

旗多様体上のある種の holonomic system の characteristic cycle と Weyl 群の表現について II

東北大理 谷崎俊之 (Toshiyuki Tanisaki)

講演で話した内容は [[T]] に書いてしまったので、本稿は [[T]] の主定理の証明及びその他の注意について述べる。記号及び参考文献は [[T]] のものをそのまま用い、同じ事をもう一度説明する事はしない。新しい参考文献は、混乱を避けるために 2 重のかぎカッコ $[[\]]$ を付けて最後にまとめた。

§1. 主定理の証明

G_K (あるいは同じ事が K) が連結でない場合には trivial な modification をすればよいのだが、簡単のために K は連結であると仮定する。

1.1 [[T; Prop 1.1]] について

Weyl 群 W の simple reflection $s \in 1$ を固定する。 s に対応する rank 1 の parabolic 部分群 $P_s (\supset B)$ とし $P_s = G/P_s$ とおく。また $B \xrightarrow{\pi_s} P_s$ は自然な射影とする。以下に次の図により自然な写像 $\mathcal{P}_s, \mathcal{W}_s, \mathcal{Q}_s$ を定める。

$$\begin{array}{ccc}
 T^*P_S \times_{P_S} B & \xrightarrow{P_S} & T^*B \\
 \pi_S \downarrow & & \downarrow \vartheta_S \\
 T^*P_S & & \mathcal{N} \times P \supset T^*P
 \end{array}$$

ここで $\mathcal{N} = \{\text{nilpotent element in } \mathfrak{g}\}$ である。

$$\begin{cases}
 \mathcal{C} = \{K\text{-orbit on } B\} \\
 \mathcal{C}_h^s = \{O \in \mathcal{C} \mid O \text{ is } s\text{-horizontal}\} \\
 \mathcal{C}_v^s = \{O \in \mathcal{C} \mid O \text{ is } s\text{-vertical}\}
 \end{cases}$$

である。

$$O \in \mathcal{C} \text{ に対して } Z_0^{(g,k)} = \overline{T_0^+ B}, \quad Z^{(g,k)} = \bigcup_{O \in \mathcal{C}} \overline{T_0^+ B} \text{ である,}$$

$$H_{2d}(Z^{(g,k)}; \mathbb{Q}) = \bigoplus_{O \in \mathcal{C}} \mathbb{Q}[Z_0^{(g,k)}]$$

である。

$O \in \mathcal{C}$ に対して $O_S = \pi_S(O)$ であるとき, B 上の K -orbit と P_S 上の K -orbit の間に次の関係が成立する事は容易にわかる。

Lemma 1

$$\text{ci) } P_S = \bigsqcup_{O \in \mathcal{C}_v^s} O_S$$

$$\text{cii) } \mathcal{S}_S^{-1}(Z^{(g,k)}) = \bigcup_{O \in \mathcal{C}_v^s} Z_0^{(g,k)} \quad (\text{既約分解})$$

$$\text{ciii) } \pi_S(\mathcal{S}_S^{-1}(Z^{(g,k)})) = \bigcup_{O \in \mathcal{C}_v^s} \overline{T_{O_S}^+ P_S} \quad (\quad)$$

$$\text{civ) } O \in \mathcal{C}_v^s \Rightarrow \mathcal{S}(Z_0^{(g,k)}) = \overline{T_{O_S}^+ P_S} \quad \perp$$

この Lemma 1 を用いると $[[T; Prop 11]]$ は Hotta $[H]$ の論法とそのまま同じ事により得られる。これは routine work になるので省略する。

1.2 主定理の証明

主定理は次のとおり。

Main theorem

$$\begin{array}{ccc} K(\mathcal{U}(g, k)) & \xrightarrow{\text{Ch}} & H_{2d}(Z^{(g, k)}) = \bigoplus_{0 \in e} \bigoplus [\overline{T_0^+ B}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ [m] & \longmapsto & \text{Ch}(m) \end{array}$$

は W -equivariant.

