

引き込み現象による集団的律動の発生

京大 基研 蔵本由紀

引き込み現象の擾動論的扱いを述べる。以下は、簡単な場合から始めて、より複雑な場合へと進む。

[I] 周期外力を受けた1個の振動子

$$\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}) + \underline{p}(\omega_0 t),$$

$\underline{x}, \underline{F}, \underline{p}$ は n 次元ベクトル、 $\underline{p}(\omega_0 t) = \underline{p}(\omega_0 t + 2\pi)$ 、

更に、系は $\underline{p}=0$ においては線型安定な周期解 $\underline{x}_0(t) = \underline{x}_0(t+T)$ ($T=2\pi/\omega$) をもつとする。対応する閉軌道を L とする。以下では $\underline{p}$ を小さな擾動として扱う。

L 上に適当に位相 ϕ を導入し、非擾動周期解を

$$\dot{\phi} = \omega \quad (\text{Mod. } 2\pi) \quad (1)$$

と表示する。位相 ϕ の定義を、 L を内部に含む細い管状領域 G に拡張する (図1参照)。 $\underline{p}$ が充分に小さければ、位相点は常に G 内にあると考える良い。

$\phi(\underline{x})$ ($\underline{x} \in G$) は非擾動系が常に (1) をみたすように定義される。非擾動系においては

$$\dot{\phi}(\underline{x}) = \text{grad}_{\underline{x}} \phi \cdot \underline{F}(\underline{x})$$

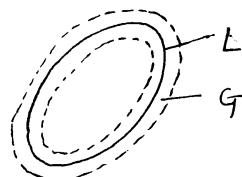


図 1

であるから、

$$\text{grad}_x \phi \cdot F(x) = \omega$$

上のように位相を定義したとき、 $n-1$ 次元の等位相面は *isochron* と呼ばれる。(図2参照) 擾動を受けた系における ϕ の運動は、

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \text{grad}_x \phi \cdot (F(x) + p(\omega_0 t)) \\ &= \omega + \text{grad}_x \phi \cdot p(\omega_0 t) \end{aligned} \quad (2)$$

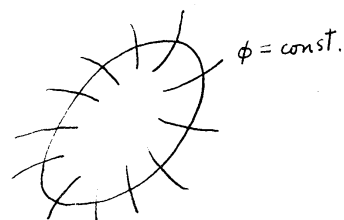


図2 isochrons

initial transient には興味がないので、以下は $t \rightarrow \infty$ のみを考える。すると、 $p \rightarrow 0$ では $x \rightarrow x_0 (\in L)$ であるから、 p のオ 1 次近似では $\text{grad}_x \phi \xrightarrow{(2)式に於て} \text{grad}_{x_0(\phi)} \phi \equiv \underline{Z}(\phi) = \underline{Z}(\phi + 2\pi)$ が許される。($\text{grad}_{x_0(\phi)} \phi$ は $(\text{grad}_x \phi)_{x=x_0(\phi)}$ の略記) よって、

$$\dot{\phi} = \omega + \underline{Z}(\phi) \cdot p(\omega_0 t).$$

$\phi = \omega_0 t + \psi$ とおけば

$$\dot{\psi} = \omega - \omega_0 + \underline{Z}(\omega_0 t + \psi) \cdot p(\omega_0 t), \quad (3)$$

$\omega - \omega_0 = O(|p|)$ と仮定すると、 ψ は *slow variable*、よって (3) を $t=0 \sim T$ に亘って平均することによって

$$\dot{\psi} = \omega - \omega_0 + \Gamma(\psi),$$

$$\Gamma(\psi) = \int_0^{2\pi} \underline{Z}(\lambda + \psi) p(\lambda) d\lambda = \Gamma(\psi + 2\pi)$$

$\omega - \omega_0 + \Gamma(\psi) = 0$ とみても ψ が存在する場合にのみ系は外力に 1 対 1 に同期する (図3参照)。

