

Virasoro環のユニタリ表現について

三重大教育 蟹江 幸博 (Yukihiko Kanie)

Virasoro環 $\mathcal{L}$ は $\mathcal{L} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} e_n + \mathbb{C} e'_0$ の形の Lie 環で, 交換関係は $[e_m, e_n] = (m-n) e_{m+n} + (m^3-m) e'_0 / 12$, $[e'_0, e_n] = 0$ で与えられるものである。 S^1 上の多項式ベクトル場の Lie 環の一意的な 1 次元中心拡大であり, 素粒子論の対称弦模型のゲージとして広く知られたものである。

Cartan 部分環 $\mathfrak{g} = \mathbb{C} e_0 + \mathbb{C} e'_0$ の dual $\mathfrak{g}^* \cong \mathbb{C}^2 \ni (h, c) = \lambda$ ($\lambda(e_0) = h$; $\lambda(e'_0) = c$) の元に対して, Verma module $M(\lambda) = M(h, c)$ が次のように定義される。 $|h, c\rangle \in M(h, c)$ に $\mathfrak{g}$ を生成させ, $|h, c\rangle$ は

$$e_0 |h, c\rangle = h |h, c\rangle, \quad e'_0 |h, c\rangle = c |h, c\rangle; \quad e_n |h, c\rangle = 0 \quad (n \geq 1)$$

を満たし, 他の関係はな...。 $\mathfrak{g}$ の三角分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{n}_+$

($\mathfrak{n}_{\pm} = \sum_{n \neq 0} \mathbb{C} e_{\pm n}$) を固定すると,

$$M(h, c) = U(\mathcal{L}) |h, c\rangle = U(\mathfrak{n}_-) |h, c\rangle$$

となり, $U(\mathfrak{n}_-)$ -free である。次数を $\deg e_n = n$, $\deg e'_0 = 0$ と定めると,

$M(h, c)$ に自然な grading が入り, $-d$ 次の部分を $M_d(h, c)$

と書くと, その次元は $d(\geq 0)$ の分割数 $p(d)$ となる. また $M(h, c)$ に dual に定義した L -module $M^+(h, c)$ を考えておく都合がよい. 真空 $\langle c, h | \in M^+(h, c)$ を $\langle c, h | e_0 = \langle c, h | h, \langle c, h | e'_0 = \langle c, h | c, \langle c, h | e_{-n} = 0 \quad (n \geq 1)$ として定義したもので, $M(h, c)$ と同様の性質を持つ.

Verma module は h, c と同じ性質を持つベクトルを持つ highest weight modules に対し universal な性質を持っている.

さて, Verma module の既約性や同値性に対して本質的な役割を果たすのが, 真空期待値

$$(1) : M^+(h, c) \times M(h, c) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\text{定義} \left\{ \begin{array}{ll} \textcircled{1} (1) \text{ sesquilinear} & \textcircled{2} \langle c, h | h, c \rangle = 1 \\ \textcircled{3} \langle u x | v \rangle = \langle u | x v \rangle & u \in M^+(h, c), v \in M(h, c), x \in L \end{array} \right.$$

に対する Kac 行列式 ([7] 参照) である. (1) は $M_d^+(h, c) \times M_{d'}(h, c)$ ($d \neq d'$) 上では常に 0 で, (1) の $M_d^+(h, c) \times M_d(h, c)$ への制限が表わす $p(d) \times p(d)$ -行列の行列式 $K_d(h, c)$ が問題になるものである.

例えば, $M(h, c)$ の既約性は, $K_d(h, c) \neq 0 \quad (\forall d \geq 0)$ という条件にある. Kac と, その後証明を与えた Feigin-Fuks [2] によれば,

$$K_d(h, c) = \text{const.} \prod_{k=1}^d \prod_{j|k} \Phi_{j, k_j}(h, c)^{p(d-k)}$$

$$\text{ここで, } \Phi_{p, g}(h, c) = \left(h + \frac{p^2-1}{24}(c-13) - \frac{1}{2}(pg+1) \right) \left(h + \frac{g^2-1}{24}(c-13) - \frac{1}{2}(pg+1) \right) - \frac{(p^2-g^2)^2}{16}$$

[11] では、この $\Phi_{p,g}$ の因子因数分解に対応して、 $\mathcal{L}$ の Fock 表現を構成し、intertwining operators の積分表示を与えたが、実は $\Phi_{p,g}$ には別の分解がある。 $M(h, c)$ の unitarizability に関連して、Friedman & [3] が発見した因数分解は、

$$\Phi_{p,g}(h, c) = (h - h_{p,g}(c)) (h - h_{g,p}(c))$$

である。ここで、 c を $c = 1 - 6/m(m+1)$ と表わすような m ととり、 $h_{p,g}(m) = [(m+1)p + mg]^2 - 1 / 4m(m+1)$ としたものである ($h_{p,g}(m+1) = h_{g,p}(m)$ に注意)。

Hermite 形式 $\{, \} : M(h, c) \times M(h, c) \longrightarrow \mathbb{C}$ が

$$\{h, c\rangle, |h, c\rangle\} = 1, \quad \{e_n |u\rangle, |v\rangle\} = \{ |u\rangle, e_{-n} |v\rangle\}, \quad \{e'_n |u\rangle, |v\rangle\} = \{ |u\rangle, e'_n |v\rangle\}$$

を満たすとき contravariant と呼ぶ。ベクトル $v \in M(h, c)$ のノルム $\|v\|^2 = \{v, v\}$ が負のとき、ghost と呼ぶことにすると、 $M(h, c)$ に ghost がいるければ、 $\{, \}$ の核で $M(h, c)$ を割ったもの $L(h, c)$ は $\mathcal{L}$ のユニタリ表現を与えることになる。

$M(h, c)$ に ghost がいるければ、 $h, c \geq 0$ になるおぼろげなことは、 $\|e_{-n} |h, c\rangle\|^2 \geq 0$ ($\forall n \geq 1$) を考えたとすぐに分るが、逆が問題である。まず連続系列として、 $h \geq 0, c \geq 1$ に対しては ghost がいるような contravariant 形式があることは難しくない。ここで σ と $\mathcal{L}$ の antilinear な antiautomorphism で $\sigma(e_n) = -e_{-n}, \sigma(e'_0) = e'_0$ で定まるものとし、 $\{u, v\} = (\sigma u | v)$ と真空期待値を用いて表わせば ($\sigma : M(h, c) \longrightarrow M^+(h, c)$ に自然に定義してお

$\langle, \rangle, \{, \}$ は contravariant 形式となり, $h > (c-1)/24$, $c > 1$ のときはこの $\{, \}$ で ghost を持たない既約表現に $M(h, c)$ が存在していることは容易に示される。残りの部分に関しては, Kac 行列式を見て, 既約性から ghost が出てくることを主張する。