勝手に固定し E simple reflection s にとり

$$\text{Ch}(s \cdot [m]) = s \cdot \text{Ch}(m) \quad (\forall m \in \mathcal{U}(g, k))$$

を示せばよい。

$[[KT; Tw]]$ により、 $0 \in \mathcal{C}$, $0' \in \mathcal{C}_v^s$ に対し $m(0', 0) \in \mathbb{Z}$ が定まる。

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{l} \text{Ch}(m) = \sum_{0 \in \mathcal{C}} m_0 [\overline{T_0^+ B}] \\ \Rightarrow \text{Ch}(\int_{\pi_s} m) = \sum_{0 \in \mathcal{C}} m_0 \left(\sum_{0' \in \mathcal{C}_v^s} m(0', 0) [\overline{T_{0_s}^+ P_s}] \right) \end{array} \right. \end{aligned}$$

さらに

$$0 \in \mathcal{C}_R^s \Rightarrow \sum_{0' \in \mathcal{C}_v^s} m(0', 0) [\overline{T_{0_s}^+ P_s}] = w_s + \varphi_s^+([\overline{T_0^+ B}])$$

となる。

よって

$\exists \text{ III } \alpha \text{ ist } \beta_{II} = \dim O = \dim \pi \text{ induction zu } \pi^{\perp}, O \in \mathcal{C}_S^U$

$$- \delta [L^T J_s \text{Prop} J J] = \pi y$$

[illegible]

$$(m^s \int_{\pi} \overline{\psi}) (\psi^s m) = (m^s \int_{\pi} \overline{\psi}) (\psi^s m)$$

すなわち, $(\mathcal{O}_B)_\bullet = \mathcal{U}$ は B の Whitney stratification である。

$m_0 \in \mathcal{M}(\mathcal{O}_B, K) \ni DR(m_0) = \mathbb{C}_{\mathcal{O}_B}[-\text{codim } \hat{\mathcal{O}}_0]$ により定め
ると, $m_0|_{B-2\hat{\mathcal{O}}_0} \cong \mathcal{H}_{[\hat{\mathcal{O}}_0]}^{\text{codim } \hat{\mathcal{O}}_0}(\mathcal{O}_{B-2\hat{\mathcal{O}}_0})$ となる。

$$\begin{aligned} \underline{Ch}(m_0) &= [\overline{T_{\hat{\mathcal{O}}_0}^+ B}] + \sum_{\substack{0 \in \mathbb{C}_j^* \\ \dim \hat{\mathcal{O}}_0 < \dim \hat{\mathcal{O}}_0}} m_0 [\overline{T_{\hat{\mathcal{O}}_0}^+ B}] \quad (\equiv m_0 \in \mathbb{Z}) \\ &= [\overline{T_{\hat{\mathcal{O}}_0}^+ B}] + \sum_{\substack{0 \in \mathbb{C}_j^* \\ \dim \mathcal{O} < \dim \mathcal{O}_0}} m_0 [\overline{T_{\hat{\mathcal{O}}_0}^+ B}] \end{aligned}$$

と書ける。よって induction の手順により

$$\underline{Ch}(\mathbb{L}\pi_{S*} \sum_{\pi_S} m_0) = -2 \underline{Ch}(m_0)$$

を示せばよい。

$$DR(\mathbb{L}\pi_{S*} \sum_{\pi_S} m_0)$$

$$= \pi_S^{-1}(\mathcal{R}\pi_{S*}(DR(m_0))) [1]$$

$$= \pi_S^{-1}(\mathcal{R}\pi_{S*}(\mathbb{C}_{\hat{\mathcal{O}}_0})) [-\text{codim } \mathcal{O}_0 + 1]$$

π_S は $\mathbb{P}'$ -bundle となるから $\cong \beta \pi_S$

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{C} & \\ [1] \swarrow & & \nwarrow \\ \mathbb{C}[-2] & \longrightarrow & \mathcal{R}\Gamma(\mathbb{P}'; \mathbb{C}) \end{array}$$

