

The subring of universally stable elements
in a cohomology ring

東北工大 小川淑人 (Yoshito Ogawa)

Abstract. The object of this note is to find a Noether normalization for a mod- p cohomology ring of a finite group. In 1961 Evens showed that a cohomology ring of a finite group is finitely generated. In 1971 Quillen proved that its Krull dimension is equal to the maximal rank of elementary abelian subgroups. The question is whether there exists a canonical Noether normalization for a cohomology ring. In 1989 Evens and Priddy introduced the subring of universally stable elements for a cohomology ring. The main theorem of this note, which deals with an extraspecial 2-group, states that the subring of universally stable elements coincides with the invariant subring of the commutator subgroup of an orthogonal group and that the latter is very close to a polynomial ring. Thus it may be concluded that the subring of universally stable elements is all but a Noether normalization for a cohomology ring. In addition, the meaning of "stable" can be clarified, which has been unclear for a long time except when a Sylow subgroup is normal. Namely, "universally stable" turns out to be "invariant" by considering an automorphism group.

The detailed version of this note is to appear elsewhere.

§ 1 序

本稿の目的は有限群の cohomology 環の正規化について論ずることである。1961年に Evens [3]は有限群の cohomology 環の有限生成性を示し、続いて1971年に Quillen[14]はその Krull次元が基本可換 p -部分群の最大階数に等しいことを示した。次に問題となるのは Noether の正規化である。

問題 有限群の cohomology 環の Noether の正規化を見出せ。

標準的な正規化は存在しないだろうと長い間思われていたが、1989年になってその候補として Evens-Priddy の universally stable element の環が出現した[4]。Cohomology 環における新概念の試金石としては、Quillen[13]以来(可換群に近いという意味で) extraspecial 群が用いられるのが常である。そこで我々は extraspecial 群を扱い、吉田理論を用いて universally stable element の環が直交群の交換子群の不変部分環になることを示した[11]。これに加えて本稿ではこの不変部分環が多項式環に極めて近いことを述べる。この結果 universally stable element の環は Noether の正規化にあたるものであると結論できる。

§ 2 universally stable elementの環

G を有限群, P を G の Sylow 2-部分群とする。(以下 2 が任意の素数 p で置き換えられる部分も多いが, 本稿では $p=2$ に限定する。) k は 2 元体を表す。 G の mod-2 cohomology 環を次のように書く:

$$H^*(G) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^n(G, k).$$

このとき

$$\text{Im}(\text{res}: H^*(G) \rightarrow H^*(P)) = \{\text{the stable elements of } H^*(P)\}$$

であることはよく知られている[1]。 $P \triangleleft G$ のとき右辺は $H^*(P)^G$ と書き換えられるが一般の場合の stable の意味は長い間不明であった。ところが $\text{Aut}(P)$ まで込めて考えると P が可換群に近いときは 固定 を意味することが以下の議論で示される。

定義 (Evens-Priddy [4])。 $H^*(P)$ における universally stable element の環を次のように定める:

$$I(P) = \bigcap_G \text{Im}(\text{res} : H^*(G) \rightarrow H^*(P)),$$

ここで G は P を Sylow 2-部分群に持つすべての有限群を動く。

彼等は $H^*(P)$ が有限生成 $I(P)$ -加群なことを $\bigcap$ が有限個の間
に合うことを述べている。

§ 3 almost extraspecial 群

Quillen [13] に従って extraspecial 群よりも少し広いクラスの群
を扱うが、いずれも正規部分群が多いという意味で可換群に
極めて近いものである。

定義 (Kahn [8]). almost extraspecial 群 P とは位数 2 の巡回
群 V の基本可換 2-群 V による拡大のことである。又 $O^2(\text{Out}(P))$
は $\text{Out}(P)$ の奇数位数の元で生成される部分群を表す。(表 1)。