面白いのは実は $0 \leq c < 1$ の場合で, この場合 unitarizable なパラメータ (h, c) は離散的になるというのである。

定理 (Friedan et al [3]). $h \geq 0$, $0 \leq c < 1$ に対し $M(h, c)$ に ghost がいないならば, (h, c) は次の形をしている:

$$c = 1 - \frac{6}{m(m+1)}, \quad h = \frac{((m+1)p - mg)^2 - 1}{4m(m+1)} \quad \left(\begin{array}{l} m: \text{正整数} \\ p=1, 2, \dots, m-1 \\ g=1, 2, \dots, p \end{array} \right).$$

この定理を与えられている証明は, 数学的には clear とはいえないので, 意味の分る simple な証明が望まれている。

この定理の逆, つまりこのパラメータ (h, c) に対し, 実際に $\mathcal{L}$ のユニタリ表現が存在するかについても, Goddard 達 [4] が quaternion 射影空間 HP^1 に附随した coset space 表現を用いて $c = 1 - 6/((l+1)(l+2))$ に対する $\mathcal{L}$ のユニタリ表現を与えている。これにヒントを得て, と言うか, 彼らの主張を数学的に定式化し, 証明を与えたものが [12] である。Virasoro 環の出自のせいで, 多くの物理学者が Virasoro 環について多くの研究をしてい

りが、数学者には納得し難い概念構成や証明も多し。それらの厳密化のすべてに originality と主張することは難しいが、克服すれば莫大の障害も多しと思われる。

さて、[12]では $C_l^{(1)}$ 型の affine Lie 環の level 1 の integrable highest weight module を $C_1^{(1)} + C_{l-1}^{(1)}$ 型の部分環上の module として分解するという方法をとった。しかし、他にも構成法があり、 $A_1^{(1)}$ の level $(l-1)$ の表現と level 1 の表現のテンソル積と、level l の表現で分解する方法で、広島大学の脇本氏の方法である。[12]では分解の重複度も調べており、その計算はテンソル積の分解でも同様であって [12] の最後の節に付記してある。尚、研究集会後 2 つの報告を受け、た。Goddard の [5] と Kac-脇本 [10] である。これらには、Virasoro 環だけでなくその super 化である Neveu-Schwarz 環と Ramond 環に対してもユニタリ表現の構成が同様に出来ることを主張したものである。

以下 [12] に沿ってユニタリ表現の構成をすることにしよう。

§1. $X_l^{(1)}$ 型 affine Lie 環と Segal 作用素

$\mathfrak{g}$ を有限次元の単純 Lie 環で X_l 型とする。 $\mathfrak{f} \in \mathfrak{g}$ の Cartan 部分環とし、 $\Delta \subset (\mathfrak{g}, \mathfrak{f})$ のルート系とすると、 $\mathfrak{g}$ のルート空間分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$ が得られる。単純ルート系 $\bar{\alpha} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ を選んで、正のルートの集合を Δ_+ と書く。 $\mathfrak{g}$ 上の非退化対称双線形

な不変双線形形式 $(,): \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{C}$ と, $\dot{\Pi}$ に関する最大ルート θ に対して $(\theta, \theta) = 2$ とおき, θ となるように正規化しておく。

X_L^{III} 型の affine Lie 環 $\mathfrak{g}$ とは, この $\mathfrak{g}$ と内積 $(,)$ により,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$$

$$\begin{cases} [x(m), y(n)] = [x, y](m+n) + m\delta_{m+n,0}(x, y)c, \\ [c, x(m)] = [c, d] = 0, [d, x(m)] = m x(m) \end{cases}$$

で与えられるものである (ここで $x(m) = x \otimes t^m$, $x \in \mathfrak{g}$)。

$\mathfrak{f} = \mathfrak{f} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環となり, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{f})$ のルート系 Δ の単純ルート系を $\Pi = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ と取ることができる。ここで, α_i ($1 \leq i \leq l$) は $\mathbb{C}c + \mathbb{C}d$ 上では 0 として $\mathfrak{f}$ 上に拡張したもので, $\alpha_0 = \delta - \theta$ である。 $\delta \in \mathfrak{f}^*$ は $\langle \delta, \mathfrak{f} \rangle = \langle \delta, c \rangle = 0$, $\langle \delta, d \rangle = 1$ により定義される元である。

$\mathfrak{g}$ 上の内積 $(,)$ を,

$$\begin{cases} (x(m), y(n)) = \delta_{m+n,0}(x, y), (c, x(m)) = (d, x(m)) = 0, \\ (c, c) = (d, d) = 0, (c, d) = 1 \end{cases}$$

により, $\mathfrak{g}$ 上の非退化で対称な不変双線形形式に拡張すると, $\mathfrak{f}$ 上に制限したものが非退化になる。同型 $\nu: \mathfrak{f} \longrightarrow \mathfrak{f}^*$ が $(h, h') = \langle \nu(h), h' \rangle$ により定義でき, $\nu(c) = \delta$ となる。また $\lambda_0 = \nu(d)$ とおくと $\langle \lambda_0, \mathfrak{f} \rangle = \langle \lambda_0, d \rangle = 0$, $\langle \lambda_0, c \rangle = 1$ となる。 $\mathfrak{f}^*$ の内積を ν により $\mathfrak{f}$ の内積から決めると, $(\delta, \delta) = (\lambda_0, \lambda_0) = 0$ となる。

$\mathfrak{g}$ の (1) に関する dual basis $\varepsilon \{u_1, \dots, u_\ell\}, \{u'_1, \dots, u'_\ell\}$ と選ぶ, 任意の $\alpha \in \Delta$ に対して, $u_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, u^\alpha = u_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ と $(u_\alpha, u^\alpha) = 1$ とおけるように選ぶ. $\{u_i (i=1, \dots, \ell), u_\alpha (\alpha \in \Delta)\}$ と $\{u'_i, u'^\alpha\}$ は $\mathfrak{g}$ の dual basis になる. このとき $\mathfrak{g}$ の Casimir 作用素 $\hat{\Omega}$ は

$$\hat{\Omega} = \sum_{i=1}^{\ell} u'_i \otimes u_i + \sum_{\alpha \in \Delta} u^\alpha \otimes u_\alpha \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \subset U(\mathfrak{g})$$

と定義されるものとする. $\hat{\Omega}$ は dual basis の取り方に依らず.

$U(\mathfrak{g})$ の中心に属し, $\mathfrak{g}$ 上 $2g \cdot \text{id}$ として作用する. ここで, g は $\mathfrak{g}$ の双対コクセター数で, $2g = |\theta + \check{\rho}|^2 - |\check{\rho}|^2$ となる, である. $\check{\rho} \in \mathfrak{g}^*$ は $\check{\rho} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} \alpha$ である.