により

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{C}_{\hat{\mathcal{O}}_0} & \\ [1] \swarrow & & \nwarrow \\ \mathbb{C}_{\hat{\mathcal{O}}_0}[-2] & \longrightarrow & \pi_S^{-1}(\mathcal{R}\pi_{S*}(\mathbb{C}_{\hat{\mathcal{O}}_0})) \end{array}$$

よって

$$\begin{array}{ccc}
 & m_0[1] & \\
 [1] \swarrow & & \nwarrow \\
 m_0[-1] & \longrightarrow & \mathbb{H} \pi_0^+ \int_{\pi_0} m_0
 \end{array}$$

従って

$$\begin{aligned}
 \underline{\text{Ch}}(\mathbb{H} \pi_0^+ \int_{\pi_0} m_0) &= \underline{\text{Ch}}(m_0[1]) + \underline{\text{Ch}}(m_0[-1]) \\
 &= -2 \underline{\text{Ch}}(m_0) \quad \text{q.e.d.}
 \end{aligned}$$

§2. Symmetric pair and nilpotent class

$\mathcal{N} = \{\text{nilpotent element in } \mathfrak{g}\}$, $\mathcal{N}(p) = \mathcal{N} \cap p$ とする。 $\mathcal{N}$ の G -共役類の場合の如くに $\mathcal{N}(p)$ の K -共役類について、その分類等の表があるが便利である。Procesi A に拘ると、専門家は大体 $Kac-Vinberg$ の著法 [[V]] に基づく自家用の表は持っており、この事であったが、特殊な場合 (例えば Sekiguchi [[S]]) を除いてまとめた分類表は公開されてないようである。

ここでは、ある種の特別な場合には容易に分類ができる事を示す。

[2.1] $R, e, f \in \mathfrak{g}$ が関係式

$$[R, e] = 2e, [R, f] = -2f, [e, f] = R$$

を満たすとき $\{R, e, f\}$ を S -Triple と呼び、また S -Triple

$\{R, e, f\}$ で $R \in \mathfrak{k}$, $e, f \in \mathfrak{p}$ なるものを $\text{normal } S\text{-Triple}$ と呼び。

Proposition 1

ci) (Jacobson-Morozov a lemma, see [[K]])

$$\begin{array}{ccc} \{S\text{-triple}\} / \sim_G & \xleftrightarrow{1:1} & \mathcal{N}/G \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{R, e, f\} & \longleftrightarrow & e \end{array}$$

$\exists \in S\text{-triples } \{R, e, f\}, \{R', e', f'\} \Rightarrow 112$

$$\{R, e, f\} \sim_G \{R', e', f'\} \iff R \sim_G R'$$

cii) (Kostant-Rallis [[KR]])

$$\begin{array}{ccc} \{\text{normal } S\text{-triple}\} / \sim_K & \xleftrightarrow{1:1} & \mathcal{N}(\mathfrak{p})/K \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{R, e, f\} & \longleftrightarrow & e \end{array}$$

$\exists \in \text{normal } S\text{-triples } \{R, e, f\}, \{R', e', f'\} \Rightarrow 112$

$$\{R, e, f\} \sim_K \{R', e', f'\} \iff R \sim_K R'$$

[2.2] $\pm \in$ Sekiguchi [[S]] $\#$ K 次 a 命題 が 成 り 立 つ

3。

Proposition 2 $S\text{-triple } \{R, e, f\} \Rightarrow 112$ 次は同値.

ci) $\{R, e, f\}$ は normal $S\text{-triple}$ と G -共役

cii) R は $\mathfrak{p}$ a 元 に G -共役

$\mathfrak{g}_0$ に対応する $\mathfrak{g}$ a real form があり (可成り, $\mathfrak{g}_0$ a Cartan 分解 $\in \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$ とするとき, $\mathfrak{k}, \mathfrak{p}$ は $\mathfrak{k}_0, \mathfrak{p}_0$ a 複素化)。

