

ある冪零ヘッセンバーク多様体の同変コホモロジー環について

長岡工業高等専門学校・一般教育科 中山雅友美
General education, National Institute of Technology, Nagaoka College

1. 序

本稿は 2025 年度 RIMS 共同利用による研究集会「変換群論の新しい展開」での講演に基づく内容で、岡山理科大学の阿部拓氏との共同研究である． A 型のピーターソン多様体 $\mathcal{Y}_n$ とは、旗多様体

$$Fl(\mathbb{C}^n) = \{V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = \mathbb{C}^n \mid \dim V_i = i\} \cong GL_n(\mathbb{C})/B$$

(B は上三角行列の成すボレル部分群) の閉部分代数多様体として定められる正則冪零ヘッセンバーク多様体

$$\mathcal{Y}_n = \{V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = \mathbb{C}^n \mid NV_i \subset V_{i+1} \ (1 \leq i \leq n-1)\}$$

である．ここで、 $V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = \mathbb{C}^n$ は $\mathbb{C}^n$ の部分空間の包含列で、 N は正則な冪零変換、すなわち零ベクトルと単位ベクトルを順に並べた行列 $N = (\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_{n-1}) \in M_n(\mathbb{C})$ である． $\mathcal{Y}_n$ についてはポアンカレ多項式やコホモロジー環など、そのトポロジーが調べられている ([3],[4],[5],[6])．本稿では、 $\tilde{N} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_{n-2}) \in M_n(\mathbb{C})$ から定まる (正則でない) 冪零ヘッセンバーク多様体

$$(1.1) \quad \mathcal{W}_n = \{V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = \mathbb{C}^n \mid \tilde{N}V_i \subset V_{i+1}, \dim V_i = i\}$$

のポアンカレ多項式と同変コホモロジー環 $H_{S^1}^*(\mathcal{W}_n, \mathbb{Q})$ について、ピーターソン多様体の研究結果 [2],[3] に倣い考察する．

2. $\mathcal{W}_n$ のセル分割とポアンカレ多項式

セル分割を持つ複素 m 次元の代数多様体 M のポアンカレ多項式 $\text{Poin}(M, s)$ は

$$\text{Poin}(M, s) = \sum_{k=1}^m c_k s^{2k} \quad (c_k \text{ は } M \text{ の複素 } k \text{ 次元セルの個数})$$

で与えられる (例えば [1])．本節ではまず $\mathcal{W}_n$ のセル分割を与え、ポアンカレ多項式を計算する． $k-1$ 個のパラメータ $v_1, \cdots, v_{k-1} \in \mathbb{C}$ からできる $GL_k(\mathbb{C})$ の部分集合を

$$C_k = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_{k-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 \\ \vdots & v_{k-1} & \cdots & 0 & 0 \\ v_{k-1} & 1 & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix} \in GL_k(\mathbb{C}) \mid v_1, \cdots, v_{k-1} \in \mathbb{C} \right\}$$

とおき、大きさ k のブロックと呼ぶことにする． $C_k \cong \mathbb{C}^{k-1}$ で $\dim C_k = k-1$ であることに注意する．よく知られているように、ピーターソン多様体 $\mathcal{Y}_n$ のセル分割は (多少の記法の濫用を許せば)

$$\mathcal{Y}_n = \coprod_{k_1 + \cdots + k_l = n} \begin{bmatrix} C_{k_1} & & & \\ & C_{k_2} & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & C_{k_l} \end{bmatrix}$$

で与えらる. ただし, $[\]$ は $GL_n(\mathbb{C})/B$ における同値類を表すものとする. ポアンカレ多項式 $\text{Poin}(\mathcal{Y}_n, s)$ は,

$$\text{Poin}(\mathcal{Y}_n, s) = (1 + s)^{n-1}$$

である ([1]). 例えば $\mathcal{Y}_3$ のセルは,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ y & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (x, y \in \mathbb{C})$$

であり, $\text{Poin}(\mathcal{Y}_3, s) = s^2 + 2s + 1 = (1 + s)^2$.

$\mathcal{W}_n$ のセル分割は, $Y_k \subset GL_n(\mathbb{C})$ を

$$Y_k = \coprod_{k_1 + \dots + k_l = k} \begin{pmatrix} C_{k_1} & & & \\ & C_{k_2} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & C_{k_l} \end{pmatrix}$$

とおけば,

$$(2.1) \quad \mathcal{W}_n = \coprod_{k+l=n-1} \left[\begin{array}{c|c|c} * & * & * & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & Y_k & & 0 & & & 0 \\ \hline & 0 & & 0 & & & Y_l \end{array} \right]$$

であることがわかる. (2.1) の 1 行目の $* * *$ は, Y_k が 1 つのブロックからなるときは $(x, 0, \dots, 0)$ であり, Y_k のブロックが 2 つ以上のときは, 右から 2 つのブロックの 1 列目にあたる 2 列が任意の $x, y \in \mathbb{C}$ でその他は 0, すなわち $(0, \dots, 0, x, 0, \dots, 0, y, 0, \dots, 0)$ である. 例えば, $\mathcal{W}_3$ のセルは次の通りである.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & 0 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (x, y \in \mathbb{C}).$$

命題 2.1. $\mathcal{W}_n$ のポアンカレ多項式は

$$\text{Poin}(\mathcal{W}_n, s) = (n-2)s^2(1+s)^{n-3} + (1+s)^{n-1}$$

である.