$\mathfrak{g}$ の basis $\varepsilon \{u_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ とおくと書くことにすると, $\{u_\lambda(m) (m \in \mathbb{Z}, \lambda \in \Lambda), c, d\}$ と $\{u^\lambda(m) (m \in \mathbb{Z}, \lambda \in \Lambda), d, c\}$ は互に dual な $\mathfrak{g}$ の basis を与えている. このとき, Kac は $\mathfrak{g}$ の Casimir 作用素 $\hat{\Omega}$ と

$$\hat{\Omega} = 2 \sum_{m \geq 1} \sum_{\lambda \in \Lambda} u^\lambda(-m) u_\lambda(m) + 2 \sum_{\alpha \in \Delta_+} u^\alpha u_\alpha + 2\psi(\rho) + \sum_{j=1}^{\ell} u^j u_j + 2dc$$

と定義した. ここで, $\rho \in \mathfrak{g}^*$ は $\rho = g\Lambda_0 + \check{\rho}$ と定めらる.

さて $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ の元の正規積を

$$:x(m)y(n): = \begin{cases} x(m)y(n) & (m < n) \\ \frac{1}{2} \{x(m)y(n) + y(m)x(m)\} & (m = n) \\ y(n)x(m) & (m > n) \end{cases}$$

と定義し, 形式的な Laurent 級数

$$\hat{S}(z) = \sum_{j=1}^{\ell} : \hat{u}^j(z) \hat{u}_j(z) : + \sum_{\alpha \in \Delta} : \hat{u}^\alpha(z) \hat{u}_\alpha(z) :$$

を考えよう。ここで、形式的 Laurent 級数 $\hat{x}(z)$ ($x \in \mathfrak{g}$) は

$$\hat{x}(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} x(m) z^{-m-1}$$

と定義されるものである。更に、 $\hat{S}(z)$ を展開すると、

$$\hat{S}(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} S(m) z^{-m-2},$$

その係数 $S(m)$ は $\mathfrak{g}$ の dual basis の取り方に依らず決まり、特に

$$S(0) = \Omega - 2(g+c) d$$

であることも分る。

最初に導入した G. Segal ([9] 参照) に因んで Segal 作用素と呼ぶ $S(m)$ は次の交換関係と満足している。

$$[S(m), \hat{x}(z)] = 2(g+c) z^m \left\{ z \frac{d}{dz} + (m+1) \right\} \hat{x}(z),$$

$$[S(m), S(n)] = 2(g+c)(m-n) S(m+n) + \frac{\dim \mathfrak{g}}{12} (m^3 - m) \sum_{n+m,0} 4(g+c)c.$$

左 $\mathfrak{g}$ -module V が、最高ウェイト $\Lambda \in \mathfrak{f}^*$ を持つ最高ウェイト表現 (h.w. module) であるというのは、

$$\pi_+ v = 0, \quad h v = \langle \Lambda, h \rangle v \quad (h \in \mathfrak{f}); \quad V = U(\mathfrak{g}) v$$

を満たすベクトル $v \in V$ (真空ベクトルという) が存在するときである。

ここで $\pi_+ = \pi_+(\mathfrak{g})$ は、単純ルート系 Π に対して

$$\pi_+ = \sum_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha$$

で与えられるものである。

正規積の定義により、Segal 作用素 $S(m)$ は、任意の h.w. module に働く作用素になっていることが分る。また、最高ウェイト Λ

を持つ h.w. module V 上で, Casimir 作用素 Ω は

$$\Omega = \{(\lambda, \lambda) + 2(\lambda, \rho)\} \text{id}_V$$

として作用する ([8] 参照)。

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{f})$ の単純コル - ト $\alpha_i^\vee (0 \leq i \leq l) \in \mathfrak{f} \subseteq \alpha_i^\vee = \frac{2}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \nu^+(\alpha_i)$ で定義し, 基本ウエイト $\lambda_i (0 \leq i \leq l) \in \mathfrak{f}^* \subseteq \langle \lambda_i, \alpha_j^\vee \rangle = \delta_{ij}$, $\langle \lambda_i, \alpha \rangle = 0$ と定義すると, $\langle \rho, \alpha_i^\vee \rangle = 1 (0 \leq i \leq l)$, $\langle \rho, \alpha \rangle = d$ となる。 $\mathfrak{g}$ のル - ト束 Q とウエイト束 P は

$$P = \sum_{i=0}^l \mathbb{Z} \lambda_i \oplus \mathbb{C} \delta \supset Q = \sum_{i=0}^l \mathbb{Z} \alpha_i$$

と表えられ, また

$$P_+ = \sum_{i=0}^l \mathbb{Z}_{\geq 0} \lambda_i \oplus \mathbb{C} \delta \supset Q_+ = \sum_{i=0}^l \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i$$

とかく。 P_+ の元を dominant な整ウエイトと言う。

最高ウエイト λ を持つ h.w. module V はウエイト分解 $V = \sum_{\lambda \in P(V)} V_\lambda$ を持つが, そのウエイトの集合 $P(V)$ は $\lambda - Q_+$ に含まれる。

$\lambda \in \mathfrak{f}^*$ に対して $\mathfrak{g}$ の Verma module $M(\lambda)$ が $\mathfrak{L}$ に対するのと同様に定義され, その既約な商 module $L(\lambda)$ は 1 つしかない。

h.w. module V が integrable とは, 任意の実ル - ト α に対し $\mathfrak{g}_\alpha$ の任意の元が V に局所中零に作用するときである。 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{f})$ の実ル - トとは, 単純ル - ト束 Π の元から Weyl 群 W の作用での像に属するもののことである。また Weyl 群 W は $GL(\mathfrak{f}^*)$ の部分群で, 単純鏡映 $r_i \in GL(\mathfrak{f}^*)$ ($r_i(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i$, $\lambda \in \mathfrak{f}^*$, $0 \leq i \leq l$)

で生成したもののことである。今の場合、所謂 affine Weyl 群
になっている。

Kac [8] に依って次のことが知られている。h.w. module $L(\Lambda)$
が integrable であることと $\Lambda \in P_+$ が同値であり、integrable な h.w.
module はある $L(\Lambda)$, $\Lambda \in P_+$ と同型になる。

$\Lambda \in P_+$ に対して、非負整数 $k = \langle \Lambda, c \rangle$ を Λ の level とい
い、 c は $L(\Lambda)$ 上 $k \cdot \text{id}$ として働く。また Casimir 作用素 Ω は
 $L(\Lambda)$ 上 $\{\langle \Lambda, \Lambda \rangle + 2\langle \rho, \Lambda \rangle\} \text{id}$ として働くことが分る。このとき
 $g+k > 0$ となるので、

$$T(m) = \frac{1}{2(g+c)} S(m) \quad (m \in \mathbb{Z}); \quad T'(0) = \frac{\dim \mathfrak{g}}{g+c} c$$

