

inner function についての 二, 三の話題

奈良高専 貴志 一男

§ 1. 序

Fisher (1) は disk algebra A の単位球は finite Blaschke product (= A の inner function) の凸閉包である事を示し, 更に inner function (またはその商) による近似についていろいろ研究している (2), (3). Rudin (4) は Fisher (1) の結果を generalized analytic function に拡張した。§ 2 ではこれらの事柄について述べる。

§ 3 では abstract Hardy space $H^\infty(dm)$ の inner function の商によって $L^\infty(dm)$ の関数を近似する事について Douglas - Rudin (5) の結果を述べる。

§ 4 では inner function を使って, $H^\infty(dm)$ の complex homomorphism m を含む Gleason part J_m ($\neq \emptyset$) の特徴づけ, part metric のある性質, J_m の (Gelfand topology による) 閉包 J_m^- の性質, ident $I = \{f \in H^\infty(dm) \mid f|_{J_m} \equiv 0\}$ について

関係した二、三の性質を調べることにする。

§2. finite Blaschke product の凸閉包

複素平面に、閉単位円板を D 、単位円周を T とする。 A を disk algebra、すなわち A は $\bar{D}$ 上で連続で D の解析的関数関数全体を T に制限した function algebra である。

$$A = \left\{ f \in C(T); \hat{f}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} f(e^{i\theta}) d\theta = 0, n = -1, -2, \dots \right\}$$

ともなる。 $A \ni \Phi, |\Phi|=1$ ならば Φ は A の inner function という。 A の inner function は finite Blaschke product で

$$\Phi(z) = \lambda \prod_{i=1}^N \frac{z - \alpha_i}{1 - \bar{\alpha}_i z}, \quad |\lambda|=1, \alpha_i \in D$$

なる形の式である。

定理 (Fisher(1)). disk algebra A の単位球 $\{f \in A; \|f\| \leq 1\}$ は A の inner function 全体の (supremum norm の位相での) 凸閉包に一致する。

証明 $\forall f \in \{f \in A; \|f\| \leq 1\}$ ならば $f_t(z) = f_t(z) = f_t(z), 0 \leq t \leq 1, z \in \bar{D}$ とする。 $f \in C(\bar{D})$ かつ $t \rightarrow 1$ のとき $\bar{D}$ で f_t は f に一様収束する。ゆえに、

$$(i) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta < 1, \quad \|f - f_t\| < \varepsilon/2$$

また, Carathéodory の定理により inner function の列 $\{\Phi_n\}$ が存在して Φ_n は f に (Dz) 義一様収束する。

(2) $\forall \varepsilon > 0, \forall t < 1, \exists \Phi$ (inner of A) such that $\|f_t - \Phi\| < \varepsilon/2$

(1)(2) $\Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists t < 1, \exists \Phi$ such that $\|f - \Phi_t\| < \varepsilon$.

$z = \tau \cdot \Phi_t = \lambda \prod_{i=1}^N \frac{tz - \alpha_i}{1 - \bar{\alpha}_i t z}$ 自身は A の inner function の convex combination である事を示せばよい。

$\alpha = re^{i\theta}, 0 \leq t \leq 1$ とする。

$$\begin{aligned} \frac{tz - \alpha}{1 - \bar{\alpha}tz} &= \frac{t(1-r^2)}{1-t^2r^2} \left\{ \frac{z - \alpha t}{1 - \bar{\alpha}tz} \right\} + \frac{r(1-t^2)}{1-t^2r^2} (-e^{i\theta}) + \frac{(1-t)(1-r)}{1-rt} \{0\} \\ &= \text{inner function の convex combination} \end{aligned}$$

従って, Φ_t は inner function の convex combination である。

Q.E.D

G は compact abelian group, T は G の dual group, Σ は T における semigroup

$$C_\Sigma = \{f \in C(G); \hat{f}(\gamma) = \int_G f(x) (-x, \gamma) dx = 0 \text{ for } \gamma \notin \Sigma\}$$

とする。

定理 (W. Rudin (4)). C_Σ の単位球は C_Σ の inner function の全体の内閉包である。

Fisher (3) は更に次のような事を証明した。

定理. K を単位円 T の compact subset, (disk algebra) A
 $\ni f$, $\|f\| \leq 1$ とする,

(i) K のある辺傍で $|f|=1$ ならば, K 上で f は A のある inner function によって一様近似される.

(ii) K の Lebesgue measure は 0 であるとする. K 上で $|f|=1$
 ならば K 上で f は A の inner function によって一様近似される.