[2] 異なる振動数をもつ2つの

振動子の結合系

$$\dot{X}_1 = F(X_1) + v(X_1, X_2) + f_1(X_1),$$

$$\dot{X}_2 = F(X_2) + v(X_2, X_1) + f_2(X_2)$$

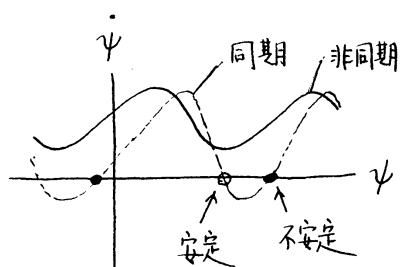


図3

2つの振動子は同等に近く ($|f_{1,2}|$: 小)

結合は弱い ($|v|$: 小) とする。各振動子の n 次元位相空間

において、[1]と同様に位相 ϕ_α ($\alpha=1, 2$) を定義すると、

$$\dot{\phi}_1 = \text{grad}_{\underline{X}} \phi \cdot (F(X_1) + v(X_1, X_2) + f_1(X_1))$$

$$\simeq \omega + \Sigma(\phi_1) v(\phi_1, \phi_2) + \Sigma(\phi_1) \cdot f_1(\phi_1),$$

また振動子2についても類似の式を得る。但し、 $v(\phi_1, \phi_2)$

$f_1(\phi_1)$ は夫々 $v(X_1(\phi_1), X_2(\phi_2))$, $f_1(X_1(\phi_1))$ 等の略記。 $\phi_{1,2} = \omega t + \psi_{1,2}$

により、[1]におけると同様、平均操作を行えば、

$$\dot{\psi}_1 = \Gamma(\psi_1 - \psi_2) + \Delta_1$$

(4)

$$\dot{\psi}_2 = \Gamma(\psi_2 - \psi_1) + \Delta_2$$

を得る。ここに、

$$\Gamma(\psi_\alpha - \psi_\beta) = \int_0^{2\pi} \Sigma(\lambda + \psi_\alpha) v(\lambda + \psi_\alpha, \lambda + \psi_\beta) d\lambda,$$

$$\Delta_\alpha = \int_0^{2\pi} f_\alpha(\lambda + \psi_\alpha) \Sigma(\lambda + \psi_\alpha) d\lambda.$$

更に $\psi_1 - \psi_2 = \psi$ とおけば

$$\dot{\psi} = \Delta_1 - \Delta_2 + \Gamma(\psi) + \Gamma(-\psi)$$

これより[1]の場合と同様に同期の条件が判る。但しこの場合

は引力的同期と斥力的同期の場合に分かれる(図4参照)。

[3] 異なる振動数をもつ $N (\rightarrow \infty)$ 個
の振動子の結合系

$$\ddot{x}_i = F(x_i) + \sum_j v_{ij}(x_i, x_j) + f_i(x_i) \\ i = 1, 2, \dots, N$$

場合[2]の単純な拡張であるから、

(4)に対応して次式を得る。

$$\dot{\psi}_i = \sum_j \Gamma_{ij}(\psi_i - \psi_j) + \Delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5)$$

上式は一般に解析的には解けないが、興味深い *soluble model* がある。すべての振動子が同等に相互作用するとし、周期関数 Γ_{ij} とし、最も簡単に次のものを仮定しよう。

$$\Gamma_{ij}(x) = -\frac{1}{N} \Gamma_0 \cdot \sin x$$

更に固有振動数 Δ_i の分布として Lorentzian

$$n(\Delta) = \frac{\gamma}{\pi} \frac{1}{(\Delta - \Delta_0)^2 + \gamma^2}$$

をとる。この場合には一種の相転移現象が起ることが示せる。重要なパラメタは

$$\eta \equiv 2\gamma / \Gamma_0$$

である。 $\eta > 1$ においては振動子は互にばらばらに運動するが、 $\eta < 1$ においては N 個の中の有限部分に相互同期的クラスターを作る。互に同期している振動子の個数を N_s とし、秩序度 σ を