とかけ、 $S(m)$ の交換関係から

$$\begin{cases} [T(m), T(n)] = (m-n) T(m+n) + \frac{m^3-m}{12} \delta_{m+n,0} T'(0); \\ [T(m), T'(0)] = 0 \end{cases} \quad (m, n \in \mathbb{Z})$$

となり、Virasoro 環の表現が $L(\Lambda)$ 上に得られることになる。
双対コクセター数 g が具体的に知られていることから、 L の
 $L(\Lambda)$ 上に得られた表現の中心チャージ (e_0 の作用の値) は 1 より
大きくなり、離散パラメータ領域のユニタリ表現は表わ
し得ない。

そこで $X_l^{(n)}$ 型の Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対し、 $X_l^{(n)}$ ($l < l$) 型の部分環 (又は
そのような部分環の直交直和の部分環) $\mathfrak{h}$ を考えて、同様に

Segal 作用素 $T_R(m)$, $T_R'(0)$ を考える。 $T_R(m)$ に対して $T(m)$ に対する conformal 共変性

$$[T(m), \hat{\chi}(z)] = z^m \left\{ z \frac{d}{dz} + (m+1) \right\} \hat{\chi}(z)$$

が同じ形で成り立つことから, $[T(m), T_R(n)] = 0$ が分り,

$$T_L(m) = T(m) - T_R(m); \quad T_L'(0) = T'(0) - T_R'(0)$$

とかけば, これらも Virasoro 環の関係式

$$[T_L(m), T_L(n)] = (m-n) T_L(m+n) + \frac{m^3-m}{12} \delta_{m+n,0} T_L'(0);$$

$$[T_L(m), T_L'(0)] = 0 \quad (m, n \in \mathbb{Z})$$

を満足する。

古典型の Lie 環に対して, 次のように部分環をとることができる。

$$A_l^{(n)} \supset A_0^{(n)} \times A_{l-1}^{(n)}; \quad C_l^{(n)} \supset C_1^{(n)} \times C_{l-1}^{(n)}; \quad B_l^{(n)} \supset B_{l-1}^{(n)}; \quad D_l^{(n)} \supset D_{l-1}^{(n)}$$

すると, level k の integrable h.w. module $L(\lambda)$ 上での $[T_L(m), T'(0)]$ による Virasoro 環 $\mathcal{L}$ の表現の中心チャージは,

$$A_l^{(n)} : (k-1) \left\{ 1 - \frac{k(k+1)}{(k+l+1)(k+l)} \right\} \quad ; \quad k=1 \text{ のとき } 0; \quad k=2 \text{ のとき } 1 - \frac{6}{(l+2)(l+3)}$$

$$C_l^{(n)} : k \left\{ \frac{2l^2+l}{l+1+k} - \frac{3}{2+k} - \frac{2(l-1)^2+l-1}{l+k} \right\} \quad ; \quad k=1 \text{ のとき } 1 - \frac{6}{(l+1)(l+2)},$$

$$B_l^{(n)}, D_l^{(n)} : k=1 \text{ のとき } \frac{1}{2}; \quad k=2 \text{ のとき } 1$$

となる。Friedan の定理から, $A_l^{(n)}$ 型で level 2 の表現, $C_l^{(n)}$ 型で level 1 の表現が候補となる。次節では $C_l^{(n)}$ 型の場合を扱う。

かう。この場合は、神保・三輪 [6] により分岐則が計算されてゐるので都合が良い。

$\lambda \in P_+$ に対する $L(\lambda)$ には

$$\{v_\lambda, v_\lambda\} = 1, \quad \{u, av\} = \{\bar{\omega}(a)u, v\} \quad (u, v \in L(\lambda), a \in \mathfrak{g})$$

を満たす正定値の hermite 形式が一意的に存在することから、H. Garland によつて知られてゐる。ここで、 v_λ は $L(\lambda)$ の真空ベクトルを一つ固定したもので、 $\bar{\omega}$ は $\mathfrak{g}$ の反線形な反射合で

$$\bar{\omega}(x(m)) = \bar{\omega}_0(x)(-m) \quad (x \in \mathfrak{g}); \quad \bar{\omega}(c) = c, \quad \bar{\omega}(d) = d$$

で与えられるものである。 $\bar{\omega}_0$ は $\mathfrak{g}$ の反線形な反射合を一つ固定したものである。またこのとき、Segal 作用素 $T(m)$ に対して $\bar{\omega}(T(m)) = T(-m)$ が成り立ち、従つて $\bar{\omega}(T_\perp(m)) = T_\perp(-m)$ となり、Virasoro 環の表現 $\{T_\perp(m) (m \in \mathbb{Z}), T'_\perp(0)\}$ に対して、

$$\{u, T_\perp(-m)v\} = \{T_\perp(m)u, v\}, \quad \{u, T'_\perp(0)v\} = \{T'_\perp(0)u, v\}$$

が、任意の $u, v \in L(\lambda)$ に対して成り立つという意味で、ユニタリ表現を与えてゐることになる。

§2. $C_\ell^{(1)}$ 型 affine Lie 環と Virasoro 環のユニタリ表現

$\mathfrak{g}$ を $C_\ell^{(1)}$ 型の affine Lie 環とし、少し詳しく述べることにしよう。 $\mathfrak{g}$ の実現を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{ap}(\ell, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2\ell; \mathbb{C}); {}^t X J + J X = 0\}$$

(ここで $J = \begin{pmatrix} & I \\ -I & \end{pmatrix}$ とする) とおくと、 $h_i = E_{ii} - E_{i+\ell, i+\ell}$ は

$\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ を張る $\tau \cdots 3$ $\mathfrak{g} = \sum_{i=1}^l \mathbb{C} h_i$. ($\because \tau: E_{ij}$ は $\mathfrak{gl}(2l; \mathbb{C})$ の (i, j) -行列単位である。) $\varepsilon_i \in \mathfrak{g}^*$ と $\varepsilon_i(h_j) = \delta_{ij}$ を定めると, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ のル-ト系 Δ は

$$\Delta = \{ \pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j) \quad (1 \leq i < j \leq l); \quad \pm 2\varepsilon_i \quad (1 \leq i \leq l) \}$$

