

積分方程式の漸近周期解

古用 哲夫 (Furumochi Tetsuo) 島根大理

これは南イリノイ大学の T.A. Burton 教授との共同研究である。
次の形の積分方程式を考える。

$$(1) \quad x(t) = a(t) - \int_0^t D(t, s, x(s)) ds$$

ここで $a: R^+ (:= [0, \infty)) \rightarrow R^n, D: R^+ \times R^+ \times R^n \rightarrow R^n$ は連続で次を満たすとする。

$$(2) \quad a(t) = p(t) + q(t), p(t+T) = p(t) \quad \text{and} \quad q(t) \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty$$

ここで $p: R \rightarrow R^n, q: R^+ \rightarrow R^n$ は連続で $T > 0$ は定数である。

$$(3) \quad D(t, s, x) = P(t, s, x) + Q(t, s, x) \quad \text{and} \quad P(t+T, s+T, x) = P(t, s, x)$$

ここで $P: R \times R \times R^n \rightarrow R^n, Q: R^+ \times R^+ \times R^n \rightarrow R^n$ は連続である。更に、 $\forall J > 0$ に対して、連続な $P_J: R \times R \rightarrow R^+$ と $Q_J: R^+ \times R^+ \rightarrow R^+$ が存在して次を満たすとする。

$$P_J(t+T, s+T) = P_J(t, s), \quad t, s \in R$$

$$|P(t, s, x)| \leq P_J(t, s), \quad t, s \in R, |x| \leq J,$$

ここで $|\cdot|$ は Euclidean norm とする。

$$|Q(t, s, x)| \leq Q_J(t, s), \quad t, s \in R, |x| \leq J,$$

$$(4) \quad \int_{-\infty}^t P_J(t+\tau, s) ds \rightarrow 0 \quad \text{uniformly for } t \in R \text{ as } \tau \rightarrow \infty$$

$$(5) \quad \int Q_J(t, s) ds \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow \infty.$$

条件(4)は $\int_{-\infty}^t P_J(t, s) ds$ が t の連続関数であることと同値であることが知られている ([6])。以下で、次の Schauder's first theorem を用いて、(1) の漸近周期解の存在を示す。

Theorem 1 (Schauder's first theorem). $(C, \|\cdot\|)$ をノルム空間、 S を C の compact convex nonempty subset とする。この時 S を S に写すどの連続写像も不動点をもつ。

まず、次の定理が成り立つ。

Theorem 2. (2)-(5) を仮定する。もし、(1) が初期時刻 $t_0 \in R^+$ の漸近 T -周期解をもてば、その T -周期的拡張は

$$(6) \quad x(t) = p(t) - \int_{-\infty}^t P(t, s, x(s)) ds, \quad t \in R$$

の T -周期解である。

$\forall t_0 \in R^+$ に対し

$C(t_0) := \{\xi : R^+ \rightarrow R^n, bdd., \xi(t) \text{ は } t_0 \text{ 以外で連続で, } \xi(t_0) = \xi(t_0+)\}$ とし、 $\forall \xi \in C(t_0)$ に対し

$$\|\xi\|_+ := \sup\{|\xi(t)| : t \in R^+\}$$

とする。更に、 $\forall J > 0$ に対し、

$$C_J(t_0) := \{\xi \in C(t_0) : \|\xi\| \leq J\}$$

とする。Schauder's first theorem を用いて (1) の漸近 T -周期解の存在を示すために、(2)-(5) に加えて次の様な仮定をおく。ある $t_0 \in R^+$ と $J > 0$ に対して、

$$(7) \quad \|a\|_{t_0} + \int_0^t P_J(t, s) ds + \int_0^t Q_J(t, s) ds \leq J \text{ if } t \geq t_0$$

ここで $\|a\| := \sup\{|a(t)| : t \geq t_0\}$ である。更に連続関数 $L_J : R \times R \rightarrow R^+, q_J : [t_0, \infty) \rightarrow R^+$ が存在して、 $L_J(t+T, s+T) = L_J(t, s)$ かつ

$$(8) \quad |P(t, s, x) - P(t, s, y)| \leq L_J(t, s)|x - y| \text{ if } t, s \in R, |x| \leq J \text{ and } |y| \leq J,$$

$$(9) \quad q_J(t) \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty,$$

$$(10) \quad |q(t)| + \int_{-\infty}^{t_0} P_J(t, s) ds + \int_0^{t_0} P_J(t, s) ds + \int_0^t Q_J(t, s) ds + \int_{t_0}^t L_J(t, s) ds \leq q_J(t) \quad \text{if } t \geq t_0.$$

この時、次の定理を得る。

Theorem 3. (2)-(5) に加えて、ある $t_0 \in R$ と $J > 0$ に対して (7)-(10) が成立しているとする。この時、 $\sup\{|\phi_0(s)| : 0 \leq s < t_0\} \leq J$ なる任意の連続な初期関数 $\phi_0 : [0, t_0) \rightarrow R^n$ に対して、(1) は次の様な漸近 T -周期解をもつ。

$$x(t) = y(t) + z(t), x, y \in C_J(t_0), y(t+T) = y(t) \quad \text{on } R^+,$$

$$[t_0, \infty) \text{ 上で } x(t) \text{ は (1) を満たし, } |z(t)| \leq q_J(t).$$

更に、 $y(t)$ の R 上への T -周期的拡張は (7) の T -周期解である。

最後に、Theorem 3 の応用例を示す。次の二つの線形と非線形のスカラー方程式を考える。

$$(11) \quad x(t) = p(t) + \rho e^{-t} - \int_0^t (e^{-t+s} \cos t \sin s + e^{-t-s}/5)x(s)ds, \quad t \in R^+$$

$$(12) \quad x(t) = p(t) + \rho e^{-t} - \int_0^t (\sigma e^{-t+s} + \tau e^{-t-s})x^2(s)ds, \quad t \in R^+$$

Theorem 3 を用いて、(11) や (12) がしかるべき条件の下で漸近 2π -周期解をもつことを示すことが出来る。

Theorems 2, 3 の証明等の詳しい内容については、[3] を参照されたい。

参考文献

- [1] Burton, T.A., Volterra Integral and Differential Equations, Academic Press, Orlando, 1983.
- [2] Burton, T.A., Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations, Academic Press, Orlando, 1985.
- [3] Burton, T.A. and Furumochi, Tetsuo, Periodic and asymptotically periodic solutions of Volterra integral equations, to appear in Funkcialaj Ekvacioj.
- [4] Corduneanu, C., Integral Equations and Applications, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
- [5] Gripenberg, G., Londen, S.-O., and Staffans, O., Volterra Integral and Functional Equations, Cambridge U. Press, Cambridge, 1990.
- [6] Hino, Y. and Murakami, S., Periodic solutions of a linear Volterra system, Proc. Equadiff Conference, ed. by C.M. Dafermos, G. Ladas, and G. Papanicolau, Dekker, New York, 1989, 319-326.
- [7] Kato, J. and Yoshizawa, T., Remarks on global properties in limiting equations, Funkcialaj Ekvacioj 24(1981), 363-371.
- [8] Smart, D.R., Fixed Point Theorems, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1980.
- [9] Yoshizawa, T., Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost Periodic Solutions, Springer, New York, 1975.