

S -decomposable operators について

東北大教養 吉野 崇 (Takashi Yoshino)

Banach空間 X 上の有界線形作用素 T が与えられた時、その spectrum $\sigma(T)$ の任意有限個の open cover $\{G_1, \dots, G_n\}$ に対して、 $\sigma(T|Y_k) \subset G_k$ となるような T の不変部分空間 Y_k ($k=1, 2, \dots, n$) が存在して $X = \sum_{k=1}^n Y_k$ と分解できるであろうか？ 特に、 Y_k として $\sigma(T|Y_k) \subset G_k$ をみたす maximal な不変部分空間にとれる時、このような Y_k を *spectral maximal space* といい、このとき、 T は *decomposable* であるという。この概念は、1963年に、C. Foiasによって、従来 *Dunford* の意味の *spectral operators* を含む新しい class として導入された。以来、スペクトル分解の理論に於ける新分野として開拓された。

以下では、 T の不変部分空間の全体を、 $\text{Lat}(T)$ で表わし、 T の *spectral maximal spaces* の全体を $\text{SM}(T)$ で表わす。 $Y \in \text{Lat}(T)$ は、the restriction $T|Y$ of T と共に the co-

induced operator T^Y on the quotient space X/Y を導く。

このとき、 T が decomposable という性質は T^Y に遺伝するであろうか？ この問題に対して、1976年に、I. Bacalu は、

次の結果を得た。 $S = \sigma(T|Y) \cap \sigma(T^Y)$ とする時、

$\bigcup_{k=1}^n G_k \cup G_S \supset \sigma(T^Y)$ 且 $\tilde{G}_k \cap S = \emptyset$ ($k=1, 2, \dots, n$) なる open sets G_k 及び G_S に対して、 $\sigma(T^Y|Z_k) \subset G_k$ 且 $\sigma(T^Y|Z_S) \subset G_S$ をみたす $Z_k \in SM(T^Y)$ 及び $Z_S \in SM(T^Y)$ が存在して、

$X/Y = \sum_{k=1}^n Z_k + Z_S$ と分解することができる。このような性質を持つ時、 T^Y は、 S -decomposable であるという。 $S = \emptyset$ の時が、丁度 T^Y は、decomposable である。一般に、任意の operator は、 $\sigma(T)$ -decomposable なることが容易にわかる。

ここでは、 S -decomposable の一つの新しい特徴付けとして、若干の同値な条件について報告する。

§ 1. 準備.

定義 1. $\sigma_p^0(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (z-T)f(z) \equiv 0 \text{ for some non-zero analytic function } f: D_r(\lambda) \rightarrow X\}$, ここで $D_r(\lambda) = \{z \in \mathbb{C}; |z-\lambda| < r\}$, $r > 0$ とする。 $\sigma_p^0(T) = \emptyset$ なるとき、 T は、the single-valued extension property を持つという。

性質 1. [2] $Y \in \text{Lat}(T)$ ならば、

$\sigma_p^0(T^Y)^\sim \subset \sigma_p^0(T)^\sim \cup \sigma(T|Y)$, ここで “ $\sim$ ” は、closure を

表わす。

定義 2. 閉集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対して、 $X_T(F) = \{x \in X; (z-T)f(z) \equiv x \text{ for some analytic function } f: \mathbb{C} \setminus F \rightarrow X\}$ とし、任意の集合 $E \subset \mathbb{C}$ に対して、 $X_T(E) = \cup \{X_T(F); F \subset E \text{ and } F \text{ is closed}\}$ とする。このとき、 $X_T(E)$ を T の the spectral manifold という。

性質 2. (i) $X_T(E)$ は T で不変な linear manifold である。 (ii) $E_1 \subset E_2 \Rightarrow X_T(E_1) \subset X_T(E_2)$. (iii) $X_T(E) = X_T(E \cap \sigma(T))$, $X_T(\sigma(T)) = X$ and $X_T(\emptyset) = \{0\}$. (iv) $Y \in \text{Lat}(T)$ ならば、 $Y \subset X_T(\sigma(T|Y))$ and $X_{T|Y}(E) \subset X_T(E)$.

性質 3. [3] 閉集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対して、 $x \in X_T(F)$ ならば、 $(z-T)f(z) \equiv x$ for some analytic function $f: \mathbb{C} \setminus F \rightarrow X$ であるが、このとき、 $f(z) \in X_T(F)$ for any $z \in \mathbb{C} \setminus F$ である。

定理 1. (1) $\sigma(T|X_T(E)^\sim) \subset E \Leftrightarrow X_T(E) \in SM(T)$.
(2) $X_T(E)$, closed $\Leftrightarrow \sigma(T|X_T(E)) \subset E \cup \sigma_p^\circ(T)^\sim$.