でよえられ, 単純ル-ト系 $\dot{\Delta}$ は $\dot{\Delta} = \{ \alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \dots, \alpha_{l-1} = \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l, \alpha_l = 2\varepsilon_l \}$ と取るこゝが出来た。最大ル-ト θ は $\theta = 2\varepsilon_l$, $\dot{\rho}$ は $\dot{\rho} = l\varepsilon_1 + (l-1)\varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_l$ と表わされる。

$\mathfrak{g}$ 上の $\mathfrak{g}$ -不変な対称双線形式 $(,)$ を $(X, Y) = \tau(XY)$ とおくと非退化になる ($\because \tau$ は $\mathfrak{gl}(2l; \mathbb{C})$ の元と見てのもの)。この $(,)$ に對して, $\tau(h_i) = 2\varepsilon_i$ となり, $(h_i, h_j) = 4(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 2\delta_{ij}$ になり, $(\theta, \theta) = 2$ を満足してゐる。Segal 作用素 $T(m)$ は $(,)$ の取り方には依るが $(,)$ に課された条件を満たす限り), この内積が具体的に分かり易い。また双対 $\mathfrak{g}$ への数 g は, $g = \frac{1}{2}(\theta, \theta) + (\theta, \dot{\rho}) = l+1$ となり, $\tau \cdots 3$ 。

$\mathfrak{g}$ の反線形な反対合 $\bar{\omega}_0$ を

$$\bar{\omega}_0(E_\alpha) = E_{-\alpha} \quad (\alpha \in \dot{\Delta}), \quad \bar{\omega}_0(h_i) = h_i \quad (1 \leq i \leq l)$$

定まるものと取ることにする。ここで E_α は $\alpha \in \dot{\Delta}$ に対するル-トベクトルで, $E_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} = E_{ij} - E_{j+l, i+l}$; $E_{\varepsilon_i + \varepsilon_j} = E_{ij} + E_{j+l, i+l}$; $E_{-(\varepsilon_i + \varepsilon_j)} = E_{i+l, j} + E_{j+l, i}$; $E_{2\varepsilon_i} = E_{i, i+l}$; $E_{-2\varepsilon_i} = E_{i+l, i}$ であり得るものとす。 $\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{C} E_\alpha$ ($\alpha \in \dot{\Delta}$) とおくと, ル-ト分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g} + \sum_{\alpha \in \dot{\Delta}} \mathfrak{g}_\alpha$ が得られる。

ル-ト系 $\dot{\Delta}$ と $\dot{\mathfrak{g}}$ の Cartan 部分環 $\dot{\mathfrak{h}}$ と

$$\dot{\Delta} = \dot{\Delta}_1 \cup \dot{\Delta}_2 \cup \dot{\Delta}_\perp, \quad \dot{\Delta}_1 = \{\pm 2\varepsilon_1\}, \quad \dot{\Delta}_\perp = \{\pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j) \ (2 \leq j \leq l)\}$$

$$\dot{\Delta}_2 = \{\pm 2\varepsilon_i \ (2 \leq i \leq l), \pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j) \ (2 \leq i < j \leq l)\},$$

$$\dot{\mathfrak{h}} = \dot{\mathfrak{h}}_1 + \dot{\mathfrak{h}}_2, \quad \dot{\mathfrak{h}}_1 = \mathbb{C}h_1, \quad \dot{\mathfrak{h}}_2 = \mathbb{C}h_2 + \dots + \mathbb{C}h_l$$

と分解し.

$$\dot{k}_i = \dot{\mathfrak{h}}_i \oplus \sum_{\alpha \in \dot{\Delta}_i} \dot{\mathfrak{g}}_\alpha \quad (i=1,2)$$

とみると, $\dot{k}_1$ と $\dot{k}_2$ は $\dot{\mathfrak{g}}$ の部分環で, $(,)$ に関して互に直交している。 $\dot{k}_1$ と $\dot{k}_2$ はそれぞれ C_l 型と C_{l+1} 型の単純 Lie 環となり, $\dot{\mathfrak{h}}_i$ は $\dot{k}_i$ ($i=1,2$) の Cartan 部分環で, 上の分解がル-ト空間分解を与えている。 $\dot{\Pi}_i = \dot{\Pi} \cap \dot{\Delta}_i$ は $\dot{\Delta}_i$ の単純ル-ト系になり, $\dot{\Delta}_i$ の正のル-トの和の半分 $\dot{\rho}_i$ と最大ル-ト θ_i は,

$$\dot{\rho}_1 = \varepsilon_1, \quad \theta_1 = 2\varepsilon_1; \quad \dot{\rho}_2 = (l-1)\varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_l, \quad \theta_2 = 2\varepsilon_2$$

と与えられる。 $(,)$ を $\dot{k}_i \times \dot{k}_i$ に制限すると, $(\theta_i, \theta_i) = 2$ と正規化された $\dot{k}_i$ -不変な対称双線形形式になっている。

$\mathfrak{g}$ の部分空間 k_1, k_2, k と

$$k_i = \dot{k}_i \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d \quad (i=1,2); \quad k = k_1 + k_2$$

と定めると, k_1 は $C_l^{(1)}$ 型の, k_2 は $C_{l+1}^{(1)}$ 型の affine Lie 環になる。また k_i はそれぞれ $\dot{k}_i$ に関して不変である。前節で述べたように, conformal 変換性が k_i に対して定義される Segal 作用素 $T_i(m)$ に対して成り立つことと, $\dot{k}_1 \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ と $\dot{k}_2 \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ との直交性から, $[T(m) - T_i(m), T_i(n)] = [T_1(m), T_2(n)] = 0$ が成

り立つ: とから,

$$T_L(m) = T(m) - T_1(m) - T_2(m) \quad (m \in \mathbb{Z})$$

$$T'_L(0) = \left\{ \frac{\dim \mathfrak{g}}{2(g+c)} - \frac{\dim \dot{\mathfrak{k}}_1}{2(g_1+c)} - \frac{\dim \dot{\mathfrak{k}}_2}{2(g_2+c)} \right\} c$$

が, Virasoro環 \$\mathcal{L}\$ の関係式を満たすことが分る (ここで, \$g_i\$ は \$\dot{\mathfrak{k}}_i\$ の双対コクセタ - 数で, \$g_1 = 2, g_2 = l\$ である).

