar{\nu}\nu'}$  の条件の (i)-(vii) をみたすことがわかる。最後に、 $\sigma$  が (viii) をみたすことを示す。そのために、 $\xi < D_{\bar{\nu}}$  を十分大きいとし、

$$\begin{aligned} \bar{\pi} : \bar{\gamma} &\rightarrow \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\xi}(\bar{\alpha} \cup p_{\bar{\nu}}) \\ \pi' : \gamma' &\rightarrow \mathcal{M}_{\alpha}[A \cap \alpha]^{\sigma(\xi)}(\alpha \cup p_{\nu'}) \end{aligned}$$

を collapsing map とする。さらに

$$\pi : \gamma \rightarrow \mathcal{M}_{\alpha}[A \cap \alpha]^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi)}(\alpha \cup p_{\nu})$$

も collapsing map とする。すると、 $\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\gamma}) = \gamma$ 、 $\sigma_{\bar{\nu}\nu} \circ \bar{\pi}^{-1}[p_{\bar{\nu}}] = \pi^{-1}[p_{\nu}]$  である。 $\sigma(\xi) = \pi_1^{-1} \circ \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi)$  であったから、claim.6. により、

$$\pi_1 : \mathcal{M}_{\alpha}[A \cap \alpha]^{\sigma(\xi)}(\alpha \cup p_{\nu'}) \cong \mathcal{M}_{\alpha}[A \cap \alpha]^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi)}(\alpha \cup p_{\nu})$$

は順序同型である。故に、 $\gamma' = \gamma = \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\gamma})$  であるが、(M2) で (viii) を示したときのように、 $\gamma' < \nu'$  となるので、 $\pi_1 \upharpoonright \nu' = \text{id}$  に気をつければ、

$$\gamma' = \pi_1^{-1} \circ \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\gamma}) = \sigma(\bar{\gamma}).$$

また、 $M_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma(\xi)}(\alpha \cup p_{\nu'})$  上では、 $\pi'^{-1} = \pi^{-1} \circ \pi_1$  となるので、claim.6. により、

$$\pi'^{-1}[p_{\nu'}] = \pi^{-1} \circ \pi_1[p_{\nu'}] = \pi^{-1}[p_\nu] = \sigma_{\bar{\nu}\nu} \circ \bar{\pi}^{-1}[p_{\bar{\nu}}]$$

ここで、 $\pi'^{-1}[p_{\nu'}] \subseteq \gamma' < \nu'$  だから、再び  $\pi_1 \upharpoonright \nu'$  により、

$$\sigma_{\bar{\nu}\nu} \circ \bar{\pi}^{-1}[p_{\bar{\nu}}] = \pi_1^{-1} \circ \sigma_{\bar{\nu}\nu} \circ \bar{\pi}^{-1}[p_{\bar{\nu}}] = \sigma \circ \bar{\pi}^{-1}[p_{\bar{\nu}}].$$

これで (viii) がいえたので、 $\sigma = \sigma_{\bar{\nu}\nu'}$ ,  $\bar{\nu} \triangleleft \nu'$  がわかる。

(M7).  $\bar{\nu}$  が  $S_{\bar{\alpha}}$  の limit point で、 $\nu \in S_\alpha$  とし、 $\bar{\nu} \triangleleft \nu$ ,  $\nu = \sup(\pi_{\bar{\nu}\nu}''\bar{\nu})$  とする。さらに、 $\theta$  を

$$\theta \in \bigcap_{\bar{\tau} \in S_{\bar{\alpha}} \cap \bar{\nu}} \{\alpha_\eta \mid \bar{\tau} \trianglelefteq \eta \trianglelefteq \pi_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\tau})\}$$

なるものとする。 $\eta \in S_\theta$  &  $\bar{\nu} \trianglelefteq \eta \trianglelefteq \nu$  なる  $\eta$  の存在を示す。まず、 $\theta$  のとり方により、 $\bar{\alpha} \leq \theta \leq \alpha$  であるが、 $\theta = \bar{\alpha}$  または  $\theta = \alpha$  のときは、それぞれ、 $\eta = \bar{\nu}$ , または  $\eta = \nu$  とすれば良いので、 $\bar{\alpha} < \theta < \alpha$  としておく。

まず、 $\theta$  のとり方から、 $\bar{\tau} \in S_{\bar{\alpha}} \cap \bar{\nu}$  に対し、

$$\eta(\bar{\tau}) = \text{the unique } \eta \in S_\theta \text{ such that } \bar{\tau} \triangleleft \eta \triangleleft \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\tau})$$

を定義することができる。すると、 $\tau = \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\tau})$  としたとき、

$$\eta(\bar{\tau}) = \sigma_{\bar{\tau}, \eta(\bar{\tau})}(\bar{\tau}), \quad \tau = \sigma_{\eta(\bar{\tau}), \tau}(\eta(\bar{\tau}))$$

である。さて、 $\bar{\tau}, \bar{\tau}' \in S_{\bar{\alpha}} \cap \bar{\nu}$ ,  $\bar{\tau} < \bar{\tau}'$  とする。 $\tau = \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\tau})$ ,  $\tau' = \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\tau}')$  とする。すると、(M2) により、 $\sigma_{\bar{\nu}\nu} \upharpoonright \bar{\tau}' = \sigma_{\bar{\tau}', \tau'} \upharpoonright \bar{\tau}'$  なので、 $\tau = \sigma_{\bar{\tau}', \tau'}(\bar{\tau})$  であり、

$$\bar{\tau} \triangleleft \eta(\bar{\tau}) \triangleleft \tau, \quad \bar{\tau}' \triangleleft \eta(\bar{\tau}') \triangleleft \tau'$$

である。今、 $\eta_{\bar{\tau}} = \sigma_{\bar{\tau}', \eta(\bar{\tau}')}(\bar{\tau})$  とする。 $\eta_{\bar{\tau}} = \eta(\bar{\tau})$  をいう。まず、 $\bar{\tau} < \bar{\tau}'$  なので、明らかに、 $\eta_{\bar{\tau}} < \eta(\bar{\tau}')$ 。また、

$$\sigma_{\eta(\bar{\tau}'), \tau'}(\eta_{\bar{\tau}}) = \sigma_{\eta(\bar{\tau}'), \tau'} \circ \sigma_{\bar{\tau}', \eta(\bar{\tau}')}(\bar{\tau}) = \sigma_{\bar{\tau}', \tau'}(\bar{\tau}) = \tau$$

だから、(M2) により、 $\eta_{\bar{\tau}} \triangleleft \tau$  である。故に、 $\eta_{\bar{\tau}}, \eta(\bar{\tau}) \triangleleft \tau$  となるので、 $\triangleleft$  が tree order なことと、 $\eta_{\bar{\tau}}, \eta(\bar{\tau}) \in S_\theta$  により、 $\eta_{\bar{\tau}} = \eta(\bar{\tau})$  となる。このことから、 $\eta(\bar{\tau}) < \eta(\bar{\tau}')$  もわかる。また、(M2) により、

$$(1) \quad \begin{cases} \sigma_{\bar{\tau}, \eta(\bar{\tau})} \upharpoonright \bar{\tau} = \sigma_{\bar{\tau}', \eta(\bar{\tau}')} \upharpoonright \bar{\tau} \\ \sigma_{\eta(\bar{\tau}), \tau} \upharpoonright \eta(\bar{\tau}) = \sigma_{\eta(\bar{\tau}'), \tau'} \upharpoonright \eta(\bar{\tau}) \end{cases}$$

となることもわかる。

そこで、 $\eta = \sup\{\eta(\bar{\tau}) \mid \bar{\tau} \in S_{\bar{\alpha}} \cap \bar{\nu}\}$  とする。すると、(M1) により、 $S_\theta$  が closed なので、 $\eta \in S_\theta$  である。 $\bar{\nu} \triangleleft \eta \triangleleft \nu$  であることを示すのであるが、 $\triangleleft$  が tree order で、 $\alpha_{\bar{\nu}} = \bar{\alpha} < \theta = \alpha_\eta$  なので、 $\eta \triangleleft \nu$  をいえば十分である。まず

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \bigcup \{\sigma_{\bar{\tau}, \eta(\bar{\tau})} \upharpoonright \bar{\tau} \mid \bar{\tau} \in S_{\bar{\alpha}} \cap \bar{\nu}\} \\ \sigma_1 &= \bigcup \{\sigma_{\eta(\bar{\tau}), \tau} \upharpoonright \eta(\bar{\tau}) \mid \bar{\tau} \in S_{\bar{\alpha}} \cap \bar{\nu}\} \quad (\tau \text{ は } \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\tau}) \text{ である}) \end{aligned}$$

とすると、先の (1) により、 $\sigma_0, \sigma_1$  は共に関数となることがわかる。また、 $\bar{\nu}, \eta$  の性質により、

$$\sigma_0 : \bar{\nu} \rightarrow \eta, \quad \sigma_1 : \eta \rightarrow \nu$$

である。明らかに

$$\hat{\sigma}_0 : L_{\bar{\nu}}[A \cap \bar{\alpha}] \prec_0 L_{\eta}[A \cap \theta]$$

$$\hat{\sigma}_1 : L_{\eta}[A \cap \theta] \prec_0 L_{\nu}[A \cap \alpha]$$

であるが、 $\sigma_0, \sigma_1$  は共に cofinal なので、

$$(2) \quad \begin{cases} \hat{\sigma}_0 : L_{\bar{\nu}}[A \cap \bar{\alpha}] \prec_Q L_{\eta}[A \cap \theta] \\ \hat{\sigma}_1 : L_{\eta}[A \cap \theta] \prec_Q L_{\nu}[A \cap \alpha] \end{cases}$$

である。

Claim.1.  $\text{range}(\sigma_{\bar{\nu}\nu}) \cap \nu \subseteq \text{range}(\sigma_1)$

証明.  $y \in \text{range}(\sigma_{\bar{\nu}\nu}) \cap \nu$  とし、 $y = \sigma_{\bar{\nu}\nu}(x)$ ,  $x < D_{\bar{\nu}}$  とする。 $\nu = \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\nu})$  だから、 $x < \bar{\nu}$ . ところで、 $\bar{\nu}$  は  $S_{\bar{\alpha}}$  の limit point なので、

$$x < \bar{\tau}, \quad \bar{\tau} \in S_{\bar{\alpha}} \cap \bar{\nu}$$

となる  $\bar{\tau}$  がとれる。すると、 $\tau = \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\tau})$  として

$$\sigma_1 \circ \sigma_0(x) = \sigma_{\eta(\bar{\tau}), \tau} \circ \sigma_{\bar{\tau}, \eta(\bar{\tau})}(x) = \sigma_{\bar{\tau}\tau}(x).$$

故に、(M2) により、

$$y = \sigma_{\bar{\nu}\nu}(x) = \sigma_{\bar{\tau}\tau}(x) = \sigma_1 \circ \sigma_0(x) \in \text{range}(\sigma_1)$$

となる。

Claim.2.  $\sigma_{\bar{\nu}\nu} : D_{\bar{\nu}} \rightarrow D_{\nu}$  については、 $D_{\nu} = \sup(\sigma_{\bar{\nu}\nu} " D_{\bar{\nu}})$ .