$$\sigma = N_s / N$$

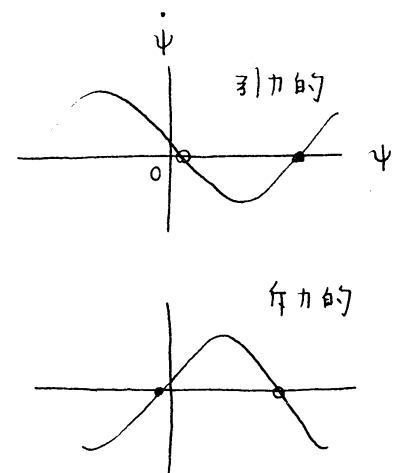


図 4

で定義すると、

$$\sigma = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \frac{2\sqrt{1-\eta}}{\eta} & (\eta < 1) \\ 0 & (\eta > 1) \end{cases}$$

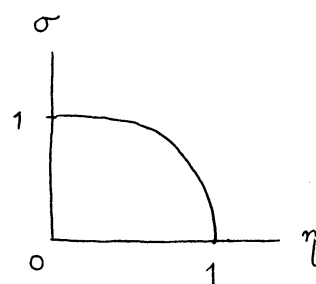


図 5

となる事が示せる (図 5 参照).

また、各振動子の固有振動数 Δ_i は相互作用の結果 $\tilde{\Delta}_i$ に変化する。ここに、

$$\tilde{\Delta}_i = \begin{cases} \Delta_0 & (|\Delta_i - \Delta_0| < \Gamma_0 \sqrt{1-\eta}) \\ \Delta_0 + (\Delta_i - \Delta_0) \sqrt{1 - \frac{\Gamma_0^2 (1-\eta)}{(\Delta_i - \Delta_0)^2}} & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$\tilde{\Delta}_i$ の分布関数 $f(\tilde{\Delta})$ は

$$f(\tilde{\Delta}) = \sigma \delta(\tilde{\Delta} - \Delta_0) + \frac{\gamma}{\pi} |\tilde{\Delta} - \Delta_0| / \{ (\tilde{\Delta} - \Delta_0)^2 + \gamma^2 + \Gamma_0^2 \chi \} \sqrt{(\tilde{\Delta} - \Delta_0)^2 + \Gamma_0^2 \chi},$$

$$\chi \equiv \begin{cases} 1-\eta & (\eta < 1) \\ 0 & (\eta > 1) \end{cases}$$

となつて、ordered state では Lorentzian と異なり、中央に δ 関数的ピークをもつとともに、その近傍で background は陥没する。(図 6 参照)

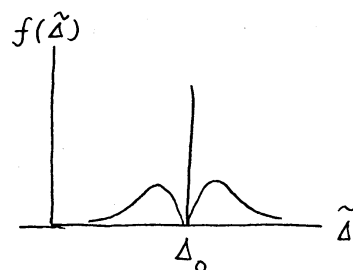


図 6

[4] ランダム力を受けた

1 個の振動子

$$\dot{X} = F(X) + f(t)$$

今までと同様に

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \text{grad}_{\underline{x}} \phi \cdot (\underline{F}(\underline{x}) + \underline{f}(t)) \\ &= \omega + \underline{Z}(\phi) \cdot \underline{f}(t) \equiv \omega + g(\phi, t)\end{aligned}\quad (6)$$

は明らか。ここでランダム力 g は弱い白色ガウス雑音であると仮定する。

$$\begin{aligned}\overline{g(\phi, t)} &= 0, \\ \overline{g(\phi, t) g(\phi, t')} &= 2D(\phi) \delta(t - t').\end{aligned}$$

これより、"Langevin 方程式" (6) は Fokker-Planck 方程式に変換される。

$$\begin{aligned}\dot{P}(\phi) &= -\frac{\partial}{\partial \phi} J, \\ J &= \left\{ \omega + \frac{1}{2} D'(\phi) \right\} P - \frac{\partial}{\partial \phi} \{ D(\phi) P \}.\end{aligned}$$