\$\pi_{\pm}(k) = \pi_{\pm} \cap k\$ とおくと, \$k = \pi_-(k) \oplus \mathfrak{f} \oplus \pi_+(k)\$ と分解される。

\$\lambda \in P_+\$ の level を 1 とし, \$L(\lambda)\$ を考えよう。\$L(\lambda)\$ の元 \$v\$ が \$\pi_+(k)v = 0\$ を満たすとき, \$k\$-特異ベクトルと呼び, その全体を \$\mathcal{S}(\lambda; k)\$ と書こう。\$\mathcal{S}(\lambda; k)\$ は \$\mathcal{L}\$ の作用で不変であり, \$\{, \}\$ に関してユニタリ表現を与えており, \$\mathfrak{f}\$-不変でもある: とから, ウェイト空間分解

$$\mathcal{S}(\lambda; k) = \sum_{\lambda \in P(\lambda; k)} \mathcal{S}_{\lambda}(\lambda; k)$$

を持つ。\$\pi: \mathfrak{f}^* \rightarrow \mathfrak{f}^* \in (,)\$ に関する直交射影とし, \$\bar{P}(\lambda; k) = \pi(P(\lambda; k))\$ とおき, 各 \$\bar{\lambda} \in \bar{P}(\lambda; k)\$ に対して

$$\mathcal{S}(\lambda; k, \bar{\lambda}) = \sum_{\substack{\lambda \in P(\lambda; k) \\ \pi(\lambda) = \bar{\lambda}}} \mathcal{S}_{\lambda}(\lambda; k)$$

とおくと, これは \$\mathcal{L}\$ の作用で不変となり, \$\mathcal{S}(\lambda; k, \bar{\lambda}) \perp\$

$$T'_L(0) = \left\{ \frac{(\lambda, \lambda) + 2(p, \lambda)}{2(l+2)} - \frac{(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_1) + 2(p_1, \bar{\lambda}_1)}{2 \times 3} - \frac{(\bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_2) + 2(p_2, \bar{\lambda}_2)}{2(l+1)} \right\} - d$$

となることが分る。ここで $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 \in \check{g}_1^* \oplus \check{g}_2^*$ である。つまり、 $\mathcal{S}(\lambda; k, \bar{\lambda})$ 上で $T_1(0)$ は $-d + (\text{定数})$ として働いてゐる。

k のルート分解を保持しており、そのルート系 $\Delta(k)$ は $\Delta(k) = \{\alpha \in \Delta; g_\alpha \subset k\}$ で与えられる。 $\alpha \in \Delta(k)$ に対して、 $k_\alpha = g_\alpha$ とおく。 k の実ルートは g の実ルートで $\Delta(k)$ に属するものとするとき、 k の h.w. module に対して ϕ integrable という概念が定義できる。 $\lambda \in \check{g}^*$ に対して、既約な h.w. k -module $L(k, \lambda)$ (λ を最高ウェイトとして) が定義され、 ϕ integrable である条件は $\lambda \in P_+(k) = \{\lambda = k\lambda_0 + \sum_{j=1}^l n_j \varepsilon_j + a\delta; a \in \mathbb{C}, k \geq n_1 \geq 1, k \geq n_2 \geq n_3 \geq \dots \geq n_l \geq 0\}$ で与えられることが分る。

Kac-Peterson [9] の完全可約性定理から、 $\lambda \in P_+$ に対して、integrable な h.w. g -module $L(\lambda)$ は、 k -module として integrable な h.w. k -modules の直和に分解することが分る。

各 $\lambda \in P_+(k)$ に対して真空ベクトル $v_\lambda \in L(k, \lambda)$ を選んでおく。すると、 $\lambda \in P_+$ に対して、 $P(k, \lambda) \subset P_+(k)$ となり、

$$\Phi: \sum_{\lambda \in P(k)} L(k, \lambda) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{S}_\lambda(\lambda; k) \longrightarrow L(\lambda)$$

なる線形写像を、

$$\Phi((av_\lambda) \otimes u) = au \quad (a \in U(k), u \in \mathcal{S}_\lambda(\lambda; k))$$

で定め、左辺の k -module 構造を $a(v \otimes u) = av \otimes u$ ($a \in U(k)$) で与えると、 Φ は k -module としての同型を与えることが分る。

さて、level 1 の dominant 整ウェイト $\lambda \in P_+$ で $\langle \lambda, d \rangle = 0$ を満たすものは、

$$\lambda_0, \lambda_1 = \lambda_0 + \varepsilon_1, \dots, \lambda_l = \lambda_0 + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_l$$

の $l+1$ 個である。この時、次の主定理を得る。

定理 各 j ($0 \leq j \leq l$) に対して、

$$i) \quad \bar{P}(\lambda_j; k) = \left\{ r\varepsilon_1 + \sum_{i=1}^s \varepsilon_{i+1} ; r, s \in \mathbb{Z}, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq s \leq l-1 \right\} \\ r+1 \equiv j \pmod{2}.$$

ii) 各 $\bar{\lambda}(r, s) = r\varepsilon_1 + \sum_{i=1}^s \varepsilon_{i+1} \in \bar{P}(\lambda_j; k)$ に対して、 $\mathcal{L}$ -module $\mathcal{S}(\lambda_j; k, \bar{\lambda}(r, s))$ は 既約 $\mathcal{L}$ -module $L(h, c)$ と同型である。:

$$c = 1 - \frac{1}{(l+1)(l+2)}, \quad h = \frac{\{(l+2)(s+1) - (l+1)(j+1)\}^2 - 1}{4(l+1)(l+2)}$$

この定理により、Friedan の与えたパラメータすべてに対して既約ユニタリ表現を構成できることが容易に分るであろう。

定理を示す為に、 $\lambda \in \lambda_i$ ($0 \leq i \leq l$) のどれかとし、 $L(\lambda)$ の k -module としての分解を用い、 $L(\lambda)$ の指標を integrable h.w. k -module の指標で展開し、その係数に対応する既約 $\mathcal{L}$ -module の指標が一通り出てくることを示すという方針で行う。

$$\text{h.w. module } V = \sum_{\lambda \in P(V)} V_\lambda \text{ の指標は, } ch_V = \sum_{\lambda \in P(V)} \dim V_\lambda e^\lambda \text{ と}$$

定義される。ここで $e^\lambda (\in \mathfrak{g}^*)$ は形式的に $e^\lambda e^\mu = e^{\lambda+\mu}$ を満たすものとしても良いし、 $\mathfrak{g}$ のある領域上で収束する正則関数と見ても良い。

さて、 $\lambda \in P_+$ に対して integrable h.w. module $L(\lambda)$ の指標 $ch_{L(\lambda)}$ は Weyl-Kac の公式として知られているが ([8] 参照), Kac-Peterson [9] により テーラー級数を用いて書き直すことが出来る。

$(\nu, k) \in \mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}_{>0}$ に対して、テーラー関数 $\mathcal{V}_{\nu, k}(\tau, v)$ を $(\tau, v) \in \mathcal{H}_+ \times \mathbb{C}$ ($\mathcal{H}_+ = \{\tau \in \mathbb{C}; \text{Im } \tau > 0\}$) の関数として

$$\mathcal{V}_{\nu, k}(\tau, v) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z} + \frac{\nu}{k}} e\left[\frac{k}{2}\tau\gamma^2 + k\gamma v\right]$$