定理 2. $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ なる閉集合 F_j ($j=1,2$) に対して、 $X_T(F_1 \cup F_2) = X_T(F_1) + X_T(F_2)$ である。更に、 $\sigma(T|X_T(F_1 \cup F_2)^\sim) \subset F_1 \cup F_2 \Leftrightarrow X_T(F_1 \cup F_2), X_T(F_j) \in SM(T)$ であり、 $\sigma(T|X_T(F_j)) \subset F_j$ 且つ $X_T(F_1) \cap X_T(F_2) = \{0\}$ である。

系 1. 与えられた閉集合 $S \subset \mathbb{C}$ に対して、 S を含む全ての閉集合 F に対して $\sigma(T|X_T(F)^\sim) \subset F \Leftrightarrow F' \cap S = \emptyset$ なる

凡ての開集合 F' に対して、 $X_T(F') \in SM(T)$ 且つ $\sigma(T|X_T(F')) \subset F'$ である。

系 2. 与えられた閉集合 $S \subset \mathcal{C}$ に対して、 S を含む凡ての開集合 G に対して $\sigma(T|X_T(G^\sim)) \subset G^\sim \Rightarrow D^\sim \cap S = \emptyset$ なる凡ての開集合 D に対して、 $X_T(D^\sim) \in SM(T)$ 且つ $\sigma(T|X_T(D^\sim)) \subset D^\sim$ である。

補助定理. 閉集合族 $F_\alpha \subset \mathcal{C}$ に対して、 $F_\alpha \cup F_\beta \supset \sigma_p^\circ(T)^\sim$ for any α, β such as $\alpha \neq \beta \Rightarrow \bigcap_\alpha X_T(F_\alpha) = X_T(\bigcap_\alpha F_\alpha)$.

定理 3. $Y \in Lat(T)$ 及び閉集合 $F \subset \mathcal{C}$ に対して、 $X_T(F)/Y \subset X_{TY}(F)$. 特に、 $X_T(F \cup \sigma(T|Y) \cup \sigma_p^\circ(T)^\sim)/Y = X_{TY}(F \cup \sigma(T|Y) \cup \sigma_p^\circ(T)^\sim)$ である。

系 3. $Y \in Lat(T)$ 及び閉集合 $F \subset \mathcal{C}$ に対して、 $X_T(F \cup \sigma(T|Y) \cup \sigma_p^\circ(T)^\sim)$, closed $\Rightarrow X_{TY}(F \cup \sigma(T|Y) \cup \sigma_p^\circ(T)^\sim) \in SM(T^Y)$ 且つ $\sigma(T^Y|X_{TY}(F \cup \sigma(T|Y) \cup \sigma_p^\circ(T)^\sim)) \subset F \cup \sigma(T|Y) \cup \sigma_p^\circ(T)^\sim$.

系 4. $Y \in Lat(T)$ に対して、 $X_T(F \cup \sigma(T|Y) \cup \sigma_p^\circ(T)^\sim)$, closed for every closed set $F \subset \mathcal{C} \Rightarrow F' \cap [\sigma(T|Y) \cup \sigma_p^\circ(T)^\sim] = \emptyset$ なる凡ての closed set F' に対して、 $X_{TY}(F') \in SM(T^Y)$ 且つ $\sigma(T^Y|X_{TY}(F')) \subset F'$ である。

定理 4. 与えられた閉集合 $S \subset \mathcal{C}$ に対して、 S を含む凡ての開集合 G に対して $X_T(G^\sim)$ が閉集合 $\Rightarrow \sigma_p^\circ(T)^\sim \subset S \cup H$

である。但し、 H は the holes of S ($\mathbb{C} \setminus S$ の bounded components) である。

系 5. [6] 任意の開集合 $G \subset \mathbb{C}$ に対して、 $X_T(G^\sim)$ が閉集合 $\Leftrightarrow \sigma_p^\circ(T) = \emptyset$ である。