証明.  $D = \sup(\sigma_{\bar{\nu}\nu} " D_{\bar{\nu}})$  とすると、明らかに、 $D \leq D_{\nu}$  である。

今、 $\xi < \nu$  を任意にとると、 $\nu = \sup(\sigma_{\bar{\nu}\nu} " \bar{\nu})$  により、

$$\xi < \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\beta) < \nu$$

となる  $\beta < \bar{\nu}$  がとれる。

$$\beta < D_{\bar{\nu}} = M_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{D_{\bar{\nu}}}(\bar{\alpha} \cup p_{\bar{\nu}})$$

だから、 $D_{\bar{\nu}}$  が limit ordinal であることから、

$$\beta \in M_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\zeta}(\bar{\alpha} \cup p_{\bar{\nu}})$$

となる  $\zeta < D_{\bar{\nu}}$  がとれる。従って、

$$\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\beta) \in M_{\alpha}[A \cap \alpha]^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\zeta)}(\alpha \cup p_{\nu}) \subseteq M_{\alpha}[A \cap \alpha]^D(\alpha \cup p_{\nu}).$$

故に、このことから、

$$\nu \cap M_{\alpha}[A \cap \alpha]^D(\alpha \cup p_{\nu}) \text{ は cofinal in } \nu$$

がわかる。また、上の議論で、 $\beta = \bar{\alpha}$  とすると

$$\alpha \in M_{\alpha}[A \cap \alpha]^D(\alpha \cup p_{\nu})$$

もいえる。従って、 $D_{\nu} \leq D$  であるから、これで、 $D = D_{\nu}$  となる。

Claim.3.  $\forall x < \nu \exists \bar{y} < D_{\bar{\nu}} \exists \beta < D_{\bar{\nu}} (x < \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{y}) \subseteq M_{\alpha}[A \cap \alpha]^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\beta)}(\alpha \cup p_{\nu}))$ .

証明.  $x < \nu$  とする。すると、 $\nu = \sup(\sigma_{\bar{\nu}\nu} " \bar{\nu})$  だから、

$$x < \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{y}) < \nu$$

となる  $\bar{y} < \bar{\nu}$  がとれる。 $\bar{\alpha} \leq \bar{y}$  として良い。また、 $\bar{\nu}$  は  $S_{\bar{\alpha}}$  の limit point なので、 $\bar{y} < \bar{\tau} < \bar{\nu}$ ,  $\bar{\tau} \in S_{\bar{\alpha}}$  なる  $\bar{\tau}$  を固定しておく。

$L_{\bar{\tau}}[A \cap \bar{\alpha}] \models \bar{\alpha}$  は最大の cardinal.

だから、 $\bar{f} \in L_{\bar{\tau}}[A \cap \bar{\alpha}]$ ,  $\bar{f}: \bar{\alpha} \rightarrow \bar{y}$  onto となる  $\bar{f}$  がある。そこで、

$$D_{A \cap \bar{\alpha}}^{\bar{\alpha}}(\bar{t}) = \bar{f}, \quad \bar{t} < \bar{\tau}$$

となる  $\bar{t} \in \text{Term}^{\bar{\alpha}}$  をとる。  $t = \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{t})$ ,  $f = D_{A \cap \alpha}^{\alpha}(t)$  とすると、

$$f = (\sigma_{\bar{\nu}\nu} \upharpoonright \bar{\nu})^{\wedge}(\bar{f})$$

だから、 $y = \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{y})$  とおけば、

$$f: \alpha \rightarrow y \text{ onto}$$

である。また、 $\tau = \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\tau})$  とすれば、 $\tau \in S_{\alpha} \cap \nu$  であり、 $t < \tau$  である。よって、 $\bar{\beta} < D_{\bar{\nu}}$  を、

$$p_{\bar{\nu}} \subseteq \bar{\beta}, \quad \bar{\tau}, \bar{t}, \bar{\alpha}, \bar{y} \in M_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\beta}}(\bar{\alpha} \cup p_{\bar{\nu}})$$

となるようにとれば、 $p_{\nu} \subseteq \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\beta})$  であり、

$$\tau, t, \alpha, y \in M_{\alpha}[A \cap \alpha]^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\beta})}(\alpha \cup p_{\nu})$$

となる。さて、 $\alpha, y, t < \tau$ ,  $\tau \in S_{\alpha} \cap \nu$  であり、 $f = D_{A \cap \alpha}^{\alpha}(t)$  については、

$$f: \alpha \rightarrow y \text{ onto}$$

であったから、補題 3.9. の証明と同様にして、

$$y \subseteq M_{\alpha}[A \cap \alpha]^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\beta})}(\alpha \cup p_{\nu})$$

となる。これで、claim は証明された。尚、 $\bar{\beta}, \bar{y}$  はいくらでも大きくとれることを注意しておく。

今、

$$X = M_{\alpha}[A \cap \alpha]^{D_{\nu}}(\theta \cup p_{\nu})$$

とし、

$$\sigma: D \rightarrow X \text{ collapsing map}$$

とする。すると、次のことがいえる。

Claim.4.  $X \cap \nu = \text{range}(\sigma_1)$ .

証明. まず、 $x \in X \cap \nu$  とする。Claim.3. により、

$$x < \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{y}) \subseteq M_{\alpha}[A \cap \alpha]^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\beta})}(\alpha \cup p_{\nu})$$

となる  $\bar{y} < \bar{\nu}$ ,  $\bar{\beta} < D_{\bar{\nu}}$  をとっておく。さらに、

$$p_{\bar{\nu}} \subseteq \bar{\beta}, \quad \bar{\alpha} \in M_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\beta}}(\bar{\alpha} \cup p_{\bar{\nu}})$$

としておく。また、claim.2. により、 $D_{\nu} = \sup(\sigma_{\bar{\nu}\nu} " D_{\bar{\nu}})$  なので、

$$x \in X = M_{\alpha}[A \cap \alpha]^{D_{\nu}}(\theta \cup p_{\nu})$$

により、 $\bar{\beta}$  については、

$$x \in M_{\alpha}[A \cap \alpha]^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\beta})}(\theta \cup p_{\nu})$$

をみたすものとする。すると、 $p_{\nu} = \{\vec{p}_{\nu}\}$  とすれば、 $\theta_1, \dots, \theta_n < \theta$  をとって、

$$x = F^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\beta})}(\theta_1, \dots, \theta_n, \vec{p}_{\nu}), \quad F \text{ は } M_{\alpha}[A \cap \alpha] \text{ の関数の合成}$$

と書くことができる。今、

$$\begin{aligned}\bar{\pi} : \bar{\gamma} &\rightarrow \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\bar{\beta}}(\bar{\alpha} \cup p_{\bar{\nu}}) \\ \pi : \gamma &\rightarrow \mathcal{M}_{\alpha}[A \cap \alpha]^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\beta})}(\alpha \cup p_{\nu})\end{aligned}$$

を共に collapsing map とする。すると、

$$\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\gamma}) = \gamma, \quad \sigma_{\bar{\nu}\nu}\bar{\pi}^{-1}[p_{\bar{\nu}}] = \pi^{-1}[p_{\nu}]$$

である。ところで、 $\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{y}) \subseteq \mathcal{M}_{\alpha}[A \cap \alpha]^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\beta})}(\alpha \cup p_{\nu})$  だから、

$$x = \pi^{-1}(x) \in \gamma = \mathcal{M}_{\alpha}[A \cap \alpha]^{\gamma}(\alpha \cup \pi^{-1}[p_{\nu}])$$

さて、 $\bar{\gamma} < \bar{\nu}$  なので、 $\gamma' = \sigma_0(\bar{\gamma})$  とすると、 $\sigma_1(\gamma') = \sigma_1 \circ \sigma_0(\bar{\gamma}) = \gamma$  である。また、 $\pi^{-1}[p_{\nu}] = \sigma_{\bar{\nu}\nu}\bar{\pi}^{-1}[p_{\bar{\nu}}]$  なので、claim.1. により、

$$\pi^{-1}[p_{\nu}] \subseteq \text{range}(\sigma_1).$$

そこで、 $\sigma_1[q] = \pi^{-1}[p_{\nu}]$ ,  $q \subseteq \eta$  となる  $q$  をとる。 $q = \{\bar{q}\}$  とする。

$\pi$  は monomorphism であるから、 $x = F^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\beta})}(\theta_1, \dots, \theta_n, \bar{p}_{\nu})$  を  $\pi^{-1}$  でもどせば、

$$x = F^{\gamma}(\theta_1, \dots, \theta_n, \pi^{-1}(\bar{p}_{\nu})) = F^{\sigma_1(\gamma')}(\theta_1, \dots, \theta_n, \sigma_1(\bar{q})).$$

ここで、 $\sigma_1$  の定義と、I の補題 1.8. により、

$$\sigma_1 : \mathcal{M}_{\theta}[A \cap \theta]^{\eta} \rightarrow \mathcal{M}_{\alpha}[A \cap \alpha]^{\nu} \quad \text{mono}$$