と定義する。ここで、 $e[*] = \exp(2\pi\sqrt{-1}*)$ である。また

$\mu = \sum_{j=1}^l \mu_j \varepsilon_j \in \dot{P} \subset \mathfrak{g}^*$ と $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して

$$A_{\mu, k}(\tau, u) = \det \left(\mathcal{V}_{\mu_i, 2k}(\tau, u_j) - \mathcal{V}_{-\mu_i, 2k}(\tau, u_j) \right)_{1 \leq i < j \leq l}$$

なる $(\tau, u) \in \mathcal{H}_+^l \times \mathbb{C}^l$ の関数を定義する。

$\lambda = k\lambda_0 + \bar{\lambda} + a\delta \in P_+$ に対して、 $L(\lambda)$ の指標は $h \in \mathfrak{f}$ の関数

$$ch_{L(\lambda)}(h) = e[-s_\lambda + kt] \chi_\lambda(\tau, u),$$

$$\chi_\lambda(\tau, u) = \frac{A_{\bar{\lambda} + \dot{P}, k+g}(\tau, u)}{A_{\dot{P}, g}(\tau, u)} \quad ; \quad s_\lambda = \frac{|\bar{\lambda} + \dot{P}|^2}{2(k+g)} - \frac{|\dot{P}|^2}{2g} + a$$

と与えられる。但し、 $h = 2\pi\sqrt{-1}(-\tau d + \sum_{j=1}^l u_j h_j + tc) \in \mathfrak{f}$ と

$h = (\tau, u, t)$ と書くとき、 $ch_{L(\lambda)}(h)$ は $\mathcal{H}_+^l \times \mathbb{C}^l \times \mathbb{C}$ 上の関数として

収束する。神保 - 三輪 [6] により 分母公式は

$$A_{\rho, g}(\tau, u) = \eta(\tau)^{l(l-1)} \prod_{i=1}^l \theta(\tau, 2u_i) \prod_{1 \leq i < j \leq l} \theta(\tau, u_i + u_j) \theta(\tau, u_i - u_j)$$

と書き直さる。 $z = \tau$

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n \geq 1} (1 - q^n) \quad ; \quad q = e[z], \quad (\text{Euler の eta 関数})$$

$$\theta(\tau, v) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n e\left[\frac{1}{2}(n + \frac{1}{2})^2 \tau + (n + \frac{1}{2})v\right], \quad (\tau, v) \in \mathcal{H}_+ \times \mathbb{C}$$

である。

さて, Λ_j ($0 \leq j \leq l$) に対し $\chi_j^l(\tau, u) = \chi_{L(\Lambda_j)}(\tau, u)$ とかくと、指標は

$$\chi_{L(\Lambda_j)}(h) = e[-S_{\Lambda_j} \tau + t] \chi_j^l(\tau, u) \quad ; \quad S_{\Lambda_j} = \frac{4l+3}{24} - \frac{(l+1-j)^2}{4(l+2)}$$

となる。 $L(\Lambda_j)$ の k -module とし τ の分解は

$$L(\Lambda_j) = \sum_{r=0}^1 \sum_{s=0}^{l-1} \sum_{\substack{\pi(\lambda) = \bar{\lambda}(r,s) \\ \lambda \in P(\Lambda_j)}} L(k; \lambda) \otimes \mathcal{S}_{\lambda}(\Lambda_j; k)$$

となる。

$u = (u_1, u')$, $u' = (u_2, \dots, u_l)$ とおいて, $\mathfrak{g}_1 = \{(\tau, u, t) \in \mathfrak{g}; u' = 0\}$, $\mathfrak{g}_2 = \{(\tau, u, t) \in \mathfrak{g}; u_1 = 0\}$ とおけば, $\mathfrak{g}_i$ は k_i の Cartan 部分環になり、 $\tau \in \mathfrak{g}_1$ 。 $L(\Lambda_j)$ の分解を指標で表わすと、

$$\chi_j^l(\tau, u) = \sum_{r=0}^1 \sum_{s=0}^{l-1} e(j; r, s; \tau) \chi_r^l(\tau, u_1) \chi_s^{l-1}(\tau, u')$$

となる。 $z = \tau$ 、

$$e(j; r, s; \tau) = e[s(j; r, s) \tau] \sum_{a \geq 0} e[a \tau] \dim \mathcal{S}_{\Lambda_0 + \bar{\lambda}(r,s) - a \delta}(\Lambda_j; k)$$

$$s(j; r, s; \tau) = s_{\lambda_j} - s_{\lambda_r'} - s_{\lambda_s^2},$$

$$\lambda_r' = \lambda_0 + r\varepsilon_1 \in P_+(k_1); \chi_r'(\tau, u_1) = \chi_{L(k_1; \lambda_r')}(\tau, u_1),$$

$$\lambda_s^2 = \lambda_0 + \sum_{i=1}^8 \varepsilon_{i+1} \in P_+(k_2); \chi_s^2(\tau, u') = \chi_{L(k_2; \lambda_s^2)}(\tau, u')$$

である。

このとき, $(C_{\ell+1}^{(1)}, C_{\ell}^{(1)})$ に対する分岐則 (神保-三輪 [6]) から, 神保氏の巧妙な計算により, $r+s \equiv j \pmod{2}$ なる条件下に

$$\begin{aligned} \eta(\tau) e\left[-\frac{\{(\ell+2)(s+1) - (\ell+1)(j+1)\}^2}{4(\ell+1)(\ell+2)}\tau\right] e(j; r, s; \tau) &= \\ = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e\left[\{(\ell+1)(\ell+2)n^2 + ((\ell+2)(s+1) - (\ell+1)(j+1))n\}\tau\right] \\ - e[(j+1)(s+1)\tau] \sum_{n \in \mathbb{Z}} e\left[\{(\ell+1)(\ell+2)n^2 + ((\ell+2)(s+1) + (\ell+1)(j+1))n\}\tau\right] \end{aligned}$$

であることが導かれる。 $e(j; r, s; \tau)$ が τ - q 定数で書かれることがこれから直ちに分る。即ち

$$\eta(\tau) e(j; r, s; \tau) = \eta_{((\ell+2)(s+1) - (\ell+1)(j+1), 2(\ell+2)(\ell+1))}(\tau, 0) - \eta_{((\ell+2)(s+1) + (\ell+1)(j+1), 2(\ell+2)(\ell+1))}(\tau, 0).$$