ここで、 $\phi = \omega t + \psi$ とおけば、

$$\begin{aligned}\dot{P}(\psi) &= -\frac{\partial}{\partial \psi} \tilde{J}, \\ \tilde{J} &= \frac{1}{2} D'(t + \psi) P - \frac{\partial}{\partial \psi} \{ D(t + \psi) P \}.\end{aligned}$$

$P(\psi)$ の時間変化は遅いから、上式に対して時間平均を行い

$$\dot{P}(\psi) = D \frac{\partial^2 P}{\partial \psi^2}$$

なる単純な拡散方程式を得る。即ち、ランダム力により、振動の位相は単純に拡散する。

[5] ランダム力を受けた2つの同等な振動子の結合系

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= \underline{F}(X_1) + \underline{v}(X_1, X_2) + \underline{f}_1(t), \\ \dot{X}_2 &= \underline{F}(X_2) + \underline{v}(X_2, X_1) + \underline{f}_2(t).\end{aligned}$$

ランダム力の性質は[4]の場合と同じとする。(7)式の単純な拡張として次式を得る。

$$\begin{aligned} \dot{P}(\psi_1, \psi_2) = & -\frac{\partial}{\partial \psi_1} \{ \Gamma(\psi_1 - \psi_2) P \} - \frac{\partial}{\partial \psi_2} \{ \Gamma(\psi_2 - \psi_1) P \} \\ & + D \left(\frac{\partial^2}{\partial \psi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \psi_2^2} \right) P. \end{aligned} \quad (8)$$

$\psi_1 - \psi_2 = \psi$ とおけば

$$\dot{P}(\psi) = -\frac{\partial}{\partial \psi} \left[\{ \Gamma(\psi) - \Gamma(-\psi) \} P \right] + 2D \frac{\partial^2 P}{\partial \psi^2}.$$

$D=0$ ならば、場合[3]において $\Delta_1 = \Delta_2$ とした時に一致し、 $\Gamma=0$ ならば、場合[4]に一致する。上式は周期ポテンシャル中のブラウン運動を表わしており、従って2つの振動子の間に同期（又は位相のロッキング）が起ることはない。しかし、以下に見るように、振動子の個数が ∞ になると相転移現象が起る。

[6] ランダム力を受けた $N (\rightarrow \infty)$ 個の同等な振動子の結合系

$$\dot{X}_i = F(X_i) + \sum_j v_{ij}(X_i, X_j) + f_i(t), \quad i=1, 2, \dots, N$$

(8)式の一般化として直ちに次式を得る。

$$\dot{P}(\{\psi\}) = -\sum_i \frac{\partial}{\partial \psi_i} \left\{ \sum_j \Gamma_{ij}(\psi_i - \psi_j) P \right\} + D \sum_i \frac{\partial^2 P}{\partial \psi_i^2}.$$

場合[3]と同様に、すべての振動子は同等に相互作用するという模型を考えよう。

$$\Gamma_{ij}(x) = \frac{1}{N} \Gamma(x).$$

力学変数として、位相 ψ_i の代りに、 θ なる位相をもつような振動子の数密度 $\hat{n}(\theta)$ を導入する。

$$\hat{n}(\theta) = \sum_i \delta(\theta - \psi_i)$$

$\hat{n}(\theta)$ の統計平均

$$\langle \hat{n}(\theta) \rangle_t = \int_0^{2\pi} d\psi \hat{n}(\theta) P(\psi, t) \equiv n(\theta, t)$$

の時間発展は

$$\dot{n}(\theta) = -\frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^{2\pi} d\theta' \Gamma(\theta - \theta') n(\theta') n(\theta) + D \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} n(\theta) \quad (9)$$

によって正確に記述される。上式の解は周期境界条件、 $n(\theta) = n(\theta + 2\pi)$ をみたさなければならない。集団的律動の有無は、巨視的観測量

$$\underline{Q}(t) \equiv \sum_i X_i(t)$$

を通じて測られるとしよう。上述の擾動論の枠内では、

$$\underline{Q}(t) \simeq \sum_i X_o(\phi_i(t))$$

$$= \sum_i X_o(\omega t + \psi_i(t)) = \int X_o(\omega t + \theta) n(\theta, t) d\theta$$