であることに注意すれば、 $\bar{F}$  を  $\mathcal{M}_{\theta}[A \cap \theta]$  の関数の合成で、 $F$  に対応するものとするとき、 $\bar{F}^{\gamma'}(\theta_1, \dots, \theta_n, \bar{q})$  が定義されていることがわかり、しかも、

$$x = \sigma_1(\bar{F}^{\gamma'}(\theta_1, \dots, \theta_n, \bar{q})) \in \text{range}(\sigma_1)$$

となる。これで、 $X \cap \nu \subseteq \text{range}(\sigma_1)$  となる。

逆に、 $x \in \eta = \text{dom}(\sigma_1)$  とする。 $x < \theta$  なら、

$$\sigma_1(x) = \text{id}(x) = x < \theta$$

となるので、明らかに、 $\sigma_1(x) \in X \cap \nu$ 。そこで、 $\theta \leq x$  とする。すると、 $\alpha = \sigma_1(\theta) \leq \sigma_1(x)$  である。 $\bar{y} < \bar{\nu}$  を大きくとって、

$$\alpha \leq \sigma_1(x) < \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{y}) < \nu$$

とし、 $y = \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{y})$  とおく。 $\alpha = \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\alpha})$  なので、 $\bar{\alpha} < \bar{y} < \bar{\nu}$  である。そこで、 $\bar{y} < \bar{\tau} < \bar{\nu}$  なる  $\bar{\tau} \in S_{\bar{\alpha}}$  をとる。

$$L_{\bar{\tau}}[A \cap \bar{\alpha}] \models \exists f(f : \bar{\alpha} \rightarrow \bar{y} \text{ onto})$$



だから、 $\bar{f} \in L_{\bar{\tau}}[A \cap \bar{\alpha}]$ ,  $\bar{f} : \bar{\alpha} \rightarrow \bar{y}$  onto とし、 $\bar{t} < \bar{\tau}$  を、 $\bar{t} \in \text{Term}^{\bar{\alpha}}$  で、 $\bar{f} = D_{A \cap \bar{\alpha}}^{\bar{\alpha}}(\bar{t})$  となるものとする。 $f = D_{A \cap \theta}^{\theta}(\sigma_0(\bar{t})) = \hat{\sigma}_0(\bar{f})$  とすると、 $\sigma_0(\bar{\alpha}) = \theta$  に注意して、

$$f : \theta \rightarrow \sigma_0(\bar{y}) \text{ onto}$$

である。さらに、 $\sigma_0(\bar{y}), \sigma_0(\bar{t}) < \sigma_0(\bar{\tau}) = \eta(\bar{\tau}) < \eta$ ,  $\eta(\bar{\tau}) \in S_{\theta}$  である。さて、

$$\sigma_1(x) < y = \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{y}) = \sigma_1(\sigma_0(\bar{y}))$$

だから、 $x < \sigma_0(\bar{y})$ . よって、 $x = f(\beta)$  となる  $\beta < \theta$  がとれる。これを  $\hat{\sigma}_1$  でうつせば、

$$\hat{\sigma}_1(f) = D_{A \cap \alpha}^{\alpha}(\sigma_1 \circ \sigma_0(\bar{t})) = D_{A \cap \alpha}^{\alpha}(\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{t})) \text{ なので、}$$

$$\sigma_1(x) = D_{A \cap \alpha}^{\alpha}(t)(\beta), \quad \beta < \theta$$

である。ただし、 $t = \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{t})$  である。さらに、

$$\begin{aligned} y, t, \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\tau}) \in \text{range}(\sigma_{\bar{\nu}\nu}) &= \mathcal{M}_{\alpha}[A \cap \alpha]^{D_{\nu}}(\bar{\alpha} \cup p_{\nu}) \\ &\subseteq \mathcal{M}_{\alpha}[A \cap \alpha]^{D_{\nu}}(\theta \cup p_{\nu}) = X \end{aligned}$$

だから、補題 3.9. の証明と同様にして、 $\sigma_1(x) \in X \cap \nu$  となる。

以上のことから、 $X \cap \nu = \text{range}(\sigma_1)$  となる。

この claim.4. により、 $\sigma \upharpoonright \eta = \sigma_1$  がわかる。また、 $\nu \in \text{range}(\sigma_{\bar{\nu}\nu}) \subseteq X$  なので、 $\sigma(\eta) = \nu$  である。さらに、 $\sigma \upharpoonright \theta = \sigma_1 \upharpoonright \theta = \text{id}$ ,  $\sigma(\theta) = \sigma_1(\theta) = \alpha$  である。また、CP によって、

$$(3) \quad \sigma : \mathcal{M}_{\theta}[A \cap \theta]^D \rightarrow \mathcal{M}_{\alpha}[A \cap \alpha]^{D_{\nu}} \quad \text{mono}$$

$$(4) \quad D = \mathcal{M}_{\theta}[A \cap \theta]^D(\theta \cup \sigma^{-1}[p_{\nu}])$$

である。以下では、 $D = D_{\eta}$ ,  $\sigma^{-1}[p_{\nu}] = p_{\eta}$  を証明する。その前に、まず、 $\eta \in S_{\theta}$  であったから、

$$L_{\eta}[A \cap \theta] \models \theta \text{ は唯一の uncountable cardinal}$$

となっていることに注意する。すると、明らかに、

$$L[A \cap \theta] \models \theta \leq \omega_1$$

となる。故に (4) から、

$$L[A \cap \theta] \models |D| \leq \omega_1$$

となるので、 $\eta < D < \omega_2^{L[A \cap \theta]}$  となって、 $D_{\eta}$ ,  $p_{\eta}$  は定義されている。

Claim.5.  $D$  は limit ordinal である。

証明.  $D = \delta + 1$  とする。 $\delta \in D$  だから、 $\sigma(\delta) \in X$  である。ところで、

$$\sigma(\delta) \in D_{\nu} = \sup(\sigma_{\bar{\nu}\nu} " D_{\bar{\nu}})$$

だから、 $\xi < D_{\bar{\nu}}$ ,  $\sigma(\delta) < \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi)$  とすることができる。このとき、

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi) \in \text{range}(\sigma_{\bar{\nu}\nu}) &= \mathcal{M}_{\alpha}[A \cap \alpha]^{D_{\nu}}(\bar{\alpha} \cup p_{\nu}) \\ &\subseteq \mathcal{M}_{\alpha}[A \cap \alpha]^{D_{\nu}}(\theta \cup p_{\nu}) = X \end{aligned}$$

であるから、 $\delta < \sigma^{-1}\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi) < D$ となり不合理。従って、 $D$ は limit ordinal である。

Claim.6.  $x \in X$ で、 $\xi < D_{\bar{\nu}}$ が十分大きいとする。さらに

$$\pi : \gamma \rightarrow \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi)}(\alpha \cup p_\nu)$$

が collapsing map で、 $x \in \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi)}(\theta \cup p_\nu)$  とする。このとき、

$$\pi^{-1}(x) \in \text{range}(\sigma_1)$$

である。

証明. まず、 $F$ を  $\mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]$ の関数の合成とし、 $\theta_1, \dots, \theta_n < \theta$ をとり、

$$x = F^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi)}(\theta_1, \dots, \theta_n, \vec{p}_\nu)$$

と表す。尚、 $p_\nu = \{\vec{p}_\nu\}$ である。 $\pi \upharpoonright \alpha = id$ ,  $\theta < \alpha$ だから、

$$\pi^{-1}(x) = F^\gamma(\theta_1, \dots, \theta_n, \pi^{-1}(\vec{p}_\nu))$$

となる。さらに、

$$\gamma \in \text{range}(\sigma_1), \quad \pi^{-1}[p_\nu] \subseteq \nu \cap \text{range}(\sigma_{\bar{\nu}\nu}) \subseteq \text{range}(\sigma_1)$$

である。そこで、 $\gamma = \sigma_1(\gamma')$ ,  $\pi^{-1}[p_\nu] = \sigma_1[q]$ とする。 $\sigma_1 \upharpoonright \theta = id$ なので、

$$\sigma_1 : \mathcal{M}_\theta[A \cap \theta]^\eta \rightarrow \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^\nu \quad \text{mono}$$

(Claim.4. の証明中) により、

$$\pi^{-1}(x) = \sigma_1(\bar{F}^{\gamma'}(\theta_1, \dots, \theta_n, \vec{q})) \in \text{range}(\sigma_1)$$

となる。ここで、 $q = \{\vec{q}\}$ であり、 $\bar{F}$ は  $\mathcal{M}_\theta[A \cap \theta]$ の関数の合成で、 $F$ に対応するものである。

Claim.7.  $\sigma : (D, \theta, A \cap \theta, \theta) \prec_{\exists \text{ prop.}} (D_\nu, \alpha, A \cap \alpha, \alpha)$ .