定理 (小川 [11] 及び [12]). P が almost extraspecial 群ならば、

$$I(P) = H^*(P)^{O^2(\text{Out}(P))}.$$

但し P が D_8 と基本可換 2-群の直積のときを除く。更に

$P = D_8^{n-1} Q_8$ ならば $I(P)/\sqrt{0}$ は多項式環である。

このように extraspecial 群に対して $I(P)$ が自己同型群の不変部分環となり, ある場合には中零根基を法として多項式環になっていることから Evens-Priddy の universally stable element の環は cohomology 環の標準的な部分環であると主張できる。

注意 Q_8 と D_8 は指標表が同一でよく比較されるが, Q_8 のすべての部分群が正規であるのに対し, D_8 は4個の指数4の正規でない部分群を持つ点で異なる。 D_8 を準同型像に持たなければうまくいくというのが吉田理論である[20]。

表1 almost extraspecial 群の例

P	$O^2(\text{Out}(P))$ ³⁾
rank $n+1$ の基本可換 2-群	$GL_{n+1}(2) \cong A_n(2)$
Hamiltonian 2-群 ¹⁾	—
D_8^n ²⁾	$\Omega_{2n}^+(2) \cong D_n(2)$
$D_8^n C_4$	$Sp_{2n}(2) \cong B_n(2) \cong C_n(2)$
$D_8^{n-1} Q_8$ ²⁾	$\Omega_{2n}^-(2) \cong {}^2D_n(2)$

1) これは位数8の四元数群 Q_8 と基本可換 2-群の直積であり, すべての部分群が正規である[7]。

2) D_8 は位数8の二面体群でありこの2つが extraspecial 群である[7]。間の C_4 は位数4の巡回群である。

3) 古典群については[2] $\text{Aut}(P)$ については[7, 5]を参照のこと。

§4 証明

前半の自己同型群の不変部分環になるという所には、吉田-佐々木の移送定理 ([21] 及び [15]) を用いる。これは有限群 G が P を Sylow 2-部分群に持つとき、ある条件のもとで

$$H^*(G) \cong H^*(N_G(P))$$

を主張するものである。移送定理は P が可換のときは成立し、Swan の定理 ([18]) として古くから知られていた。 P が almost extraspecial 群でありかつ D_8 と基本可換 2-群の直積でないときも移送定理は成立し、その結果 $H^*(P)$ の部分環の集合について次のことが簡単に示されて前半の証明が終わる：

$$\begin{aligned} & \{H^*(P)^C \mid C \text{ は } \text{Out}(P) \text{ の奇数位数の部分群を動く}\} \\ &= \{H^*(G) \mid G \text{ は } P \text{ を Sylow 2-部分群に持つすべての有限群を動く}\}. \end{aligned}$$

例外の場合 $\text{Out}(P)$ の任意の部分群に対して $I(P)$ は $H^*(P)$ の不変部分環ではない。

後半では自己同型群による不変部分環を決定するために

Quillen の方法 [13] を用いる : $P = D_8^{n-1} Q_8$ のとき

$$\text{res} : H^*(P) \rightarrow \bigoplus_Q H^*(Q)$$

が単射となるような P の部分群 Q の族 (detecting family) を選ぶ。これは Brauer の貼り合せの原理 (指標の特徴付け) の類似である [14]。実は

$$\bigoplus_Q H^*(Q) \cong \text{Ind}_{\text{Stab}_{\text{Aut}(P)}(Q)}^{\text{Aut}(P)} (H^*(Q))$$

であり、右辺は加群の誘導表現にあたるもので環構造を兼ね備えている (Taylor [19])。ここで

$$\text{Stab}_{\text{Aut}(P)}(Q) = \{ \sigma \in \text{Aut}(P) \mid \sigma(Q) = Q \}$$

である。更に res が $\text{Aut}(P)$ の作用と両立することも容易にわかる。このとき

$$\left(\bigoplus_Q H^*(Q) \right)^{\text{Aut}(P)} \cong H^*(Q)^{\text{Stab}_{\text{Aut}(P)}(Q)}$$

であるが、 Q が小さいので右辺が計算でき、 $I(P)/J_0$ が多項

式環であることがわかる。 P は可換群に近いために1次でない既約実表現を1つだけ持っており, その Stiefel-Whitney 類 (例えば [6] を参照のこと) が $I(P)/\sqrt{0}$ の生成元である。