定理. A の inner function の商は $\{f \in C(T); |f|=1\}$ の
 中で norm-dense である.

§3. inner function の商による近似

§2 §4 で A を compact Hausdorff space X 上の uniform algebra とし, A の maximal ideal (= complex homomorphism) space $M(A)$ の各要素の表現関数は unique であるとする.

$m \in M(A)$ の表現関数も m で表わす事にし, A の $L^p(dm)$ closure と $H^p(dm) = H^p$ ($p=\infty$ のときは weak-star closure) と
 する. $H^1(dm) \cap L^\infty(dm) = H^\infty(dm)$ とする. $H^\infty(dm)$ の self-adjoint
 表現 $\hat{H}^\infty$ と Silov boundary $\hat{X} = M(L^\infty(dm))$ 上に制限した
 uniform algebra とする. $f \in L^\infty = \bigcap_p |H^p|$
 ならば $(\hat{f})_K(\hat{X}) = \bigcap_p |(\hat{f})_K|$ とする.

$f \in H^\infty(dm)$, $|f|=1$ a.e.-dm なる関数と $H^\infty(dm)$ の inner function という, $H^\infty(dm)$ の inner function の全体を $\mathcal{U}$ で表わす.

次の事柄は同値である.

- 1) $m \in X \quad (\subset M(A))$
- 2) $H^\infty(dm) = L^\infty(dm)$
- 3) $m \in M(L^\infty(dm))$
- 4) すべての inner function は定数である.

$m \in M(A) - X$ とすると定数でない inner function が存在する. Douglas - Rudin (5) によって次のような結果が得られている, (Douglas - Rudin はもう少し一般の場合に証明している)

1) $G = \{f/g; f, g \in \mathcal{U}\}$ は $L^\infty(dm)$ の絶対値が 1 のすべての関数の中で norm-dense である.

2) $\mathcal{Q} = \{f/g; f \in \text{span } \mathcal{U}, g \in \mathcal{U}\}$ は $L^\infty(dm)$ の中で norm-dense である. したがって inner function によって生成される self-adjoint $\mathfrak{A}$ algebra は $L^\infty(dm)$ の中で norm-dense

である。

$$\begin{aligned} 3) \quad \partial H^\infty(H^\infty \text{ の } \delta\text{-low boundary}) &= M(L^\infty(dm)) \\ &= \{ \varphi \in M(H^\infty), \quad |\varphi(f)|=1 \text{ for all } f \in \mathcal{U} \} \end{aligned}$$

4) $\mathcal{U}$ は ∂H^∞ と分離する。

これらの結果を classical Hardy space に応用して、

$f \in L^\infty(d\sigma)$, $|f|=1$, $0 < \varepsilon < 1$ とするとき

1°) $\|f - B_1/B_2\| < \varepsilon$ とする Blaschke product B_1, B_2 が存在する。

2°) $\|f - g_1/g_2\| < \varepsilon$ とする $H^\infty(d\sigma)$ の inner function g_1 と singular function g_2 が存在する。

3°) $\varphi \in M(H^\infty(d\sigma))$ とする

$\varphi \in M(L^\infty(d\sigma)) \iff |\varphi(f)|=1 \text{ for all singular function } f$.
 $d\sigma$ は単位円周上の Haar measure である。

Fisher (3) は §2 の Rudin の定理から次の結果を導いた。

A は compact Hausdorff space X 上の uniform algebra である。
 A に属する inner function は X の点と分離するとき、 A の inner function の商の凸閉包は $C(X)$ の単位閉球である。

これから

5) $\{f/g : f, g \in \mathcal{U}\}$ の正則関数は $\{f \in L^\infty : \|f\| \leq 1\}$ とある。

§4. Gleason part と inner function

$M(A) \ni m, \varphi \mapsto \sigma$

$$\sigma(m, \varphi) = \sup \{ |m(f) - \varphi(f)| : f \in A, \|f\| \leq 1 \}$$

$$\tau(m, \varphi) = \sup \{ |\varphi(f)| : f \in A, m(f) = 0, \|f\| \leq 1 \}$$

と定義する。

$$\sigma(m, \varphi) < 2 \iff \tau(m, \varphi) < 1$$

である。 $\sigma(\varphi_1, \varphi_2) < 2 \iff \varphi_1 \sim \varphi_2$ と $\sim$ を定義すると、