証明. まず、 $\sigma : (D, \theta, A \cap \theta, \theta) \prec_{\text{atomic}} (D_\nu, \alpha, A \cap \alpha, \alpha)$ を示す。(3) から、

$$\sigma : \mathcal{M}_\theta[A \cap \theta]^D \rightarrow \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\nu} \quad \text{mono}$$

なので、問題なのは、 $x \in M^y(\square \cup \{z_1, \dots, z_n\})$ のみである。さらに、これについても、

$$(D, \theta, A \cap \theta, \theta) \models x \in M^y(\square \cup \{z_1, \dots, z_n\})$$

$$\text{ならば } (D_\nu, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \sigma(x) \in M^{\sigma(y)}(\square \cup \{\sigma(z_1), \dots, \sigma(z_n)\})$$

は明らかに成り立っている。そこで逆をいうために、

$$(D_\nu, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \sigma(x) \in M^{\sigma(y)}(\square \cup \{\sigma(z_1), \dots, \sigma(z_n)\})$$

と仮定する。すなわち、

$$\sigma(x) \in \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma(y)}(\alpha \cup \{\sigma(z_1), \dots, \sigma(z_n)\})$$

と仮定する。まず、 $x, y, z_1, \dots, z_n \in D = \mathcal{M}_\theta[A \cap \theta]^D(\alpha \cup \sigma^{-1}[p_\nu])$ であり、 $D$ は limit ordinal (Claim.5.) なので、 $\xi < D$ を大きくとって、

$$x, y, z_1, \dots, z_n \in \mathcal{M}_\theta[A \cap \theta]^\xi(\alpha \cup \sigma^{-1}[p_\nu])$$

としておく。また、 $\sigma(\xi) \in X \subseteq D_\nu$ ,  $\text{range}(\sigma_{\bar{\nu}\nu}) \subseteq X$ なので、claim.2. により、  
 $\sigma(\xi) \in \text{range}(\sigma_{\bar{\nu}\nu})$

としても良く、さらに、

$$p_{\bar{\nu}} \subseteq \sigma_{\bar{\nu}\nu}^{-1} \circ \sigma(\xi), \quad \bar{\alpha} \in \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}[A \cap \bar{\alpha}]^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}^{-1} \circ \sigma(\xi)}(\bar{\alpha} \cup p_{\bar{\nu}})$$

と仮定しても良い。すなわち、 $\sigma_{\bar{\nu}\nu}^{-1} \circ \sigma(\xi) < D_{\bar{\nu}}$ が十分大きい。そこで、

$$\pi : \gamma \rightarrow \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma(\xi)}(\alpha \cup p_\nu)$$

を collapsing map とすると、 $\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z_1), \dots, \sigma(z_n) \in \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma(\xi)}(\alpha \cup p_\nu)$  となるので、claim.6. により、

$$\pi^{-1}\sigma(x), \pi^{-1}\sigma(y), \pi^{-1}\sigma(z_1), \dots, \pi^{-1}\sigma(z_n) \in \text{range}(\sigma_1)$$

である。そこで、 $x', y', z'_1, \dots, z'_n < \eta$ を、

$$\pi^{-1}\sigma(x) = \sigma_1(x'), \pi^{-1}\sigma(y) = \sigma_1(y'), \pi^{-1}\sigma(z_1) = \sigma_1(z'_1), \dots, \pi^{-1}\sigma(z_n) = \sigma_1(z'_n)$$

となるようにとる。 $\pi : \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^\gamma \rightarrow \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma(\xi)}$  mono であるから、

$$\sigma(x) \in \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma(y)}(\alpha \cup \{\sigma(z_1), \dots, \sigma(z_n)\})$$

を  $\pi^{-1}$ でもどせば、

$$\sigma_1(x') \in \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma_1(y')}(\alpha \cup \{\sigma_1(z'_1), \dots, \sigma_1(z'_n)\})$$

となる。故に、ある  $\vec{\beta} < \alpha$  をとって、

$$\sigma_1(x') = F^{\sigma_1(y')}(\vec{\beta}, \sigma_1(z'_1), \dots, \sigma_1(z'_n)), \quad F \text{ は } \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha] \text{ の関数の合成}$$

と書くことができる。今、 $\bar{\tau} \in S_{\bar{\alpha}} \cap \bar{\nu}$  を大きくとれば、 $x', y', z'_1, \dots, z'_n < \eta(\bar{\tau})$  とできることに注意する。すると、これは、 $\tau = \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\bar{\tau}) = \sigma_{\eta(\bar{\tau}), \tau}(\eta(\bar{\tau}))$  とすると、

$$(D_\tau, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \exists \vec{\beta} [\vec{\beta} < \alpha \wedge \sigma_1(x') = F^{\sigma_1(y')}(\vec{\beta}, \sigma_1(z'_1), \dots, \sigma_1(z'_n))]$$

と書ける。尚、これは正式な formula ではないが、 $\sigma_1(x') = F^{\sigma_1(y')}(\dots)$  のところは、 $P_J^m$  や  $P_T, P_K$  等と  $\exists$  で書くことができるので、 $\exists \vec{\beta}$  prop. の形の formula だとも考えても良い。これを  $\sigma_{\eta(\bar{\tau}), \tau}^{-1}$  でもどせば、 $\sigma_1 \upharpoonright \eta(\bar{\tau}) = \sigma_{\eta(\bar{\tau}), \tau} \upharpoonright \eta(\bar{\tau})$  に注意して、

$$(D_{\eta(\bar{\tau})}, \theta, A \cap \theta, \theta) \models \exists \vec{\beta} [\vec{\beta} < \theta \wedge x' = \bar{F}^{y'}(\vec{\beta}, z'_1, \dots, z'_n)]$$

となる。ここで、 $\bar{F}$  は  $\mathcal{M}_\theta[A \cap \theta]$  の関数の合成で、 $F$  に対応するものである。従って、 $\vec{\beta} < \theta$  をとり、

$$x' = \bar{F}^{y'}(\vec{\beta}, z'_1, \dots, z'_n)$$

とできることがわかった。これを、再び、 $\sigma_{\eta(\bar{\tau}), \tau}$  でうつせば、

$$\sigma_1(x') = F^{\sigma_1(y')}(\vec{\beta}, \sigma_1(z'_1), \dots, \sigma_1(z'_n)).$$

$\pi$  でうつして、

$$\sigma(x) = F^{\sigma(y)}(\vec{\beta}, \sigma(z_1), \dots, \sigma(z_n))$$

ここで、 $\vec{\beta} < \theta$ だから、 $\sigma^{-1}$ でもどせば、先ほどの $\vec{F}$ を用いて、

$$x = \vec{F}^y(\vec{\beta}, z_1, \dots, z_n) \in M_\theta[A \cap \theta]^y(\theta \cup \{z_1, \dots, z_n\})$$

となる。これで、atomic formula については全て終わった。従って、

$$\sigma : (D, \theta, A \cap \theta, \theta) \prec_{\text{prop.}} (D_\nu, \alpha, A \cap \alpha, \alpha)$$

もわかる。

今、 $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$  を prop.formula とし、 $\vec{z} \in D$  とする。

$$(D_\nu, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \exists \vec{x} \varphi(\vec{x}, \sigma(\vec{z}))$$

と仮定する。まず、 $(D_\nu, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \varphi(\vec{x}, \sigma(\vec{z}))$  となる  $\vec{x} < D_\nu$  を固定する。 $\xi < D_\nu$  を十分大きくとり、

$$\sigma(\vec{z}) \in M_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi)}(\theta \cup p_\nu)$$

$$\vec{x} \in M_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi)}(\alpha \cup p_\nu)$$

となるようにとる。Claim.2. により、このような $\xi$ は存在する。今、

$$Y = M_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi)}(\alpha \cup p_\nu)$$

とすると、 $(Y, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \varphi(\vec{x}, \sigma(\vec{z}))$  である。そこで、 $\pi : \gamma \rightarrow Y$  を、collapsing map とすると、CP により、

$$\pi : M_\alpha[A \cap \alpha]^\gamma \rightarrow M_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi)} \quad \text{mono}$$

なので、 $\pi : (\gamma, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \prec_{\text{prop.}} (\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi), \alpha, A \cap \alpha, \alpha)$  がわかる。また、 $Y \subseteq \sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi)$  なので、補題 2.9. により、

$$(\sigma_{\bar{\nu}\nu}(\xi), \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \varphi(\vec{x}, \sigma(\vec{z}))$$

だから、 $\pi^{-1}$ でもどせば、

$$(\gamma, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \varphi(\pi^{-1}(\vec{x}), \pi^{-1}\sigma(\vec{z}))$$

となる。さて、 $\sigma(\vec{z}) \in X$  だから、claim.6. によって、 $\pi^{-1}\sigma(\vec{z}) = \sigma_1(\vec{z}')$  となる  $\vec{z}' < \eta$  がとれる。すると、

$$(1) \quad (\gamma, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \exists \vec{x} \varphi(\vec{x}, \sigma_1(\vec{z}'))$$

がいえる。今、 $\bar{\nu} \triangleleft \nu$  だったから、 $\sigma_{\bar{\nu}\nu}$  の性質 (定義 3.15.(viii)) により、

$$\gamma \in \text{range}(\sigma_{\bar{\nu}\nu}), \quad \pi^{-1}[p_\nu] \subseteq \text{range}(\sigma_{\bar{\nu}\nu})$$

であるが、claim.1. により、 $\gamma \in \text{range}(\sigma_1)$ ,  $\pi^{-1}[p_\nu] \subseteq \text{range}(\sigma_1)$  である。そこで、

$$\gamma = \sigma_1(\gamma'), \quad \pi^{-1}[p_\nu] = \sigma_1[q], \quad q \subseteq \gamma'$$

とする。また、 $\bar{\tau} \in S_\alpha \cap \bar{\nu}$  を大きくとり、

$$\vec{z}', \gamma' < \eta(\bar{\tau})$$

とする。 $\tau = \sigma_1(\eta(\bar{\tau}))$  とおく。すると、 $\sigma_1(\vec{z}'), \sigma_1(\gamma') < \tau < D_\tau$  なので、(1) は、

$$(D_\tau, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \exists \vec{x} [\vec{x} < \gamma \wedge \varphi(\vec{x}, \sigma_1(\vec{z}'))]$$

となる。 $\sigma_1 \upharpoonright \eta(\bar{\tau}) = \sigma_{\eta(\bar{\tau}), \tau} \upharpoonright \eta(\bar{\tau})$  なので、これを  $\sigma_1^{-1}$  でもどせば、

$$(2) \quad (D_{\eta(\bar{\tau})}, \theta, A \cap \theta, \theta) \models \exists \vec{x} [\vec{x} < \gamma' \wedge \varphi(\vec{x}, \vec{z}')] ]$$

である。ところで、 $\gamma = M_\alpha[A \cap \alpha]^\gamma(\alpha \cup \pi^{-1}[p_\nu])$  だから、

$$(D_\tau, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \forall \beta (\beta < \gamma \leftrightarrow \beta \in M^\gamma(\square \cup \pi^{-1}[p_\nu])).$$

従って、 $\sigma_{\eta(\bar{\tau}), \tau}^{-1}$  でもどせば、

$$(D_{\eta(\bar{\tau})}, \theta, A \cap \theta, \theta) \models \forall \beta (\beta < \gamma' \leftrightarrow \beta \in M^{\gamma'}(\square \cup q))$$

となるので、 $\gamma' = \mathcal{M}_\theta[A \cap \theta]^{\gamma'}(\theta \cup q)$ である。そこで、(2)により、

$$(D_{\eta(\bar{\tau})}, \theta, A \cap \theta, \theta) \models \varphi(\vec{x}, \vec{z}')$$