以上、spectral manifolds の性質について、昨年 11 月に、伊豆に於ける研究集会 (科研費総合(A)) で報告したので証明は省略する。

定義 3. 閉集合 $S \subset \sigma(T)$ 及び a positive integer n に対して、 $\bigcup_{j=1}^n G_j \cup G_S \supset \sigma(T)$ 且つ $G_j^\sim \cap S = \emptyset$ ($j=1, 2, \dots, n$) なる任意の開集合 G_j 及び G_S に対して、 $\sigma(T|_{Y_j}) \subset G_j$ 及び $\sigma(T|_{Y_S}) \subset G_S$ をみたす $Y_j \in SM(T)$ 及び $Y_S \in SM(T)$ が存在して、 $X = \sum_{j=1}^n Y_j + Y_S$ と分解できるとき、 T は、 $(S, n+1)$ -decomposable といい、 $S = \emptyset$ の場合、 $(n+1)$ -decomposable という。又、凡ての positive integer n に対して、 T が $(S, n+1)$ -decomposable (又は、 $(n+1)$ -decomposable) ならば、 T は、単に、 S -decomposable (又は、decomposable) であるという。

性質 4. [1] $T, (S, 2)$ -decomposable $\Leftrightarrow \sigma_p^\circ(T)^\sim \subset S$ 且つ S を含む凡ての閉集合 F に対して、 $X_T(F) \in SM(T)$ であり、

$\sigma(T|X_T(F)) \subset F$ である。

X を, the Banach space $C[a, b]$ of complex-valued continuous functions on $[a, b]$ with the norm $\|x\| = \sup_{t \in [a, b]} |x(t)|$, $x \in X$ とするとき, $Tx = tx(t)$, $t \in [a, b]$, $x \in X$ によって定義される operator T は, not spectral, decomposable operator の例として, よく知られている。又, 上に準備した spectral manifolds の性質についての結果を用いれば, 序論で述べた I. Bacalu の結果を容易に証明することができる。即ち, $G'_k = G_k \cap [\mathbb{C} \setminus \sigma(T|Y)]$, $G'_S = G_S \cup [\mathbb{C} \setminus \sigma(T^Y)]$ とすれば, G'_k 及び G'_S は開集合で, $\bigcup_{k=1}^n G'_k \cup G'_S = \bigcup_{k=1}^n \{G_k \cap [\mathbb{C} \setminus \sigma(T|Y)]\} \cup G_S \cup [\mathbb{C} \setminus \sigma(T^Y)] = \{ \bigcup_{k=1}^n G_k \cup G_S \cup [\mathbb{C} \setminus \sigma(T^Y)] \} \cap \{ [\mathbb{C} \setminus \sigma(T|Y)] \cup G_S \cup [\mathbb{C} \setminus \sigma(T^Y)] \} \supset \{ \sigma(T^Y) \cup [\mathbb{C} \setminus \sigma(T^Y)] \} \cap \{ [\mathbb{C} \setminus \sigma(T|Y) \cap \sigma(T^Y)] \cup G_S \} = [\mathbb{C} \setminus S] \cup G_S \supset [\mathbb{C} \setminus G_S] \cup G_S = \mathbb{C} \supset \sigma(T)$ だから, $\{G'_1, \dots, G'_n, G'_S\}$ は $\sigma(T)$ の open cover である。 T は, 仮定より, decomposable だから, $\sigma(T|Y_k) \subset G'_k$ 且つ $\sigma(T|Y_S) \subset G'_S$ なる $Y_k \in SM(T)$ 及び $Y_S \in SM(T)$ が存在して, $X = \sum_{k=1}^n Y_k + Y_S$ と分解できる。又, 性質 4 によって, $\sigma_p^0(T) = \emptyset$ 且つ, 任意の閉集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対して $X_T(F)$ は閉集合である。従って, $\sigma(T|Y_k) \cap [\sigma(T|Y) \cup \sigma_p^0(T)^{\sim}] = \sigma(T|Y_k) \cap \sigma(T|Y) \subset G'_k \cap \sigma(T|Y)$