としてよいから、(9) の解 $n(\theta, t)$ を通じて、集団的律動の有無を調べることもできる。2つの典型的な特解を考える。

$$(a) \quad n(\theta, t) = n_o = N/2\pi$$

明らかにこの様な解は常に存在し、 $\underline{Q}(t) = \text{const.}$ を与えるので、集団的律動は存在しない。

$$(b) \quad \text{伝播解} \quad n(\theta, t) = n(\theta - \Omega t) \quad (\text{図7参照})$$

この様な解が存在すると、

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(t) &= \int \underline{X}_0(\omega t + \theta) n(\theta - \Omega t) d\theta \\ &= \int \underline{X}_0((\omega + \Omega)t + \theta') n(\theta') d\theta' \end{aligned}$$

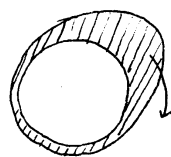


図7 リング状の θ の
空間を伝播する
密度波

となって集団的律動が存在する。

パラメタ D を小さくしてゆくと、

最初は一様な解 (a) が安定であるが、 $D = D_c$ において不安定化し、小振幅の伝播解 (b) が分岐することになる。以下はその概略である。

$$n(\theta, t) = n_0 + f(\theta, t)$$

と置き、 f, Γ を Fourier 展開する。

$$f(\theta, t) = \sum_m f_m e^{im\theta},$$

$$\Gamma(\theta) = \sum_m \Gamma_m e^{im\theta}.$$

$\{f_m\}$ に対する無限次元の常微分方程式系、

$$\dot{f}_\ell = \sigma_\ell f_\ell - i\ell \sum_{m \neq 0, \ell} \Gamma_m f_m f_{\ell-m},$$

$$\sigma_\ell = \bar{\sigma}_{-\ell} = (\ell \Gamma_\ell'' - \ell^2 D) - i\ell (1 + \Gamma_0 - \Gamma_\ell')$$

$$(\Gamma_\ell' = \Gamma_{-\ell}', \Gamma_\ell'' = -\Gamma_{-\ell}'') \text{ に注意。}$$

が得られ、これより解 (a) の線型安定性に関する臨界条件が判る。即ち

$$D_c \equiv \text{Max}(\ell^{-1} \Gamma_\ell'')$$

とすると、 $D < D_c$ では解 (a) が不安定化する。 $D = D_c$ の近傍では、分岐解析により小振幅の伝播解が摂動的に求まり、

$$\begin{aligned}
 n(\theta, t) &\simeq U_\ell \exp[i(\ell\theta - \Omega t)], \\
 |U_\ell|^2 &= (D_c - D)/S'', \\
 \Omega - \Omega_c &= -(D_c - D)S''/S', \\
 S = S' + iS'' &= -\frac{2\ell^2}{\sigma_{2\ell}} (|\Gamma_\ell|^2 + \Gamma_\ell \Gamma_{2\ell})
 \end{aligned}$$

となる。但し ℓ は $\ell |\Gamma_\ell|$ を最大にする ℓ である。明らかに $D_c > 0$ でなければ分岐現象は生じない。 $D_c > 0$ は振動子間の相互作用が引力的であることと等価である。また、 $S'' > 0$ ならば正常分岐 (normal bifurcation or supercritical bifurcation), $S'' < 0$ ならば逆分岐 (inverted bifurcation or subcritical bifurcation) となる。

参考文献

- (1) Y. Kuramoto (1975) Self-Entrainment of a Population of Coupled Nonlinear Oscillators. In Int. Symp. on Math. Prob. in Theor. Physics, H. Araki ed., Springer-Verlag, New York, Lecture Notes in Physics 39, 420-422.
- (2) Y. Kuramoto (1981) Phythms and Turbulence in Populations of Chemical Oscillators. *Physica* 106A 128-143.