ところで, F.L. Feigin - D.B. Fuchs [2] は Virasoro 環 $\mathcal{L}$ の Verma module $M(h, c)$ に対して, $\mathcal{L}$ -module としての Jordan-Hölder 分解を述べている。今望む場合 $c = c(\ell) = 1 - 6/(\ell+1)(\ell+2)$, $h = h(\ell; p, q) = [\{p(\ell+1) - q(\ell+2)\}^2 - 1]/4(\ell+1)(\ell+2)$ に, それを適用すると $M(h, c)$ の指標が求められる。 $f^*(\mathcal{L})$ の $\{e_0, e_0'\}$ に dual な basis $\{\mu, \mu'\}$ と

3う。そのとき $l \geq 1$, $0 \leq p \leq l+1$, $0 \leq q \leq l$ に対して $\mathcal{L}$ -module $L(h(l;p,q), c(l))$ の既約指標は

$$ch_{L(h,c)} = \frac{e^{h\mu + c\mu'}}{\prod_{n \geq 1} (1 - e^{n\mu})} \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{[n\{p(l+1) - q(l+2)\} + n^2(l+1)(l+2)]\mu} - e^{p\mu} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{[n\{p(l+1) + q(l+2)\} + n^2(l+1)(l+2)]\mu} \right]$$

で与えられる。

ここで $\mathcal{S}(\lambda_j; k, \bar{\lambda}(r,s))$ 上で $T_L(0)$ は, $\{s(j;r,s) + \frac{l^2+3l-4}{24(l+1)(l+2)}\} - d$ として働き, $T_L'(0)$ は $L(\lambda_j)$ 全体で $c(l)$ として働いてゐることに注意する。 $T_L(0)$ は $L(\lambda_j)$ の分解の各項の上で $-d +$ (定数) として働いてゐるので, $e^{c\mu'}$ の項を忘れて $e^\mu = e[\tau]$ と考えることが出来る。そして $\mathcal{L}$ -module $\mathcal{S}(\lambda_j; k, \bar{\lambda}(r,s))$ の指標を τ だけの関数とみて $ch(j;r,s;\tau)$ と書くと,

$$ch(j;r,s;\tau) = e\left[\left\{s(j;r,s) + \frac{1}{24} - \frac{1}{4(l+1)(l+2)}\right\}\tau\right] \sum_{a \geq 0} e[a\tau] \dim \mathcal{S}_{\lambda_0 + \bar{\lambda}(r,s) - a\delta}(\lambda_j; k)$$

となり, $e(j;r,s;\tau)$ の表示式より

$$\begin{aligned} & e\left[\frac{\{(l+2)(s+1) - (l+1)(j+1)\}^2 - 1}{4(l+1)(l+2)} \tau - \frac{1}{24}\tau\right] \eta(\tau) ch(j;r,s;\tau) = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e\left[\{(l+1)(l+2)n^2 + \{(l+2)(s+1) - (l+1)(j+1)\}n\}\tau\right] \\ & \quad - e\{(j+1)(s+1)\tau\} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e\left[\{(l+1)(l+2)n^2 + \{(l+2)(s+1) + (l+1)(j+1)\}n\}\tau\right] \end{aligned}$$

が得られる。従って、 $ch(j; r, s; \tau)$ は既約 $\mathcal{L}$ -module $L(h(l; j+1, s+1), c(l))$ の指標に一致することが分る。定理の証明が得られたことになる。

A_1''' の表現のテンソル積の分解に於ける方法も本質的には同じであることに注意しておこう。 $\mathcal{O} \in A_1''' = C_1'''$ 型 affine $\mathcal{L}$ 環とすると、記号は殆んど同じに使う。 $\mathcal{O}$ の基本ウェイトは Λ_0, Λ_1 の二つである。レベル l の P_+ ($d\tau$ の値が 0 と 1 τ) の元は、

$$\Lambda_{l,j} = j\Lambda_0 + (l-j)\Lambda_1 \quad (0 \leq j \leq l)$$

の $l+1$ 個である。レベル 1 とレベル $l-1$ の integrable h.w. module のテンソル積 $L(\Lambda_{1,r}) \otimes L(\Lambda_{l-1,s})$ ($0 \leq r \leq 1, 0 \leq s \leq l-1$) をレベル l の $L(\Lambda_{l,j})$ で展開することが出来、その分岐係数 $\tilde{e}(j; r, s; \tau)$ を、 $(\chi_{l,j}(\tau, u) = \chi_{L(\Lambda_{l,j})}(\tau, u)$ とかくとき)、

$$\chi_{1,r}(\tau, u) \chi_{l-1,s}(\tau, u) = \sum_{j=0}^l \tilde{e}(j; r, s; \tau) \chi_{l,j}(\tau, u)$$

と定めると、実は

$$\tilde{e}(j; r, s; \tau) = e(j; r, s; \tau)$$

となるのである。

References

- [1] Feigin F.L., Fuks D.B., Skew-symmetric invariant differential operators on a straight line and Virasoro algebra, *Func. Anal. & its Appl.*, 16-2(1982), 47-63 (in Russian).
- [2] Feigin F.L., Fuks D.B., Verma modules over Virasoro algebra, *Func. Anal. & its Appl.*, 17-3(1983), 91-92 (in Russian).
- [3] Friedan D., Qiu Z., Shenker S., Conformal invariance, unitarity and two dimensional critical exponents, *Phys. Rev. Letters* 52(1984), 1575-1578; *Vertex Operators in Math. & Phys.*, *Publ. MSRI*, 3(1984), 419-449.
- [4] Goddard P., Kent A., Olive D., Virasoro algebra and coset space models, *Physics Letter*, 152B, no1-2(1985), 88-90.
- [5] Goddard P., Kent A., Olive D., Unitary representations of the Virasoro and super-Virasoro algebra, to appear in *Comm. Math. Phys.*
- [6] Jimbo M., Miwa T., On a duality of branching rules for affine Lie algebras, *Algebraic Groups and Related Topics, Advanced Studies in pure Math.*, 6(1985), 17-65.
- [7] Kac V.G., Contravariant form for infinite dimensional Lie algebras and superalgebras, *Lecture Notes in Phys.*, 94(1979), 441-445.
- [8] Kac V.G., *Infinite Dimensional Lie Algebras, Progress in Math.*, 44, Birkhäuser, 1983.
- [9] Kac V.G., Peterson D.H., Infinite-dimensional Lie algebras, theta functions and modular forms, *Advances in Math.*, 53(1984), 125-264.
- [10] Kac V.G., Wakimoto M., Unitarizable highest weight representations of the Virasoro, Neveu-Schwarz and Ramond algebras, *preprint*.
- [11] Tsuchiya A., Kanie Y., Fock space representations of the Virasoro algebra — Intertwining operators — , to appear in *Publ. R.M.S., Kyoto Univ.*
- [12] Tsuchiya A., Kanie Y., Unitary representations of the Virasoro algebra, submitted to *Duke Math. J.*