$\sim$ は同値関係を満足する。 $P(m) = \{\varphi \in M(A) : \varphi \sim m\}$ と m を含む $M(A)$ の Gleason part といい、 $m \in M(H^\infty(dm))$ を含む $M(H^\infty(dm))$ の Gleason part を $J(m)$ と表わす。

Wermer の定理, $P(m) \cong \{m\}$ とするとある inner function

Z (Wermer の embedding function という) が存在して

$$1) ZH^2(dm) = H_m^2, \quad H_m^2 = \{f \in H^2(dm) : \int f dm = 0\}$$

$$2) \hat{Z} \text{ は } P(m) \text{ (または } J(m)) \text{ から } D \text{ 上への一対一写像}$$

で、その逆写像 $\hat{Z}^{-1} = \tau$ は連続である。

$$3) f \in H^\infty \text{ のとき, } \varphi \in P(m) \text{ (または } J(m)) \text{ に対して}$$

$$\varphi(f) = \hat{f}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n, \quad \lambda = \hat{Z}(\varphi), \quad a_n = \int \bar{Z}^n f dm.$$

注) $\mathcal{P}(m)$ と D とは homeomorphic である.

$$(I) \quad \mathcal{P}(m) \neq \{m\} \iff \mathcal{P}(m) \neq \{m\}.$$

(II) inner function による $\mathcal{P}(m) (\neq \{m\})$ の特徴づけ

$$\mathcal{P}(m) \neq \{m\} \iff ZH^2 = H_m^2 \text{ とする inner function } Z \text{ が存在する}$$

証明 $(\Leftarrow)$ $m \in \mathcal{M}(A) - X$, $\mathcal{P}(m) = \{m\}$, $ZH^2 = H_m^2$ とすると, $\mathcal{P}(m) = \{m\}$ である. $ZH^\infty = H_m^\infty$ とする. $\varphi \in \mathcal{M}(H^\infty(dm)) - \{m\}$ の任意の要素とすると, $\sigma(\varphi, m) = 1$.

$$\begin{aligned} (*) \quad \sigma(\varphi, m) &= \sup \{ |\varphi(f)| ; f \in H_m^\infty, \|f\| \leq 1 \} \\ &= \sup \{ |\varphi(Zg)| ; g \in H^\infty, \|g\| \leq 1 \} \\ &= |\varphi(Z)| \sup \{ |\varphi(g)|, g \in H^\infty, \|g\| \leq 1 \} \\ &= |\varphi(Z)| \end{aligned}$$

$$\therefore |\hat{Z}(\varphi)| = 1 \quad \text{for } \forall \varphi \in \mathcal{M}(H^\infty(dm)) - \{m\}.$$

$\hat{Z}(m) = 0$ であるから m は $\mathcal{M}(H^\infty(dm))$ の open-closed point である. $\therefore m \in \mathcal{M}(L^\infty(dm))$ (Silov idempotent theorem)
 $\therefore m \in X$, 矛盾 $m \in X$ ならば明らか: $ZH^2 = H_m^2$ とする inner function は存在しない. Q.E.D.

$\mathcal{P}(m) \neq \{m\}$ とする. (*)式より

$$\varphi \in \mathcal{J}_0 \Leftrightarrow \sigma(m, \varphi) < 1 \Leftrightarrow |\varphi(z)| < 1$$

$$\therefore \mathcal{J}_0 = \{ \varphi; \varphi \in \mathcal{M}(H^\infty), |\varphi(z)| < 1 \}$$

更に

$$\mathcal{J}_0 = \{ \varphi; \varphi \in \mathcal{M}(H^\infty), |\varphi(h)| < 1 \text{ for all } h \in \mathcal{U} - \{1\} \}$$

$$= \{ \varphi; \varphi \in \mathcal{M}(H^\infty), |\varphi(h)| < 1 \text{ for all } h \in \mathcal{U}$$

$$\text{such that } m(h) = 0 \}.$$

とある。

III) part metric について

A_0 は disk algebra とする、 $\lambda_0, \lambda \in \mathbb{D}$ に対して Schwarz
の不等式から

$$\sup \{ |f(\lambda)|; f(\lambda_0) = 0, \|f\| \leq 1, f \in A_0 \} = \left| \frac{\lambda - \lambda_0}{1 - \bar{\lambda}_0 \lambda} \right| = \sigma(\lambda_0, \lambda)$$

$$\mathcal{J}_0(m) \equiv \{m\} \text{ のとき } \text{Warmer の定理から } \mathcal{J}_0 = \{ \tau(\lambda); \lambda \in \mathbb{D} \}.$$