$= G_k \cap [C \setminus \sigma(T/Y)] \cap \sigma(T/Y) = \emptyset$ だから、 $Z_k = X_{TY}(\sigma(T/Y_k))$,
 $Z_S = X_{TY}(\sigma(T/Y_S) \cup \sigma(T/Y))$ とすれば、系 3 及び系 4 によ
 7、 $Z_k \in SM(T^Y)$ 且つ $Z_S \in SM(T^Y)$ であり、 $\sigma(T^Y|Z_k)$
 $\subset \sigma(T/Y_k) \cap \sigma(T^Y) \subset G'_k \cap \sigma(T^Y) = G_k \cap [C \setminus \sigma(T/Y)] \cap \sigma(T^Y) \subset G_k$,
 又、 $\sigma(T^Y|Z_S) \subset [\sigma(T/Y_S) \cup \sigma(T/Y)] \cap \sigma(T^Y) \subset [G'_S \cup \sigma(T/Y)] \cap \sigma(T^Y)$
 $= [G'_S \cup [C \setminus \sigma(T^Y)] \cup \sigma(T/Y)] \cap \sigma(T^Y) = [G'_S \cap \sigma(T^Y)] \cup [\sigma(T/Y) \cap \sigma(T^Y)]$
 $= [G'_S \cap \sigma(T^Y)] \cup S \subset G_S$ である。次に、性質 2 を用いて、
 $X = \sum_{k=1}^n Y_k + Y_S \subset \sum_{k=1}^n X_T(\sigma(T/Y_k)) + X_T(\sigma(T/Y_S))$
 $\subset \sum_{k=1}^n X_T(\sigma(T/Y_k)) + X_T(\sigma(T/Y_S) \cup \sigma(T/Y))$ だから、定理 3 を
 用いて、 $X/Y \subset \sum_{k=1}^n X_T(\sigma(T/Y_k))/Y + X_T(\sigma(T/Y_S) \cup \sigma(T/Y))/Y$
 $\subset \sum_{k=1}^n Z_k + Z_S \subset X/Y$ である。よって、 $X/Y = \sum_{k=1}^n Z_k + Z_S$ と分
 解できる。即ち、 T^Y は、 S -decomposable である。

§ 2. 主な結果.

定理 5. 次の命題は同値である。 ([9] を参照せよ.)

- (1) T は、 S -decomposable である。
- (2) T は、 $(S, 2)$ -decomposable である。
- (3) S を含む任意の開集合 F に対して、 $\sigma(T/X_T(F)^{\sim}) \subset F$ 且つ
 $\sigma(T^{X_T(F)^{\sim}}) \subset [C \setminus F^0] \cup S$ である。但し、 F^0 は F の内部を
 表わす。
- (4) S を含む任意の開集合 G に対して、 $\sigma(T/X_T(G^{\sim})^{\sim}) \subset G^{\sim}$

且つ $\sigma(T^{X_T(G^\sim)}) \subset [\mathbb{C} \setminus G] \cup S$ である。

- (5) S を含む任意の開集合 G に対して、 $\sigma(T|Y) \subset G^\sim$ 且つ、
 $\sigma(T^Y) \subset [\mathbb{C} \setminus G] \cup S$ となるような $Y \in \text{Lat}(T)$ が存在する。
- (6) S を含む任意の開集合 F に対して、 $\sigma(T|X_T(F)^\sim) \subset F$ であり、
 又、 $G_1^\sim \cap S = \emptyset$ 且つ $G_S \supset S$ なる任意の開集合 G_1 及び G_S に対して、
 $X_T(G_1 \cup G_S) = X_T(G_1) + X_T(G_S)$ である。
- (7) S を含む任意の開集合 G に対して、 $\sigma(T|X_T(G^\sim)^\sim) \subset G^\sim$
 であり、
 又、 $G_1^\sim \cap S = \emptyset$ 且つ $G_S \supset S$ なる任意の開集合 G_1 及び G_S に対して、
 $X_T(G_1 \cup G_S) = X_T(G_1) + X_T(G_S)$ である。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2); 定義より明らか。

(2) $\Rightarrow$ (3); 性質 4 より後半を示せばよい。 $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{[\mathbb{C} \setminus F] \cup S\}$

$= F^\circ \cap [\mathbb{C} \setminus S]$ ならば、 $D_F(z_0)^\sim \subset F^\circ \cap [\mathbb{C} \setminus S]$ なる $D_F(z_0)$ がとれる。

$G_1 = D_F(z_0)$, $G_S = \mathbb{C} \setminus D_{F^c}(z_0)^\sim$ とすれば、仮定より、 $\sigma(T|Y_1) \subset G_1$

且つ $\sigma(T|Y_S) \subset G_S$ なる $Y_1 \in SM(T)$ 及び $Y_S \in SM(T)$ が存在して、

$X = Y_1 + Y_S$ と分解できる。 $\sigma(T|Y_1) \subset G_1 = D_F(z_0) \subset F^\circ \cap [\mathbb{C} \setminus S]$

$\subset F$ だから、性質 2 より、 $Y_1 \subset X_T(\sigma(T|Y_1)) \subset X_T(F)$ である。

又、 $x \in X$ とすると、 $x = y_1 + y_S$, $y_1 \in Y_1$, $y_S \in Y_S$ と表わして、

$z_0 \notin G_S \supset \sigma(T|Y_S)$ だから、 $y = (z_0 - T|Y_S)^{-1} y_S$ とすれば、

$\hat{x} = \hat{y}_1 + \hat{y}_S = \hat{y}_S = (z_0 - T^{X_T(F)}) \hat{y} \in (z_0 - T^{X_T(F)}) X / X_T(F)$ である。