となる $\vec{x} < \gamma'$ をとる。 $\sigma_{\eta(\bar{\tau}), \tau}$ でうつせば、 $\sigma_1(\vec{x}) = \sigma_{\eta(\bar{\tau}), \tau}(\vec{x}) < \sigma_1(\gamma') = \gamma$ であり、

$$(D_\tau, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \varphi(\sigma_1(\vec{x}), \sigma_1(\vec{z}'))$$

なので、

$$(\gamma, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \varphi(\sigma_1(\vec{x}), \sigma_1(\vec{z}'))$$

となる。よって、 $\pi$ でうつせば、 $\sigma_1(\vec{z}') = \pi^{-1}\sigma(\vec{z})$ だったから、

$$(3) \quad (D_\nu, \alpha, A \cap \alpha, \alpha) \models \varphi(\pi\sigma_1(\vec{x}), \sigma(\vec{z})).$$

後は、 $\pi\sigma_1(\vec{x}) \in X = \text{range}(\sigma)$ をいえば良い。これをいうために、 $\vec{x} = x_1, \dots, x_n$ とし、 $\pi\sigma_1(x_1) \in X$ をいう。 $x_2, \dots, x_n$ についても同様にして証明できる。まず、

$$x_1 < \gamma' = \mathcal{M}_\theta[A \cap \theta]^{\gamma'}(\theta \cup q)$$

なので、

$$x_1 = \bar{F}^{\gamma'}(\vec{\beta}, \vec{q}), \quad \vec{\beta} < \theta, \quad \bar{F} \text{は } \mathcal{M}_\theta[A \cap \theta] \text{の関数の合成}$$

と書ける。従って、 $\sigma_1(\sigma_{\eta(\bar{\tau}), \tau})$ でうつすと、

$$\sigma_1(x_1) = F^{\gamma}(\vec{\beta}, \pi^{-1}(\vec{p}_\nu)), \quad F \text{は } \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha] \text{の関数の合成で } \bar{F} \text{に対応するもの}$$

となる。故に

$$\pi\sigma_1(x_1) = F^{\sigma_{\nu\nu}(\xi)}(\vec{\beta}, \vec{p}_\nu) \in \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma_{\nu\nu}(\xi)}(\theta \cup p_\nu) \subseteq X$$

となる。故に、 $\sigma$ の性質により、 $\sigma : (D, \theta, A \cap \theta, \theta) \prec_{\text{prop.}} (D_\nu, \alpha, A \cap \alpha, \alpha)$ だから、(3)を $\sigma^{-1}$ でもどせば、 $\sigma^{-1}\pi\sigma_1(\vec{x}) < D$ であり、

$$(D, \theta, A \cap \theta, \theta) \models \varphi(\sigma^{-1}\pi\sigma_1(\vec{x}), \vec{z})$$

となるので、 $(D, \theta, A \cap \theta, \theta) \models \exists \vec{x} \varphi(\vec{x}, \vec{z})$ となる。逆は明らかなので、これで claim は証明された。

Claim.8.  $D = D_\eta$ ,  $\sigma^{-1}[p_\nu] = p_\eta$ .

証明. $p = \sigma_1[p_\nu]$ とすると、(4)により、

$$\eta = \sigma^{-1}(\nu) < D = \mathcal{M}_\theta[A \cap \theta]^D(\theta \cap p)$$

なので、 $D_\eta \leq D$ は明らかである。そこで、 $D_\eta < D$ とする。すると、 $p_\eta \subseteq D_\eta < D$ であり、 $\eta \subseteq \mathcal{M}_\theta[A \cap \theta]^{D_\eta}(\theta \cup p_\eta)$ だから、claim.7.により、 $\sigma$ でうつせば、(M3)の claim.8.と同様にして、

$$\nu \subseteq \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma(D_\eta)}(\alpha \cup \sigma[p_\eta])$$

となるが、 $\sigma(D_\eta) < D_\nu$ なので、これは $D_\nu$ の最小性に反し、故に、 $D = D_\eta$ でなければならない。

このことにより、

$$\eta < D_\eta = \mathcal{M}_\theta[A \cap \theta]^{D_\eta}(\theta \cup p)$$

となることがわかるので、 $p_\eta$ の最小性により、 $p_\eta \leq^* p$ である。そこで、 $p_\eta <^* p$ と仮定する。すると、 $p \subseteq D_\eta = \mathcal{M}_\theta[A \cap \theta]^{D_\eta}(\theta \cup p_\eta)$ なので、

$$p \subseteq \mathcal{M}_\theta[A \cap \theta]^\xi(\theta \cup p_\eta)$$

となる $\xi < D_\eta$ がある。従って、 $\sigma$ でうつせば、 $p = \sigma^{-1}[p_\nu]$ なので、

$$\begin{aligned} p_\nu &\subseteq \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma(\xi)}(\alpha \cup \sigma[p_\eta]) \\ &\subseteq \mathcal{M}_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\nu}(\alpha \cup \sigma[p_\eta]) \end{aligned}$$

となる。従って、

$$D_\nu = M_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\nu}(\alpha \cup p_\nu) = M_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\nu}(\alpha \cup \sigma[p_\eta])$$

となるが、 $p_\eta <^* p$  により、 $\sigma[p_\eta] <^* \sigma[p] = p_\nu$  だから、これは  $p_\nu$  の最小性に反する。従って、 $p_\eta = p$  である。

以上の claims 等により、 $\eta \triangleleft \nu$  の  $\sigma$  に関する条件の (i)-(vii) がみたされることがわかる。(viii) を示すために、 $\xi < D_\eta$  を大きくとる。

$$\sigma(\xi) \in X = M_\alpha[A \cap \alpha]^{D_\nu}(\theta \cup p_\nu)$$

だから、claim.2. により、

$$\sigma(\xi) \in M_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma_{\nu\nu}(\xi)}(\theta \cup p_\nu)$$

となる、十分大きい  $\bar{\xi} < D_\nu$  を固定しておく。まず、

$$\pi : \gamma \rightarrow M_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma_{\nu\nu}(\bar{\xi})}(\alpha \cup p_\nu)$$

を collapsing map とすると、 $\gamma \in \text{range}(\sigma_1)$ 、 $\pi^{-1}[p_\nu] \subseteq \text{range}(\sigma_1)$  であり、また、claim.6. により、 $\pi^{-1}\sigma(\xi) \in \text{range}(\sigma_1)$  である。そこで、

$$\sigma_1(\xi') = \pi^{-1}\sigma(\xi), \sigma_1(\gamma') = \gamma, \sigma_1(\vec{p}) = \pi^{-1}(\vec{p}_\nu)$$

としておく。すると、

$$\pi : M_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma_1(\xi')}(\alpha \cup \sigma_1[p]) \cong M_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma(\xi)}(\alpha \cup p_\nu)$$

は順序同型である。今、

$$\pi' : \delta \rightarrow M_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma(\xi)}(\alpha \cup p_\nu)$$

を collapsing map とする。すると、

$$\pi^{-1} \circ \pi' : \delta \rightarrow M_\alpha[A \cap \alpha]^{\sigma_1(\xi')}(\alpha \cup \sigma_1[p])$$

は collapsing map であり、

$$(\pi^{-1} \circ \pi')^{-1}\sigma_1[p] = \pi'^{-1} \circ \pi \circ \pi^{-1}[p_\nu] = \pi'^{-1}[p_\nu]$$

である。さて、今、 $\alpha, A \cap \alpha, \sigma_1(\xi'), \sigma_1[p] \in \text{range}(\hat{\sigma}_1)$  であり、さらに、

$$\hat{\sigma}_1 : L_\eta[A \cap \theta] \prec_Q L_\nu[A \cap \alpha]$$

だから、(M2) の証明と同様にして (Silver machine が  $\Sigma_1$  であること等を用いて)、

$$\pi^{-1} \circ \pi' \in \text{range}(\hat{\sigma}_1).$$

これより、すぐ上のことも用いて、

$$\delta = \text{dom}(\pi^{-1} \circ \pi') \in \text{range}(\hat{\sigma}_1) \cap On = \text{range}(\sigma_1)$$

$$\pi'^{-1}[p_\nu] = (\pi^{-1} \circ \pi')^{-1}[\sigma_1[p]] \in \text{range}(\hat{\sigma}_1)$$

従って、

$$\delta \in \text{range}(\sigma_1), \quad \pi'^{-1}[p_\nu] \subseteq \text{range}(\sigma_1)$$

となるので、補題 3.20. により、(viii) がわかる。これで、 $\sigma = \sigma_{\eta\nu}$ ,  $\eta \triangleleft \nu$  となる。以上で (M7) は示された。

これらをまとめると、

4.2. 補題.  $\overline{\mathfrak{M}}$  は、morass の公理 (M0)-(M7) をみたす。

5. Morass の存在証明. 其三

前節の結果から、 $\overline{\mathfrak{M}}$  は morass の公理 (M0)-(M7) をみたすことがわかるが、 $\overline{\mathfrak{M}}$  は morass にはなっていない。というのも、morass の定義 (2.1.) では  $S$  に対して、

$$(\alpha, \nu), (\alpha', \nu') \in S \ \& \ \alpha < \alpha' \rightarrow \nu < \alpha'$$

が要請されていたが、 $\bar{S}$  は、これをみたすとは限らない。実際、

$$(\alpha, \nu), (\alpha', \nu') \in \bar{S} \ \& \ \alpha < \alpha' < \nu' < \nu$$

となることがあるかも知れない。そこで、この節では、 $S \subseteq \bar{S}$  をうまく作って、 $\mathfrak{M} = (S, S, \prec, (\pi_{\nu\tau})_{\nu \prec \tau})$  を定義し、これが morass になることを示す。