(*)式から

$$\sigma(\tau(\lambda), \tau(0)) = |\tau(\lambda)(z)| = |\lambda| = \sigma(\lambda, 0)$$

$$\therefore \sigma(\tau(\lambda), \tau(0)) = \sigma(\lambda, 0)$$

この関係式は

$$\begin{aligned} \frac{z - \lambda}{1 - \bar{\lambda} z} H^\infty &= H_\varphi^\infty \quad (\varphi = \tau(\lambda) \in \mathcal{J}_0) \\ &= \{ f \in H^\infty(dm); \varphi(f) = 0 \} \end{aligned}$$

を使って

$$\sigma(\tau(\lambda_0), \tau(\lambda)) = \sigma(\lambda_0, \lambda) = \left| \frac{\lambda - \lambda_0}{1 - \bar{\lambda}_0 \lambda} \right|$$

と一般化出来る。

更に $\rho(m)$ に属する $\tau(\lambda)$ と $\tau(\tilde{\lambda})$ と書き, $\rho(m)$ に属する $\tau(\lambda)$ はこのまゝの記号 $\tau(\lambda)$ と書くこと,

$$\tau(\varphi, \varrho) = \sup \{ |\varrho(f)| : f \in A_\varphi, \int |f|^2 d\varrho < 1 \}$$

(A. Browder. Introduction to function algebras. p. 174) を使って

$$\tau(\tau(\lambda_0), \tau(\lambda)) = \tau(\tau(\tilde{\lambda}_0), \tau(\tilde{\lambda})) = \tau(\lambda_0, \lambda) .$$

また H. König の等式

$$\log \frac{1 + \tau(\varphi, \varrho)}{1 - \tau(\varphi, \varrho)} = 2 \log \frac{2 + \tau(\varphi, \varrho)}{2 - \tau(\varphi, \varrho)}$$

を使って

$$G(\tau(\lambda_0), \tau(\lambda)) = G(\tau(\tilde{\lambda}_0), \tau(\tilde{\lambda})) = G(\lambda_0, \lambda)$$

となる。

IV) $\int \bar{z}$ について。

Wiermer embedding function Z について τ の多項式の weak-star topology $(= \sigma(L^\infty, L^1))$ による閉包は $\mathcal{H}^\infty(m)$, Z と $\bar{Z}$ について τ の多項式の weak-star topology による閉包は $\mathcal{L}^\infty(m)$ となる。このとき次の関係式が成立して (8).

$$\begin{aligned} H^\infty &= \mathcal{H}^\infty \oplus I^\infty, & I^\infty &= \{ f \in H^\infty : \int \bar{z}^n f dm = 0, n=0, 1, 2, \dots \} \\ L^\infty &= \mathcal{L}^\infty \oplus N^\infty, & N^\infty &= \{ f \in L^\infty : \int \bar{z}^n f dm = 0, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \} \end{aligned}$$

($\oplus$ は algebraic direct sum を表わす)

次の事柄は同値である.

1) $f \in I^\infty$

2) $\sum^n f \in I^\infty$ ($n=0, 1, 2, \dots$)

3) $\hat{f}(\varphi) = 0$ on $\mathcal{F}_0$

$$h(I^\infty) = \text{hull of } I^\infty = \{ \varphi \in M(H^\infty); \varphi(h) = 0 \text{ for all } h \in I^\infty \}$$

とおくと, 3) から $\mathcal{F}_0 \subseteq h(I^\infty)$, 更に

$$\mathcal{F}_0 = h(I^\infty) = M(\mathcal{H}^\infty) = M(H^\infty/I^\infty)$$

が成り立つ. (証明)

$\mathcal{H}^\infty$ と $\overline{\mathcal{Z}}$ とによつて生成される algebra は $L^\infty(d\mu)$ の norm で閉じた $L^\infty(d\mu)$ の subalgebra を $\mathcal{H}^\infty(\overline{\mathcal{Z}})$ と表わすと, $\mathcal{F}_0$ の topological boundary $\partial \mathcal{F}_0$ は

$$\partial \mathcal{F}_0 = M(\mathcal{H}^\infty(\overline{\mathcal{Z}})) \quad (\text{cf. (6)})$$

となる. また $\mathcal{H}^\infty$ の Shilov boundary $\partial \mathcal{H}^\infty$ は

$$\partial \mathcal{H}^\infty = M(\mathcal{L}^\infty) = \{ \varphi \in M(\mathcal{H}^\infty); |\varphi(h)| = 1 \text{ for all } h \in \mathcal{U} \cap \mathcal{H}^\infty \}$$

となる. また $\mathcal{L}^\infty$ の周知の定数部分からなる集合を $\mathcal{L}_R^\infty$ とおくと

$$\mathcal{L}_K^\infty = \log |(H^\infty)^{-1}|$$

となり $\hat{H}^\infty$ は $M(\mathcal{L}^\infty)$ に制約したものは logmodular algebra になる.