よって、 $(z_0 - T^{X_T(F)}) X / X_T(F) = X / X_T(F)$ 。

次に、或る $\hat{x} \in X/X_T(F)$ に対して、 $(z_0 - T^{X_T(F)})\hat{x} = \hat{o}$ とすれば、 $(z_0 - T)x \in X_T(F)$ で、 $Y_1 \subset X_T(F)$ であったから、
 $(z_0 - T)y_s = (z_0 - T)(x - y_1) = (z_0 - T)x - (z_0 - T)y_1 \in X_T(F)$.
 従って、 $(z_0 - T)y_s \in Y_s \cap X_T(F) \subset X_T(\sigma(T|Y_s)) \cap X_T(F)$
 $\subset X_T(G_s^\sim) \cap X_T(F) = X_T(G_s^\sim \cap F)$ である。何故ならば、
 $G_s^\sim \cup F \supset [\mathbb{C} \setminus D_{r/2}(z_0)] \cup D_r(z_0) = \mathbb{C}$ だから補助定理によって。
 従って、或る analytic function $f: \mathbb{C} \setminus [G_s^\sim \cap F] \rightarrow X$ が存在して、
 $(z - T)f(z) \equiv (z_0 - T)y_s$ であり、性質 3 より、 $f(z) \in X_T(G_s^\sim \cap F) \subset X_T(G_s^\sim)$ for any $z \in \mathbb{C} \setminus [G_s^\sim \cap F]$ である。
 $S \subset G_s$ だから、性質 4 より、 $X_T(G_s^\sim) \in SM(T)$ 且つ $\sigma(T|X_T(G_s^\sim)) \subset G_s^\sim$ である。又、性質 2 より、 $Y_s \subset X_T(\sigma(T|Y_s)) \subset X_T(G_s^\sim)$
 だから、 $(z - T)(z_0 - T|X_T(G_s^\sim))^{-1}f(z) = (z - T|X_T(G_s^\sim))(z_0 - T|X_T(G_s^\sim))^{-1}f(z)$
 $= (z_0 - T|X_T(G_s^\sim))^{-1}(z - T|X_T(G_s^\sim))f(z) = (z_0 - T|X_T(G_s^\sim))^{-1}(z - T)f(z)$
 $\equiv (z_0 - T|X_T(G_s^\sim))^{-1}(z_0 - T)y_s = y_s$. よって、 $y_s \in X_T(G_s^\sim \cap F)$
 $\subset X_T(F)$. 故に、 $x = y_1 + y_s \in X_T(F)$. 即ち、 $\hat{x} = \hat{o}$.
 よって、 $(z_0 - T^{X_T(F)})$ は injective. 前半と合せて、invertible なることが示されたから、 $\sigma(T^{X_T(F)}) \subset [\mathbb{C} \setminus F^0] \cup S$ が示された。

(3) $\Rightarrow$ (4); $G^\sim$ に (3) を用いればよい。

(4) $\Rightarrow$ (5); $Y = X_T(G^\sim)^\sim$ とすればよい。

(5) $\Rightarrow$ (6); はじめに、 $\sigma_p^o(T)^\sim \subset S$ を示す。

もし、 $z_0 \in \sigma_p^o(T) \setminus S$ ならば、 $D_r(z_0)^\sim \cap S = \emptyset$ なる $D_r(z_0) \subset \sigma_p^o(T)$ がとれるから、或る non-zero analytic function $f: D_r(z_0) \rightarrow X$ が存在して、 $(z - T)f(z) \equiv 0$ である。

$G = \mathbb{C} \setminus D_{r/2}(z_0)^\sim$ とすると、 $G \supset S$ だから、仮定により、 $\sigma(T|Y) \subset G^\sim$ 且つ $\sigma(T^Y) \subset [\mathbb{C} \setminus G] \cup S$ なる $Y \in \text{Lat}(T)$ が存在する。よって、 $(z - T^Y)\widehat{f(z)} \equiv \widehat{0}$ on $D_r(z_0)$ 。故に、 $\widehat{f(z)} \equiv \widehat{0}$ on $[\mathbb{C} \setminus \sigma(T^Y)] \cap D_r(z_0) \supset (\mathbb{C} \setminus \{[\mathbb{C} \setminus G] \cup S\}) \cap D_r(z_0)$
 $= G \cap [\mathbb{C} \setminus S] \cap D_r(z_0) = G \cap D_r(z_0) = [\mathbb{C} \setminus D_{r/2}(z_0)^\sim] \cap D_r(z_0) \neq \emptyset$ 。