まず、次の二つの場合にわけろ。

(a)  $\sup(S_\alpha) = \omega_1$  となる  $\alpha < \omega_1$  が存在しないとき

(b)  $\sup(S_\alpha) = \omega_1$  となる  $\alpha < \omega_1$  が存在するとき

これは、 $A$  の性質による。以下では (a) の場合を考える。(b) の場合は、少し修正すれば、(a) と殆ど同じである。

5.1. 補題. (a), (b), いずれの場合でも、 $\alpha \in \bar{S}_0 \cap \omega_1$  ならば、

$$S_\alpha \subseteq \omega_1 + 1, \quad \text{従って、} \sup(S_\alpha) \leq \omega_1$$

証明.  $\nu \in S_\alpha$  ならば、 $L_\nu[A \cap \alpha] \models$  “ $\alpha$  は唯一の uncountable cardinal” であるから、明らかである。

5.2. 定義.  $\xi \leq \omega_1$  に対し、 $\alpha(\xi) \in \bar{S}^0$  を次のように定める：

$$\alpha(\xi) = \min\{\alpha \in \bar{S}^0 \mid \forall \zeta < \xi \forall \nu (\nu \in S_{\alpha(\zeta)} \rightarrow \nu < \alpha)\}$$

すると、(a) の場合を考えているので、 $\alpha(\xi)$  は全ての  $\xi \leq \omega_1$  に対して定義される。また、 $\langle \alpha(\xi) \mid \xi \leq \omega_1 \rangle$  は増加列であり、従って、 $\alpha(\omega_1) = \omega_1$  である。

5.3. 定義.  $S \subseteq \bar{S}$  を

$$S = \{(\alpha, \nu) \in \bar{S} \mid \exists \xi \leq \omega_1 (\alpha = \alpha(\xi))\}$$

と定める。従って、定義 3.2. の記号を用いれば、

$$S = \bigcup_{\xi \leq \omega_1} (\{\alpha(\xi)\} \times S_{\alpha(\xi)})$$

であり、また、定義 2.1. のように  $S^0, S^1$  等を定めると、

$$\begin{aligned} S^0 &= \{\alpha(\xi) \mid \xi \leq \omega_1\} \\ S^1 &= \bigcup_{\xi \leq \omega_1} S_{\alpha(\xi)} \\ S &= S^0 \cup S^1 \\ S_\alpha &= \text{定義 3.2. の } S_\alpha, \quad \text{for } \alpha \in S^0 \end{aligned}$$

となる。この最後のものが、定義 3.2. で  $\bar{S}_\alpha$  と書かなかった理由である。そして、

$$\mathfrak{M} = (S, \mathcal{S}, \prec, (\pi_{\nu\tau})_{\nu \prec \tau})$$

とする。ただし、 $\prec$  は  $\triangleleft$  の  $S^1$  への制限であり、 $\pi_{\nu\tau}$  は定義 4.1. のものである。

5.4. 補題.  $(\alpha, \nu), (\alpha', \nu') \in S$  &  $\alpha < \alpha' \rightarrow \nu < \alpha'$ .

証明.  $\alpha = \alpha(\zeta), \alpha' = \alpha(\xi)$  とすると、 $\langle \alpha(\xi) \mid \xi \leq \omega_1 \rangle$  が増加列なので、 $\zeta < \xi$  である。従って、定義 5.2. より明らかに、 $\nu < \alpha(\xi) = \alpha'$  となる。

以上の準備のもとで、次のことを証明する。

5.5. 定理.  $\mathfrak{M}$  は morass である。

証明. 前節、定義 4.1. の直後の注意や、補題 5.4. により、 $\mathfrak{M}$  が (M0)-(M7) をみたすことを証明すれば十分である。しかし、前節で証明したように、 $\overline{\mathfrak{M}}$  は (M0)-(M7) をみたすので、 $\mathfrak{M}$  については、(M0), (M3), (M4), (M5) 以外はそのまま成り立つ。そこで、これら四つについてのみ証明する。(M0), (M5) は簡単なので先に示し、後から、(M3), (M4) を示すことにする。

(M0). (b) の、 $\omega_1 = \max(S^0) = \sup(S^0 \cap \omega_1)$  のみが問題となる。まず、定義 5.2. に書いたように、 $\alpha(\omega_1) = \omega_1$  なので、 $\omega_1 \in S^0$  となり、最初の等号は成り立つ。次に、 $\overline{\mathfrak{M}}$  の (M0) により、

$$\omega_1 = \sup(\bar{S}^0 \cap \omega_1)$$

であるから、 $S^0 \cap \omega_1 = \{\alpha(\xi) \mid \xi < \omega_1\}$  は unbounded in  $\omega_1$  となり、 $\omega_1 = \sup(S^0 \cap \omega_1)$  となる。(実は、定義 5.2. で、 $\alpha(\xi)$  が全ての  $\xi \leq \omega_1$  に対して定義されるといったのは、このようにして証明されるのである。)

(M5).  $\overline{\mathfrak{M}}$  の (M5) の証明と全く同じである。 $\triangleleft$  を  $\prec$  にするだけで良い。

(M3).  $\alpha \in S^0, \tau \in S_\alpha, \bar{\alpha} < \alpha, \bar{\alpha} : \text{limit ordinal}$  とし、  
 $\{\alpha_\nu \mid \nu \prec \tau \wedge \alpha_\nu < \bar{\alpha}\}$  は unbounded in  $\bar{\alpha}$



と仮定する。すると、 $\{\alpha_\nu \mid \nu \triangleleft \tau \wedge \alpha_\nu < \bar{\alpha}\}$  は unbounded in  $\bar{\alpha}$  なので、 $\overline{\mathfrak{M}}$  が、(M3) をみたすことから、 $\alpha_\nu = \bar{\alpha}$  となる  $\nu \triangleleft \tau$  が存在する。 $\tau \in S^1$  なので、 $\nu \in S^1$  をいえば  $\nu \prec \tau$  となる。そのためには、 $\bar{\alpha} \in S^0$  をいえば良い。そこで、 $\bar{\alpha} \notin S^0$  と仮定する。従って、 $\bar{\alpha} \neq \omega_1$  である。 $\overline{\mathfrak{M}}$  は (M0) をみたすので、 $\bar{\alpha} < \alpha(\xi)$  となる  $\xi < \omega_1$  が存在する。そこで、

$$\xi_0 = \min\{\xi < \omega_1 \mid \bar{\alpha} < \alpha(\xi)\}$$

とおく。まず、 $\bar{\alpha} < \alpha(\xi_0)$  だから、 $\xi_0 = 0$  でないとして良い。もし、 $\xi_0 = 0$  なら、 $\alpha(\xi_0) = \min(\bar{S}^0)$  なので、 $\{\alpha_\nu \mid \nu \prec \tau \wedge \alpha_\nu < \bar{\alpha}\} = \emptyset$  となり、問題外だからである。そこで、 $\xi_0 = \zeta + 1$  とする。すると、 $\xi_0$  の最小性と、 $\bar{\alpha} \in S^0$  により、

$$\alpha(\zeta) < \bar{\alpha} < \alpha(\xi_0).$$

ところが、これでは、 $\sup\{\alpha_\nu \mid \nu \prec \tau \wedge \alpha_\nu < \bar{\alpha}\} \leq \alpha(\zeta) < \bar{\alpha}$  となって、unbounded in  $\bar{\alpha}$  とはならない。従って、 $\xi_0$  は limit ordinal である。しかし、このときは、

$$(1) \quad \forall \zeta < \xi_0 \forall \nu (\nu \in S_{\alpha(\zeta)} \rightarrow \nu < \bar{\alpha})$$

となってしまうので、 $\alpha(\xi_0)$  の定義から、 $\alpha(\xi_0) \leq \bar{\alpha}$  となって、 $\bar{\alpha} < \alpha(\xi_0)$  に矛盾してしまう。従って  $\bar{\alpha} \in S^0$  とならねばならず、これで (M3) がいえる。

以下は (1) の証明。 $\zeta < \xi_0$ ,  $\nu \in S_{\alpha(\zeta)}$  とすると、 $\zeta < \zeta + 1 < \xi_0$  なので

$$\nu < \alpha(\zeta + 1) < \bar{\alpha}$$

となり、(1) がいえる。

(M4).  $\alpha \in S^0$  とし、 $\tau \in S_\alpha$  が  $S_\alpha$  の極大元でないとする。また、 $\alpha = \alpha(\xi)$  としておく。明らかに、 $\xi \leq \alpha$  である。まず、 $\overline{\mathfrak{M}}$  が (M4) をみたすことと、 $\alpha(0) = \min(\bar{S}^0)$  により、 $\xi \neq 0$  がわかる。そこで、 $\overline{\mathfrak{M}}$  の (M4) の証明のように、 $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$  をとる。すなわち、 $\lambda \in S_\alpha$ ,  $\tau < \lambda$  であり、さらに、

$$D_\tau < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda, \quad L_{\lambda_1}[A \cap \alpha], L_{\lambda_2}[A \cap \alpha] \text{ は共に admissible.}$$

$\mu < \alpha$  を任意にとる。ここでは、次のような、 $X \in L_{\lambda_2}[A \cap \alpha]$  を作る。

$$\begin{cases} X \prec L_{\lambda_1}[A \cap \alpha] \\ X \cap \alpha \text{ は順序数で、} \mu \leq X \cap \alpha < \alpha \text{ \& } X \cap \alpha \in S^0 \\ \alpha, A \cap \alpha, \tau, D_\tau, p_\tau \in X \end{cases}$$

今、 $\overline{\mathfrak{M}}$  の (M4) の証明で作った  $Y$  のことを思い出すと、 $Y$  は、 $\theta, \alpha, A \cap \alpha$  等をパラメーターとして  $\Sigma_1^{L_{\lambda_2}[A \cap \alpha]}$  であった。ここで、 $\theta$  以外のパラメーターは固定されているから、 $Y$  を  $Y(\theta)$  と書くことにすれば、 $Y(\theta)$  は  $\theta$  に対して、一意的に決まり、しかも  $\Sigma_1^{L_{\lambda_2}[A \cap \alpha]}$  である。そこで、 $L_{\lambda_2}[A \cap \alpha]$  の中で、 $\Sigma_1$ -Recursion によって求める  $X$  を構成することにする。尚、 $Y(\theta)$  の作り方から、

$$\theta_1 \leq \theta_2 \rightarrow Y(\theta_1) \subseteq Y(\theta_2)$$

であることに注意しておく。

以下では、 $L_{\lambda_2}[A \cap \alpha]$ の中で考える。まず、 $A \cap \alpha \in L_\tau[A \cap \alpha] \in L_{\lambda_2}[A \cap \alpha]$ である。

$$S' = \{(\beta, \nu) \in \alpha \times \alpha \mid \omega < \beta < \nu \wedge L_\nu[A \cap \beta] \models \forall \delta \exists \gamma (\gamma > \delta \wedge \text{Adm}(L_\gamma[A \cap \beta])) \\ \wedge L_\nu[A \cap \beta] \models \forall \delta < \beta \exists f (f : \omega \rightarrow \delta \text{ onto}) \\ \wedge \beta \text{ は regular } \wedge \beta \text{ は最大の cardinal}\}$$