次に $M(H^\infty) - h(I^\infty)$ ($h(I^\infty) = \{0\}$) について調べる.
 $M(I^\infty)$ ($= I^\infty$ の maximal ideal space) に対して $\forall \varphi$ に対して $\varphi(h) = 1$ となる $h \in I^\infty$ が存在する.

$$\psi(f) = \varphi(fh), \quad f \in H^\infty(\text{dim})$$

とおくと $\psi \in M(H^\infty) - h(I^\infty)$ である.

$$\psi \longrightarrow \psi|_{I^\infty} = \varphi$$

よって $M(H^\infty) - h(I^\infty)$ と $M(I^\infty)$ とは homeomorphic になる.

(cf. Gamelin; Uniform algebra, p. 12)

更に $\mathcal{L}^\infty: I^\infty = I^\infty$ なる事を使って $\psi|_{H^\infty} \in M(\mathcal{L}^\infty)$ となることか解る.

$$|\psi(h)| = 1 \quad \text{for } \forall h \in \mathcal{U} \cap H^\infty.$$

$$\psi(h) = \chi \quad \text{とおく}$$

$$\int_X |h - \chi|^2 d\mu = 0 \quad (\text{d}\mu \text{ は } \psi \text{ の表現測度})$$

よって $h \in C(X)$ であるから

$$h = \chi \quad \text{on } \text{supp } \mu$$

§3 ~ Douglas - Rudin の結果より $\forall \epsilon > 0 \quad \forall f \in \mathcal{L}^\infty$ に対して

$\exists h_1 \in \mathcal{H}_p(\mathcal{U} \cap \mathcal{H}^\infty)$, $\exists h_2 \in \mathcal{U} \cap \mathcal{H}^\infty$ して

$$\|f - h_1/h_2\| < \varepsilon/2.$$

($\Leftarrow$) τ , $Z \rightarrow e^{i\theta}$ の対 τ による $\mathcal{H}^\infty$ は classical

Hardy space $H^\infty(d\sigma)$, $L^\infty \subset L^\infty(d\sigma)$ とは isometrically isomorphic
である事を使う。(8)

$$\therefore \int_X |f - \tau(f)| d\tau \leq \int_X |f - \frac{h_1}{h_2}| d\tau + \int_X |\frac{h_1}{h_2} - \tau(f)| d\tau < \varepsilon$$

$f \in C(\hat{X})$ であるから

$$f = \tau(f) \text{ on } \text{supp } \tau$$

従って, $\tau \in \mathcal{M}(H^\infty) = \mathcal{H}(I^\infty)$ の $\text{supp } \tau (\subset \hat{X})$ 上では任意
の $f \in L^\infty$ に対して

$$f = \tau(f) (= \text{const.})$$

とされる。

参考文献

- (1) S. Fisher, The convex hull of the finite Blaschke products, Bull. Amer. Math. Soc., 74(1968), 1128-1129.
- (2) ———, Another theorem on convex combination of unimodular function, Bull. Amer. Math. Soc., 75(1969), 1037-1039.
- (3) ———, Approximation by unimodular functions,

Bull. Amer. Math. Soc., 75 (1969), 795—797.

(4) W. Rudin, Convex combinations of unimodular functions, Bull. Amer. Math. Soc., 75 (1969), 795—797.

(5) R. G. Douglas & W. Rudin, Approximation by inner functions, Pacif. J. Math., 31 (1969), 313—320.

(6) R. G. Douglas, Toeplitz and Wiener Hopf operators in $H^\infty + C$. Bull. Amer. Math. Soc., 74 (1968), 895—899.

(7) H. König, On the Gleason and Harnack metric for uniform algebra, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 22 (1969), 100—101.

(8) S. Merrill & N. Lal. Characterization of certain invariant subspaces of H^p and L^p spaces derived from logmodular algebras, Pacif. J. Math., 30 (1969), 463—474.

(9) 和田 享藏, 大庭 幸雄, Function algebra & Hardy class に おける extreme point. 数理解析講義録 79 (1969).