従って、一致の定理により、 $\widehat{f(z)} \equiv \widehat{0}$ on $D_r(z_0)$ 。故に、 $f(z) \in Y$ for any $z \in D_r(z_0)$ である。よって、 $0 \equiv (z - T)f(z) = (z - T|Y)f(z)$ on $D_r(z_0)$ で、 $N = \{z \in D_r(z_0); f(z) = 0\}$ とすれば、 $D_r(z_0) \setminus N \subset \sigma_p(T|Y) \subset \sigma(T|Y) \subset G^\sim = \mathbb{C} \setminus D_{r/2}(z_0)$ である。

$N^o \neq \emptyset$ ならば、一致の定理によって、 $f(z) \equiv 0$ on $D_r(z_0)$ となり $f(z)$ が non-zero analytic function on $D_r(z_0)$ ということに反するから、 $N^o = \emptyset$ 。従って、 $D_r(z_0)^\sim = [D_r(z_0) \setminus N]^\sim \subset G^\sim = \mathbb{C} \setminus D_{r/2}(z_0)$ となり矛盾する。よって、 $\sigma_p^o(T) \subset S$ 。

S は閉集合だから、 $\sigma_p^o(T)^\sim \subset S$ である。

次に、 S を含む任意の閉集合 F に対して、 $X_T(F)$ は閉集合なることを示す。

$G_\alpha \supset F \cap \sigma(T) \supset S$ なる任意の開集合 G_α に対して、仮定より、 $\sigma(T|Y_\alpha) \subset G_\alpha^\sim$ 且つ $\sigma(T^{Y_\alpha}) \subset [\mathbb{C} \setminus G_\alpha] \cup S$ なる $Y_\alpha \in \text{Lat}(T)$

が存在する。性質 2 より、 $X/Y_\alpha = X_{TY_\alpha}(\sigma(T^{Y_\alpha}))$

$\subset X_{TY_\alpha}([\mathbb{C} \setminus G_\alpha] \cup S) \subset X/Y_\alpha$ だから、 $X/Y_\alpha = X_{TY_\alpha}([\mathbb{C} \setminus G_\alpha] \cup S)$ で、

$\sigma(T^{Y_\alpha} | X_{TY_\alpha}([\mathbb{C} \setminus G_\alpha] \cup S)) = \sigma(T^{Y_\alpha}) \subset [\mathbb{C} \setminus G_\alpha] \cup S$ だから、定理 2

により、 $X/Y_\alpha = X_{TY_\alpha}(\mathbb{C} \setminus G_\alpha) \oplus X_{TY_\alpha}(S)$ と分解できて、

$X_{TY_\alpha}(S) \in SM(T^{Y_\alpha})$ である。 $F \cap \sigma(T) \supset S \supset \sigma_p^o(T)^\sim$ だから、

補助定理及び性質 2 を用いて、 $X_{TY_\alpha}(F \cap \sigma(T)) \cap X_{TY_\alpha}(\mathbb{C} \setminus G_\alpha)$

$= X_{TY_\alpha}([F \cap \sigma(T)] \cap [\mathbb{C} \setminus G_\alpha]) = X_{TY_\alpha}(\emptyset) = \{\delta\}$. よって、

$X_{TY_\alpha}(F \cap \sigma(T)) \subset X_{TY_\alpha}(S)$ ($\subset X_{TY_\alpha}(F \cap \sigma(T))$) である。

($\because \hat{x} \in X_{TY_\alpha}(F \cap \sigma(T)) \Rightarrow \hat{x} = \hat{x}_1 + \hat{x}_2$, $\hat{x}_1 \in X_{TY_\alpha}(\mathbb{C} \setminus G_\alpha)$,

$\hat{x}_2 \in X_{TY_\alpha}(S)$ で、 $X_{TY_\alpha}(S) \subset X_{TY_\alpha}(F \cap \sigma(T))$ だから、 $\hat{x}_1 = \hat{x} - \hat{x}_2$

$\in X_{TY_\alpha}(F \cap \sigma(T)) \cap X_{TY_\alpha}(\mathbb{C} \setminus G_\alpha) = \{\delta\}$. よって、 $\hat{x}_1 = \delta$. 故に、

$\hat{x} = \hat{x}_2 \in X_{TY_\alpha}(S)$.) $G_\alpha^\sim \supset \sigma(T/Y_\alpha) \cup S \supset \sigma(T/Y_\alpha) \cup \sigma_p^o(T)^\sim$ だか

ら、性質 2 及び定理 3 によって、 $X_T(F \cap \sigma(T))/Y_\alpha \subset X_{TY_\alpha}(F \cap \sigma(T))$