とする。すると、 $\alpha \times \alpha \in L_{\lambda_2}[A \cap \alpha]$ であり、また、 $L_\nu[A \cap \beta] \models \dots$ のところは、 $L_\nu[A \cap \beta]$ が  $L_\tau[A \cap \alpha]$ の中で構成できることと、 $L_\tau[A \cap \alpha] \in L_{\lambda_2}[A \cap \alpha]$ であることから、 $\Delta_0^{L_{\lambda_2}[A \cap \alpha]}(\{L_\tau[A \cap \alpha], A \cap \alpha\})$ と考えて良いので、 $\Delta_0$ -Separation によって、 $S' \in L_{\lambda_2}[A \cap \alpha]$ がわかる。また、 $S'$ の定義から、容易に

$$S' = (\alpha \times \alpha) \cap \bar{S}$$

がわかる。さらに、

$$S'^0 = \{\beta < \alpha \mid \exists \nu < \alpha (\beta, \nu) \in S'\}$$

$$S'^1 = \{\nu < \alpha \mid \exists \beta < \alpha (\beta, \nu) \in S'\}$$

とすれば、 $\Delta_0$ -Separation により、 $S'^0, S'^1 \in L_{\lambda_2}[A \cap \alpha]$ である。ここで、 $\Sigma_1$ -Recursion により、 $f : \xi \rightarrow \alpha$ を

$$f(\zeta) = \min\{\beta \in S'^0 \mid \forall \eta < \zeta \forall \nu < \alpha ((f(\eta), \nu) \in S' \rightarrow \nu < \beta)\}$$

とする。ここで、 $\xi$ は、 $\alpha = \alpha(\xi)$ となる  $\xi \leq \alpha$ である。明らかに、 $f \in L_{\lambda_2}[A \cap \alpha]$ となる。

Claim.1.  $f = \langle \alpha(\zeta) \mid \zeta < \xi \rangle$ .

証明. これは、 $L_{\lambda_2}[A \cap \alpha]$ の中の議論ではないことに注意しておく。まず、明らかに

$$(1) \quad S'^0 \subseteq \bar{S} \cap \alpha$$

である。次に

$$(2) \quad \beta \in S^0 \cap \alpha \rightarrow \beta \in S'^0 \quad \text{i.e., } S^0 \cap \alpha \subseteq S'^0.$$

である。まず、これを示すために、 $\beta \in S^0 \cap \alpha$ とすると、 $\beta = \alpha(\zeta)$ ,  $\zeta < \xi$ とできる。また、 $S^0 \subseteq \bar{S}^0$ なので、 $(\beta, \nu) \in \bar{S}$ となる  $\nu$ がある。すると、 $\nu \in S_\beta = S_{\alpha(\zeta)}$ だから、 $\alpha(\xi)$ の定義により、 $\nu < \alpha(\xi) = \alpha$ となる。従って、

$$(\beta, \nu) \in \bar{S} \cap (\alpha \times \alpha) = S'$$

となるので、 $\beta \in S'^0$ である。これで (2) がいえた。そこで claim を示すために、 $\zeta < \xi$ を任意にとり、

$$\eta < \zeta \rightarrow f(\eta) = \alpha(\eta)$$

と仮定する。まず、 $\beta = \alpha(\zeta)$ とすると、 $\alpha(\zeta) < \alpha(\xi) = \alpha$ なので、(2)により、 $\beta \in S'^0$ である。さらに、 $\eta < \zeta$ ,  $\nu < \alpha$ に対し、 $(f(\eta), \nu) \in S'$ とする。すると、帰納法の仮定により、 $(\alpha(\eta), \nu) \in S' \subseteq \bar{S}$ だから、 $\nu < \alpha(\zeta) = \beta$ である。従って、 $f(\zeta)$ が定義され、 $f(\zeta) \leq \beta < \alpha$ であることはわかる。そこで、 $\beta \leq f(\zeta)$ をいうため、 $\eta < \zeta$ ,  $\nu \in S_{\alpha(\eta)}$ とする。従って、 $\alpha(\zeta)$ の定義から、 $\nu < \alpha(\zeta) < \alpha$ である。従って、帰納法の仮定により、

$$(f(\eta), \nu) = (\alpha(\eta), \nu) \in \bar{S} \cap (\alpha \times \alpha) = S'$$

となるので、 $f(\zeta)$ の定義により、 $\nu < f(\zeta)$ 。また、 $f(\zeta) \in S'^0 \subseteq \bar{S}^0$ なので、これで、 $\beta = \alpha(\zeta) \leq f(\zeta)$ 。従って、 $f(\zeta) = \beta = \alpha(\zeta)$ となるので、claim は証明された。

この claim により、

$$S^0 \cap \alpha = \{\alpha(\zeta) \mid \zeta < \xi\} = \text{range}(f)$$

となるので、 $f \in L_{\lambda_2}[A \cap \alpha]$ により、

$$S^0 \cap \alpha \in L_{\lambda_2}[A \cap \alpha]$$

がわかる。さらに、

Claim.2.  $\sup(S^0 \cap \alpha) = \alpha$ .

証明.  $\sup\{\alpha(\zeta) \mid \zeta < \xi\} = \alpha(\xi)$  をいえば良い。そのために、 $\xi$  が limit ordinal であることを示す。(M4) の証明の初めに書いたように、 $\xi \neq 0$  であるから、 $\xi$  が limit ordinal でなかったとすると、 $\xi = \zeta + 1$  とできる。 $\alpha(\zeta) < \omega_1$  だから、(M0) により、 $\sup(S_{\alpha(\zeta)}) = \max(S_{\alpha(\zeta)}) \in S_{\alpha(\zeta)}$  であり、また、従って、

$$\max(S_{\alpha(\zeta)}) < \alpha(\xi) = \alpha$$

である。さて、 $\overline{M}$  は (M4) をみたすので、 $\max(S_{\alpha(\zeta)}) < \alpha_\nu < \alpha$  となるような  $\nu < \tau$  がある。ところがこの場合、 $\alpha(\xi) = \alpha(\zeta + 1) \leq \alpha_\nu < \alpha = \alpha(\xi)$  となるのでこれは矛盾である。従って、 $\xi$  は limit ordinal でなければならない。

さて、 $\beta = \sup\{\alpha(\zeta) \mid \zeta < \xi\}$  とする。明らかに  $\beta \leq \alpha(\xi)$  である。そこで、 $\beta < \alpha(\xi)$  と仮定する。 $\zeta < \xi, \nu \in S_{\alpha(\zeta)}$  とする。すると、 $\zeta + 1 < \xi$  だから、

$$\nu < \alpha(\zeta + 1) \leq \beta$$

となる。故に、 $\overline{M}$  の (M4) により、 $\beta \leq \bar{\alpha} < \alpha = \alpha(\xi)$  となる  $\bar{\alpha} \in \bar{S}^0$  をとれば、

$$\forall \zeta < \xi \forall \nu (\nu \in S_{\alpha(\zeta)} \rightarrow \nu < \bar{\alpha})$$

となるので、 $\alpha(\xi) \leq \bar{\alpha} < \alpha(\xi)$  となって不合理。従って、 $\beta = \alpha(\xi)$  でなければならず、これで claim は示された。

以上の準備のもとで、 $X_n, \bar{\alpha}_n$  ( $n < \omega$ ) を次のように定める。まず、

$$X_0 = Y(\mu)$$

とする。すると、 $Y(\mu) \cap \alpha \in \alpha$  なので、claim.2. により、 $Y(\mu) \cap \alpha \leq \beta \in S^0 \cap \alpha$  となる  $\beta$  が存在するので、 $X_0 = Y(\mu)$  だから

$$\bar{\alpha}_0 = \min\{\beta \in S^0 \cap \alpha \mid X_0 \cap \alpha \leq \beta\}$$

とおく。すると、 $\bar{\alpha}_0 < \alpha$  なので、 $Y(\bar{\alpha}_0)$  が定義されるから、

$$X_1 = Y(\bar{\alpha}_0)$$

とし、

$$\bar{\alpha}_1 = \min\{\beta \in S^0 \cap \alpha \mid X_1 \cap \alpha \leq \beta\}$$

とする。以下、このようにして、 $X_n, \bar{\alpha}_n$  を定める。即ち、

$$X_{n+1} = Y(\bar{\alpha}_n), \quad \bar{\alpha}_{n+1} = \min\{\beta \in S^0 \cap \alpha \mid X_{n+1} \cap \alpha \leq \beta\}$$

である。すると、列  $\langle X_n \mid n < \omega \rangle, \langle \bar{\alpha}_n \mid n < \omega \rangle$  は共に  $\Sigma_1^{L_{\lambda_2}[A \cap \alpha]}$  である。従って、

$$X = \bigcup \{X_n \mid n < \omega\}, \quad \bar{\alpha} = \sup\{\bar{\alpha}_n \mid n < \omega\}$$

とすると、 $X, \bar{\alpha} \in L_{\lambda_2}[A \cap \alpha]$  である。また、 $\mu \leq X_0 \cap \alpha \leq \bar{\alpha}_0 \leq X_1 \cap \alpha \leq \bar{\alpha}_1 \leq \dots$  となるので、

$$\mu \leq \bar{\alpha}_0 \leq \bar{\alpha}_1 \leq \dots \leq \bar{\alpha}$$

となり、従って、

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X$$

となる。ここで、各  $n < \omega$  に対して、 $X_n \prec L_{\lambda_1}[A \cap \alpha]$  だから、

$$X \prec L_{\lambda_1}[A \cap \alpha]$$

となる。また、 $\bar{\alpha} = X \cap \alpha$  も容易にわかる。さらに、 $\langle \bar{\alpha}_n \mid n < \omega \rangle \in L_{\lambda_2}[A \cap \alpha]$  なので、