§ 5 問題

これから問題を簡単に紹介する。

1. Stanley [17] のような不変式論を cohomology 環で展開せよ。

普通の不変式論では多項式環から始めてその部分環として Cohen-Macaulay 環が出てくるが, cohomology 環の場合完交環の不変部分環が多項式環になる例がある (Quillen [13])。上述の定理もその現れである。

2. 有限 2 群 P を固定するとき P を Sylow 2-部分群に持つ有限群を G とすると, $H^*(G)$ は $H^*(P)$ の部分環として有限個しかない (Evens-Priddy [4])。そこで $H^*(P)$ の部分環として $H^*(G)$ をすべて求めよ。又 $I(P)$ を決定せよ。

P が D_{2^n} ($n \geq 2$), Q_{2^n} ($n \geq 3$), SD_{2^n} ($n \geq 4$) のときは $H^*(G)$ の分類が Martino-Priddy [9] に, $I(P)$ が Evens-Priddy [4] に記述されている。奇素数 p に対しては, P が基本可換 p -群のとき $I(P)$ が Mui [10], P が metacyclic p -群のとき $H^*(G)$ の分類及び $I(P)$ が 佐々木 [16] からわかる。

References

- [1] H. Cartan and S. Eilenberg, "Homological Algebra", Princeton Univ. Press, Princeton, 1956.
- [2] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker and R. A. Wilson, "ATLAS of Finite Groups", Clarendon Press, Oxford, 1985.
- [3] L. Evens, The cohomology ring of a finite group, Trans. Amer. Math. Soc. 101 (1961), 224-239.
- [4] L. Evens and S. Priddy, The ring of universally stable elements, Quart. J. Math. Oxford Ser.(2) 40 (1989), 399-407.
- [5] R. L. Griess, Jr., Automorphisms of extra special groups and nonvanishing degree 2 cohomology, Pacific J. Math. 48 (1973), 403-422.
- [6] J. Gunarwardena, B. Kahn and C. Thomas, Stiefel-Whitney classes of real representations of finite groups, J. Algebra 126 (1989), 327-347.
- [7] B. Huppert, "Endliche Gruppen I", Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [8] B. Kahn, The total Stiefel-Whitney class of a regular representation, J. Algebra 144 (1991), 214-247.
- [9] J. Martino and S. Priddy, Classification of BG for groups with dihedral or quaternion Sylow 2-subgroups, J. Pure Appl. Algebra 73 (1991), 13-21.
- [10] H. Mui, Modular invariant theory and cohomology algebras of symmetric groups, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 22 (1975), 319-369.

- [11] Y. Ogawa, On the subring of universally stable elements in a mod-2 cohomology ring, Tokyo J. Math. 15 (1992), 91-97.
- [12] Y. Ogawa, On a Noether normalization for a mod-2 cohomology ring, preprint (1993).
- [13] D. Quillen, The mod 2 cohomology rings of extra-special 2-groups and the spinor groups, Math. Ann. 194 (1971), 197-212.
- [14] D. Quillen, The spectrum of an equivariant cohomology ring: I, Ann. of Math. (2) 94 (1971), 549-572.
- [15] H. Sasaki, On a transfer theorem for Schur multipliers, Hokkaido Math. J. 8 (1979), 228-238.
- [16] H. Sasaki, The mod p cohomology algebra of a finite group with metacyclic Sylow p -subgroup (in this volume).
- [17] R. P. Stanley, Invariants of finite groups and their applications to combinatorics, Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) 1 (1979), 475-511.
- [18] R. G. Swan, The p -period of a finite group, Illinois J. Math. 4 (1960), 341-346.
- [19] M. J. Taylor, A logarithmic approach to class groups of integral group rings, J. Algebra 66 (1980), 321-353.
- [20] T. Yoshida, Character-Theoretic transfer, J. Algebra 52 (1978), 1-38.
- [21] T. Yoshida, On G -functors (I): transfer theorems for cohomological G -functors, Hokkaido Math. J. 9 (1980), 222-257.