$\Rightarrow a \in \text{Prop 2} \Rightarrow$ 換 $\bar{z}$ 2 次 $\in$ 得る。

Corollary $e \in \mathcal{N}$ とするとき次は同値

(i) e は $\mathcal{N}(\mathcal{P})$ の元に G -共役。

(ii) e に対応する weighted Dynkin 図形において頂点 i に書かれている数字 m_i ($= 0$ or 1 or 2) とする。このとき $\mathcal{G}_0$ の Satake 図形において

$$\overset{\circ}{\underset{i}{\curvearrowright}} \Rightarrow m_i = m_{i'} \quad , \quad \bullet_i \Rightarrow m_i = 0$$

」

Prop. 2 は [15] では Antonym A の定理であるとしてあるが、証明は $\mathcal{G}_0$ の normal real form の場合にのみ与えられている。一般の場合の証明はここに残しておくが、ここでは $\mathcal{G}_0$ である。[15] における normal real form の場合の証明をたどると、要するに次の lemma を示せばよい事がわかるので、これを示す。

Lemma 2 $\{R, e, f\}$ が S -triple で、 R が $\mathcal{P}$ の元に G -共役ならば、 $\{R, e, f\}$ と G -共役な S -triple $\{R', e', f'\}$ で $R', e', f' \in \mathcal{G}_0$ なるものがあがる。

」

(証明) $\mathcal{Q}_0 \in \mathcal{P}_0$ の max. abelian subspace, $\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}$ の複素元 $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ とすると、 $\mathcal{Q}$ は $\mathcal{P}$ の max. abelian subspace である。よって $R \in \mathcal{Q}$ としうる。 $\mathcal{A}(2)$ の表現論により $\text{ad } R$ の固有直和は全て実数である。よって $R \in \mathcal{Q}_0 \subset \mathcal{G}_0$ 。

よって $\text{ad } R$ に関する固有空間分解を

$$\begin{cases} \mathfrak{g}_0 = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_0(\text{ad } \mathfrak{h}, i) \\ \mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}(\text{ad } \mathfrak{h}, i) \end{cases} \quad (\mathfrak{g}(\text{ad } \mathfrak{h}, i) = \mathfrak{g}_0(\text{ad } \mathfrak{h}, i) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$$

とある。

$$V = \{x \in \mathfrak{g}(\text{ad } \mathfrak{h}, 2) \mid \exists y \in \mathfrak{g} \text{ s.t. } \{\mathfrak{h}, x, y\} \text{ is } S\text{-triple}\}.$$

とあると, V は $\mathfrak{g}(\text{ad } \mathfrak{h}, 2)$ の non-empty Zariski open subset である

(Kostant [[K]]). $\mathfrak{g}_0(\text{ad } \mathfrak{h}, 2)$ は $\mathfrak{g}(\text{ad } \mathfrak{h}, 2)$ 中で Zariski dense

だから $V \cap \mathfrak{g}_0(\text{ad } \mathfrak{h}, 2) \neq \emptyset$. $e' \in \mathfrak{g}_0(\text{ad } \mathfrak{h}, 2) \cap V$ とあると, $\exists \tilde{f} \in \mathfrak{g}$

に $\tilde{f} = f' + \sqrt{-1}f''$ ($f', f'' \in \mathfrak{g}_0$)

とあると $\{\mathfrak{h}, e', \tilde{f}\}$ は S -triple になる。 $\tilde{f} = f' + \sqrt{-1}f''$ ($f', f'' \in \mathfrak{g}_0$)

q.e.d.