$= X_{TY_\alpha}(S) \subset X_{TY_\alpha}(G_\alpha^\sim) = X_T(G_\alpha^\sim)/Y_\alpha$. $X_\alpha(S) = \{x \in X; \hat{x} \in X_{TY_\alpha}(S)\}$

とすれば、 $X_\alpha(S)/Y_\alpha = X_{TY_\alpha}(S)$ だから、 $X_\alpha(S)$ も閉集合である。

$G_\alpha^\sim \supset \sigma_p^o(T)^\sim$ だから、補助定理を用いて、 $X_T(F \cap \sigma(T)) \subset \bigcap_\alpha X_\alpha(S)$

$\subset \bigcap_\alpha X_T(G_\alpha^\sim) = X_T(\bigcap_\alpha G_\alpha^\sim) = X_T(F \cap \sigma(T))$ だから、 $X_T(F)$

$= X_T(F \cap \sigma(T)) = \bigcap_\alpha X_\alpha(S)$ は、閉集合である。よって、定

理 1 によって、 $\sigma(T|X_T(F)) \subset F$ である。

最後に、後半を示す。

性質 2 により、 $X_T(G_1) + X_T(G_5) \subset X_T(G_1 \cup G_5)$ なること

は明らかだから逆向きを示せばよい。

$\alpha \in X_T(G_1 \cup G_S)$ とすれば、 $S \subset F \subset G_1 \cup G_S$ なる閉集合 F が存在して $\alpha \in X_T(F)$ である。 $D_1^\sim \subset G_1$, $D_S^\sim \subset G_S$ 且つ、 $F \subset D_1 \cup D_S$ なる開集合 D_1 及び D_S をとり、 $S \subset D \subset D^\sim \subset D_S$ 且つ $D^\sim \cap G_1^\sim = \emptyset$ なる開集合 D をえらんで、 $G = [D_1 \cap D_S] \cup D$ とすれば、 G は S を含む開集合だから、仮定により、 $\sigma(T/Y) \subset G^\sim$ 且つ $\sigma(T^Y) \subset [\mathcal{C} \setminus G] \cup S$ となる $Y \in \text{Lat}(T)$ が存在する。

$[F \setminus D_1] \cap [F \setminus D_S] = \emptyset$, $D_1^\sim \cap D^\sim = \emptyset$, $X_T(D_1^\sim \cup D^\sim) \in \text{SM}(T)$ であり、定理 1 より、 $\sigma(T/X_T(D_1^\sim \cup D^\sim)) \subset D_1^\sim \cup D^\sim$ だから、性質 2 及び定理 2 と 3 によって、 $X_T(F)/Y \subset X_{TY}(F) = X_{TY}(F \cap \sigma(T^Y))$
 $\subset X_{TY}(F \cap \{\mathcal{C} \setminus G\} \cup S) \subset X_{TY}(F \cap \{\mathcal{C} \setminus [D_1 \cap D_S]\})$
 $= X_{TY}([F \setminus D_1] \cup [F \setminus D_S]) = X_{TY}(F \setminus D_1) + X_{TY}(F \setminus D_S)$
 $\subset X_{TY}([F \setminus D_1] \cup G^\sim) + X_{TY}([F \setminus D_S] \cup G^\sim)$
 $= X_T([F \setminus D_1] \cup G^\sim)/Y + X_T([F \setminus D_S] \cup G^\sim)/Y$
 $\subset X_T(G_S)/Y + X_T(D_1^\sim \cup D^\sim)/Y = X_T(G_S)/Y + \{X_T(D_1^\sim) \oplus X_T(D^\sim)\}/Y$
 $\subset \{X_T(G_S) + X_T(G_1)\}/Y$. 故に、 $\alpha \in X_T(F) \subset X_T(G_S) + X_T(G_1)$.
よって、 $X_T(G_1 \cup G_S) \subset X_T(G_S) + X_T(G_1)$.