$L_{\lambda_2}[A \cap \alpha] \models “\alpha > \omega \wedge \alpha \text{ は regular}”$  により、 $\bar{\alpha} < \alpha$  である。また、

$$\alpha, A \cap \alpha, \tau, D_\tau, p_\tau \in X$$

は明らかなので、後は、 $X \cap \alpha = \bar{\alpha} \in S^0$  であれば、 $X$  が求めるものであることがわかる。このことの証明は (M3) におけるものと全く同様にしてできる。各  $n$  に対し、 $\bar{\alpha}_n \in S^0$  に注意すれば良い。これで、求める  $X$  がわかった。後は  $\bar{\mathcal{M}}$  の (M4) の証明と同様にすれば良い。即ち、

$$\pi^{-1} : X \cong L_\beta[A \cap \bar{\alpha}]$$

としたとき、 $\nu = \pi^{-1}(\tau)$  とすれば、 $\bar{\alpha} = \alpha_\nu, \nu \triangleleft \tau$  となるが、 $\bar{\alpha} \in S^0$  なので、 $\nu \in S^1$  となり、それで、 $\nu < \tau$  がわかる。

これで、 $\bar{\mathcal{M}}$  が morass であることがわかった。

次に (b) の場合を考える。まず、次のことがいえる。

5.6. 補題.  $\sup(S_\alpha) = \omega_1$  となる  $\alpha < \omega_1$  は一つしかない。

証明.  $\alpha, \alpha'$  がこのようなものであったとする。まず、 $\bar{\mathcal{M}}$  が (M0) をみたすので、

$$\sup(S_\alpha) \in S_\alpha, \quad \sup(S_{\alpha'}) \in S_{\alpha'}$$

である。すなわち、 $(\alpha, \omega_1), (\alpha', \omega_1) \in \bar{S}$  であるが、補題 3.3. により、 $\alpha = \alpha'$  となる。

そこで、(b) の場合は、そのような唯一の  $\alpha$  を  $\bar{\alpha}$  とし、定義 5.2. の  $\alpha(\xi)$  を

$$\alpha(\xi) = \min\{\alpha \in \bar{S}^0 \mid \alpha > \bar{\alpha} \wedge \forall \zeta < \xi \forall \nu (\nu \in S_{\alpha(\zeta)} \rightarrow \nu < \alpha)\}$$

と定義し直して、後は同様にやれば良い。尚、 $\alpha(0)$  が  $\bar{\alpha}$  の  $\bar{S}^0$  中での直後元であることに注意しておく。これで、(b) の場合には、定義し直した  $\bar{\mathcal{M}}$  が morass になることがわかる。以上で、定理 3.1. の証明が終った。

最後に、 $(\kappa, 1)$ -morass の存在証明についての注意をしておく。まず、 $V = L[A]$  &  $A \subseteq \kappa$  とし、 $\kappa \geq \omega_1$  を regular cardinal とする。 $(\kappa, 1)$ -morass は、 $(\omega_1, 1)$ -morass (定義 2.1) の  $\omega_1, \omega_2$  をそれぞれ、 $\kappa, \kappa^+$  に変えれば良いだけなので、ここで改めて定義はしない。 $\kappa$  の性質により、二つの場合に分ける。

まず、 $\kappa$  が successor cardinal のときを考える。 $\mu$  を cardinal とし、 $\kappa = \mu^+$  とする。まず、定義 3.2. で

$$\begin{aligned} \bar{S} = \{(\alpha, \nu) \mid & \mu < \alpha \leq \mu^+ \wedge \alpha < \nu < \mu^{++} \\ & \wedge \forall \beta < \nu \exists \gamma < \nu (\beta < \gamma \wedge L_\gamma[A \cap \alpha] \text{ は admissible}) \\ & \wedge L_\nu[A \cap \alpha] \models “\forall \beta < \alpha \exists f (f : \mu \rightarrow \beta \text{ onto}) \\ & \wedge \alpha \text{ は regular } \wedge \alpha \text{ は最大の cardinal}”\} \end{aligned}$$

とし、以下、

3.5. 補題.  $\nu \in S_\alpha$  ならば、 $\nu \leq (\mu^{++})^{L[A \cap \alpha]}$

3.6. 補題.  $\nu \in S_\alpha$  ならば、 $\nu \neq (\mu^+)^{L[A \cap \alpha]}$

3.7. 系.  $\nu \in S_\alpha, \nu \neq (\mu^{++})^{L[A \cap \alpha]}$  ならば、 $L[A \cap \alpha] \models \neg(\nu \text{ は cardinal})$ .

のように変える。しかし、証明は同じである。さらに、補題 3.9., 定義 3.10. では、“ $\nu \neq \omega_2^{L[A \cap \alpha]}$ ”を、“ $\nu \neq (\mu^{++})^{L[A \cap \alpha]}$ ”に変え、定義 3.15. も同じように、“ $\omega_2^{L[A \cap \alpha]}$ ”を“ $(\mu^{++})^{L[A \cap \alpha]}$ ”にする。即ち、

$$\begin{aligned} \nu < \tau \text{ iff } \nu \neq (\mu^{++})^{L[A \cap \alpha_\nu]} \ \& \ \tau \neq (\mu^{++})^{L[A \cap \alpha_\tau]} \ \& \ \alpha_\nu < \alpha_\tau \\ & \ \& \ \exists \sigma (\sigma : D_\nu \rightarrow D_\tau \ \& \ \sigma \text{ は (i)-(viii) の条件をみたす}) \end{aligned}$$

である。尚、(i)-(viii) の条件はそのままである。

次に、 $\kappa$  が limit cardinal のときを考える。まず、定義 3.2. で

$$\begin{aligned} \bar{S} = \{(\alpha, \nu) \mid \alpha \leq \kappa \wedge \alpha < \nu < \kappa^+ \\ \wedge \forall \beta < \nu \exists \gamma < \nu (\beta < \gamma \wedge L_\gamma[A \cap \alpha] \text{ は admissible}) \\ \wedge L_\nu[A \cap \alpha] \models \text{“}\alpha \text{ は regular } \wedge \alpha \text{ は最大の cardinal”}\} \end{aligned}$$

とする。次に、

3.5. 補題.  $\nu \in S_\alpha$  ならば、 $\nu \leq (|\alpha|^+)^{L[A \cap \alpha]}$   
(証明は、もし、 $(|\alpha|^+)^{L[A \cap \alpha]} < \nu$  であれば、

$$L_\nu[A \cap \alpha] \models \text{“}(|\alpha|^+)^{L[A \cap \alpha]} \text{ は cardinal で } > \alpha \text{”}$$

となって、 $L_\nu[A \cap \alpha] \models \alpha \text{ は最大の cardinal に反するからである。}$ )

とする。補題 3.6. は不要であり、

3.7. 系.  $\nu \in S_\alpha$ ,  $\nu \neq (|\alpha|^+)^{L[A \cap \alpha]}$  ならば、 $L[A \cap \alpha] \models \neg(\nu \text{ は cardinal})$

とする。さらに、先ほどと同じように、補題 3.9., 定義 3.10., 定義 3.15. で、“ $\omega_2^{L[A \cap \alpha]}$ ”を、“ $(|\alpha|^+)^{L[A \cap \alpha]}$ ”に変える。

このように変更すれば、後は全く同様にして、 $(\kappa, 1)$ -morass の存在証明ができる。以上のことから、

5.7. 定理.

$$V = L[A] \ \& \ A \subseteq \kappa \ \& \ \kappa \geq \omega_1 \ \& \ \kappa \text{ は regular ならば } (\kappa, 1)\text{-morass が存在する}$$

注意: 上の定理 5.7. については、 $\kappa$  が successor cardinal のときでも、 $\kappa$  が limit cardinal の場合の証明がそのままあてはまる。この論文で、 $\kappa$  が successor cardinal と limit cardinal の二つの場合に分けたのは、 $V = L \wedge \kappa$  が successor cardinal のときには、

$$(\alpha, \nu), (\alpha', \nu') \in \bar{S} \Rightarrow \nu < \alpha'$$

が成り立つので、 $S = \bar{S}$ となり、5 の議論は不要となる。ただし、 $\bar{S}$ は $\kappa = \mu^+$ のときの $\bar{S}$ である。しかし、 $V = L$ でも、 $\kappa$ が limit cardinal のときには、5 の議論が必要となる。例えば、 $\mu < \kappa$ を regular cardinal とすると、

$$(\mu, \mu^+), (\mu^+, \mu^{++}) \in \bar{S}$$

となってしまふ。ただし、 $\bar{S}$ は $\kappa$ が limit cardinal のときの $\bar{S}$ である。

#### 参考文献

- [1]. J.Barwise, "Admissible Sets and Structures," Springer, Berlin, 1975.
- [2]. K.J.Devlin, "Aspects of Constructibility," Lecture Notes in Math.354., Springer, Berlin, 1973.
- [3]. K.J.Devlin, "Constructibility," Springer, Berlin, 1984.
- [4]. R.B.Jensen, *The fine structure of the constructible hierarchy*, Annals of Math.Logic 4 (1972), 229-308.
- [5]. 篠田寿一,  $V = L \Rightarrow \square_\kappa$ , Handwritten Note.
- [6]. L.Stanley, *A short course on gap-one morasses with a review of the fine structure of L*, Proc. Cambridge Summer School in Set Theory(1978), A.R.D.Mathias,ed., "Surveys in Set Theory," London Math.Society Lecture Notes 87, 197-243, Cambridge Univ.Press, Cambridge, 1983.
- [7]. G.Takeuti and W.Zaring, "Introduction to Axiomatic Set Theory, 2nd.ed.," GTM.1, Springer, Berlin, 1982.
- [8]. 田中尚夫, "公理的集合論," 培風館, 東京, 1982.