2.3 以上より自然な写像

$$N(\mathfrak{p})/K \xrightarrow{\Phi} N/G$$

の像は簡単に記述できる事がわかった。しかし一般には Φ は injective でないが, まだ分類が出来たとは言えない。ただし, Φ が injective になる事が示される場合がある。その次の場合である。

Prop. 3 $\mathfrak{g}_0$ が CSA (Cartan subalgebra) が共役を除いて unique ならば Φ は injective」

(証明) 筆者の修士論文にある, $\mathfrak{g}$ の仮定のもとで次の事が示される。

$$(*) \left[\begin{array}{l} x, y \in \mathfrak{k} \Rightarrow \dots \\ x \sim_K y \iff x \sim_G y \end{array} \right]$$

そこで, $e, e' \in \mathcal{N}(\mathfrak{p})$ に対して normal S-triple $\{h, e, f\}, \{h', e', f'\}$ をとるとき

$$e \sim_K e' \iff h \sim_K h' \quad (\text{Prop 1 (ii)})$$

$$\iff h \sim_G h' \quad (**)$$

$$\iff e \sim_G e' \quad (\text{Prop 1 (i)})$$

と等しい主張が示される。今の場合 $(*)$ は x, y が semisimple であり、かつ $\text{ad } x, \text{ad } y$ の固有値は整数に等しいときに示せばよいのである。この場合には $(*)$ を示そう。

$\mathfrak{k}$ の CSA $\mathfrak{g}^1$ と $\mathfrak{g}^1$ を含む $\mathfrak{g}$ の CSA $\mathfrak{g}'$ をとる。さらに $\mathfrak{g}'$ [resp. $\mathfrak{g}$] の元 h で $\text{ad } h$ の固有値が全て整数になるものを全体を $\mathfrak{g}'_{\mathbb{Z}}$ [resp. $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$] と書く。このとき $x, y \in \mathfrak{g}'_{\mathbb{Z}}$ により $x \sim_{W(\mathfrak{k})} y \iff x \sim_W y$ を示せばよい。(0, $\mathfrak{g}$) の root 系 Δ とすると、仮定により (0, $\mathfrak{g}'$) の root 系は $\{d|\mathfrak{g}^1 \mid d \in \Delta\}$ により与えられる事がわかる。そこで $\mathfrak{g}'_{\mathbb{Z}}$ の Weyl chamber は $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$ の Weyl chamber と $\mathfrak{g}'_{\mathbb{Z}}$ との intersection である。そこで $\square$ である。
g.e.d.

[2.4] [[T, 5.2]] には $\text{Ind}_{W(\mathfrak{k})}^{W(\mathfrak{g})}(1)$ の分解が書かれているが、この事からわかる。例 $\mathfrak{g} = E_6, \mathfrak{k} = F_4$ のとき,

$N(p)$ は 3 つの共役類にわかれて, その weighted Dynkin 図形は $[20002], [10001], [00000]$ である。よって E_6 の Springer 対応は

$$\text{Ind}_{W(F_4)}^{W(E_6)}(1) = 1_p \oplus 20_p \oplus 24_p$$

がわかる。もっとも, $W(F_4) = W(E_6)$ の character table がわかっているので, 直接計算できるはずな事ではあるし, これがわかったかると言ってどうといる事もないが, [[T]] を書いたときに, この場合ではわかっていないのでここに記しておく。

参考文献

- [[T]] 谷崎修之: 旗多様体上のある種の holonomic system の characteristic cycle と Weyl 群の表現について; 数研講義録「力学系と 11-群の表現」(1983/6) 掲載予定 (Kostant が来日した symposium)
- [[V]] E.B. Vinberg: On the classification of the nilpotent elements of graded Lie algebras; Soviet Math. Dokl. 16 (6) 1517-1520 (1975).
- [[S]] J: Sekiguchi: The nilpotent subvariety of the vector space associated to a symmetric pair; preprint (1983).
- [[K]] B. Kostant: The three-dimensional subgroup and the Bott numbers of a complex simple Lie group; Amer. J. Math. 81 973-1032 (1959).
- [[KR]] B. Kostant and S. Rallis: Orbits and representations associated with symmetric spaces; Amer. J. Math. 93 753-809 (1971).