(6) $\Rightarrow$ (7); $G^\sim$ に (6) を用いればよい。

(7) $\Rightarrow$ (1); n を任意の positive integer とする。

$\bigcup_{j=1}^n G_j \cup G_S \supset \sigma(T)$ 且つ $G_j^\sim \cap S = \emptyset$ ($j = 1, 2, \dots, n$) なる任意の開集合 $G_1, G_2, \dots, G_n$ 及び G_S に対して、 $D_j^\sim \subset G_j$, $D_S^\sim \subset G_S$ 且つ、

$\bigcup_{j=1}^n D_j \cup D_S \supset \sigma(T)$, $D_j^\sim \cap S = \emptyset$ なる閉集合 $D_1, D_2, \dots, D_n$ 及び D_S

をとれば、仮定及び性質 2 によって、 $X = X_T(\sigma(T))$

$$\subset X_T(D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n \cup D_S) = X_T(D_1) + X_T(D_2 \cup \dots \cup D_n \cup D_S)$$

$$= \dots = X_T(D_1) + X_T(D_2) + \dots + X_T(D_n) + X_T(D_S)$$

$$\subset X_T(D_1^\sim) + X_T(D_2^\sim) + \dots + X_T(D_n^\sim) + X_T(D_S^\sim) \subset X. \quad \text{故に、}$$

$X = X_T(D_1^\sim) + X_T(D_2^\sim) + \dots + X_T(D_n^\sim) + X_T(D_S^\sim)$ である。又、系

2 により、 $X_T(D_j^\sim) \in SM(T)$ 且つ $\sigma(T|X_T(D_j^\sim)) \subset D_j^\sim \subset G_j$ であり、

仮定及び定理 1 によって、 $X_T(D_S^\sim) \in SM(T)$ 且つ $\sigma(T|X_T(D_S^\sim))$

$\subset D_S^\sim \subset G_S$ だから、 T は、 S -decomposable である。

系 6. 次の命題は同値である。

- (1) T は、decomposable である。
- (2) T は、2-decomposable である。 ([7]).
- (3) 任意の閉集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対して、 $X_T(F)$ は閉集合であり、
且つ $\sigma(T|X_T(F)) \subset \mathbb{C} \setminus F^\circ$ である。 ([4]).
- (4) 任意の閉集合 $G \subset \mathbb{C}$ に対して、 $X_T(G^\sim)$ は閉集合であり、
且つ $\sigma(T|X_T(G^\sim)) \subset \mathbb{C} \setminus G$ である。 ([5]).
- (5) 任意の閉集合 $G \subset \mathbb{C}$ に対して、 $\sigma(T|Y) \subset G^\sim$ 且つ
 $\sigma(T|Y) \subset \mathbb{C} \setminus G$ なる $Y \in \text{Lat}(T)$ が存在する。 ([5]).
- (6) 任意の閉集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対して、 $X_T(F)$ は閉集合であり、
又、任意の閉集合 $G_1 \subset \mathbb{C}$ 及び $G_2 \subset \mathbb{C}$ に対して、

$$X_T(G_1 \cup G_2) = X_T(G_1) + X_T(G_2) \text{ である。 ([8])。}$$

- (7) 任意の開集合 $G \subset \mathbb{C}$ に対して、 $X_T(G^\sim)$ は閉集合であり、
 又、任意の開集合 $G_1 \subset \mathbb{C}$ 及び $G_2 \subset \mathbb{C}$ に対して、
 $X_T(G_1 \cup G_2) = X_T(G_1) + X_T(G_2)$ である。

証明. 定理 1 及び系 5 により、次の (a) と (b) 及び、

(a') と (b') とが同値であることを注意すればよい。

- (a) 任意の開集合 $G \subset \mathbb{C}$ に対して、 $\sigma(T|_{X_T(G)^\sim}) \subset G^\sim$ である。
 (b) 任意の開集合 $G \subset \mathbb{C}$ に対して、 $X_T(G^\sim)$ は閉集合である。
 (a') 任意の開集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対して、 $\sigma(T|_{X_T(F)^\sim}) \subset F$ である。
 (b') 任意の開集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対して、 $X_T(F)$ は閉集合である。

参考文献

- [1] I. Bacalu, S -decomposable operator in Banach spaces,
 Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 20(1975) 1101-1107.
 [2] ———, Some properties of decomposable operators,
 Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 21(1976) 177-194.
 [3] C. Foias, Spectral maximal spaces and decomposable
 operators in Banach space,
 Arch. Math., 14(1963) 341-349.

- [4] A. A. Jafarian and F.-H. Vasilescu, A characterization
of 2-decomposable operators,
Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 19(1974) 769-771.
- [5] R. Lange, Equivalent conditions for decomposable
operators,
Proc. Amer. Math. Soc., 82(1981) 401-406.
- [6] M. Radjabalipour, On subnormal operators,
Trans. Amer. Math. Soc., 211(1975) 377-389.
- [7] _____, Equivalence of decomposable and
2-decomposable operators,
Pacific Journ. of Math., 77(1978) 243-247.
- [8] K. Tanahashi, A characterization of decomposable
operators,
Tôhoku Math. Journ., 34(1982) 295-300.
- [9] _____, On S -decomposable operators,
(to appear in Tôhoku Math. Journ.).