Proof. (2.1) で $k=0$ の部分 $\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & & Y_{n-1} & \end{array} \right]$ におけるセルは $\mathcal{Y}_{n-1}$ のセルと同一視されるため,

$k=0$ のセルを表す多項式は,

$$(2.2) \quad (1+s)^{n-2}.$$

次に、 k が $1 \leq k \leq n-2$ のときの

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} * & * & * & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & Y_k & & 0 & & 0 & \\ \hline & 0 & & 0 & & Y_l & \end{array} \right]$$

について考える. Y_k が 1 つのブロッ

ク C_k からなるときは、 $*$ $*$ $*$ は $\mathbb{C}$ であり、 Y_k が 2 つ以上のブロック C_k からなるときは、 $*$ $*$ $*$ は $\mathbb{C}^2$ なので、このときのセルに対応する多項式は

$$\begin{aligned} & s^2(1+s)^{k-1}(1+s)^l + s^k(1+s)^l - s \cdot s^k(1+s)^l \\ &= s^2(1+s)^{k-1}(1+s)^{n-k-2} + s^k(1-s)(1+s)^{n-k-2} \\ (2.3) \quad &= s^2(1+s)^{n-3} + s^k(1-s)(1+s)^{n-k-2}. \end{aligned}$$

最後に、 $k = n-1$ の部分

$$\left[\begin{array}{ccc|c} * & * & * & 1 \\ \hline & Y_{n-1} & & \end{array} \right]$$

に対応する多項式は、上の議論と同じように Y_{n-1} の

ブロックが 1 つの場合だけ特別に考えれば

$$(2.4) \quad s^2(1+s)^{n-2} + s^{n-1}(1-s)$$

であることがわかる. したがって、 $\text{Poin}(\mathcal{W}_n, s)$ は (2.2), (2.3), (2.4) の総和を取って、

$$\begin{aligned} & \text{Poin}(\mathcal{W}_n, s) \\ &= (1+s)^{n-2} + \sum_{k=1}^{n-2} s^2(1+s)^{n-3} + \sum_{k=1}^{n-2} s^k(1-s)(1+s)^{n-k-2} + s^2(1+s)^{n-2} + s^{n-1}(1-s) \\ &= (n-2)s^2(1+s)^{n-3} + (1+s^2)(1+s)^{n-2} + s(1-s)(1+s)^{n-2} \\ &= (n-2)s^2(1+s)^{n-3} + (1+s)^{n-1}. \end{aligned}$$

□

注 2.2. 上で求めた $\text{Poin}(\mathcal{W}_n, s)$ を展開すれば次のようになる.

$$\begin{aligned} & 1 + s + \left(\binom{n-2}{1} + \binom{n-1}{2} \right) s^2 + \left(2\binom{n-2}{2} + \binom{n-1}{3} \right) s^3 \\ & \quad + \cdots + \left((n-2)\binom{n-2}{n-2} + \binom{n-1}{n-1} \right) s^{n-1}. \end{aligned}$$

ここで、

$$\text{Poin}(\mathcal{W}_n, s) = \sum_{i=0}^m \dim H^{2i}(\mathcal{W}_n; \mathbb{Q}) s^i, \quad (m = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{W}_n)$$

であることから $\dim H^{2i}(\mathcal{W}_n; \mathbb{Q}) = (i-1)\binom{n-2}{i-1} + \binom{n-1}{i}$, つまり、 $H^{2i}(\mathcal{W}_n; \mathbb{Q})$ の基底の個数は $(i-1)\binom{n-2}{i-1} + \binom{n-1}{i}$ であることがわかる.

本稿で議論するコホモロジー環は全て $\mathbb{Q}$ 係数のため、これより先は $H^{2i}(\mathcal{W}_n; \mathbb{Q})$ を単に $H^{2i}(\mathcal{W}_n)$ と表記する.

3. $\mathcal{W}_n$ 上の S^1 作用と固定点集合

複素 n 次元トーラス

$$T^n = \{\text{diag}(z_1, z_2, \dots, z_n) \mid z_i \in \mathbb{C}, |z_i| = 1, \forall i\} \subset U(n)$$

は $Fl(\mathbb{C}^n)$ へ自然に作用し, T^n の部分群

$$S^1 = \{\text{diag}(z^n, z^{n-1}, \dots, z) \mid z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$$

が $\mathcal{Y}_n$ へ作用する [4]. 同様に S^1 が $\mathcal{W}_n$ に作用することも簡単に確かめられる. 固定点集合 $Fl(\mathbb{C}^n)^{T^n}$ は置換行列全体 $\{[e_{w(1)}, e_{w(2)}, \dots, e_{w(n)}] \in GL_n(\mathbb{C})/B \mid w \in \mathfrak{S}_n\}$ で対称群 $\mathfrak{S}_n$ と $1:1$ に対応する. $\mathcal{Y}_n^{S^1} = Fl(\mathbb{C}^n)^{T^n} \cap \mathcal{Y}_n$ および $\mathcal{W}_n^{S^1} = Fl(\mathbb{C}^n)^{T^n} \cap \mathcal{W}_n$ であり, さらに

$$\mathcal{Y}_n^{S^1} \subset \mathcal{W}_n^{S^1} \subset Fl(\mathbb{C}^n)^{T^n}$$

となっていることがわかる. $w = (w(1), w(2), \dots, w(n)) \in \mathfrak{S}_n$ に対して $[e_{w(1)}, e_{w(2)}, \dots, e_{w(n)}]$ が $\mathcal{Y}_n^{S^1}$ の点であるための必要十分条件は

$$w = (k_1, k_1 - 1, k_1 - 2, \dots, 1, k_2, k_2 - 1, k_2 - 2, \dots, k_1 + 1, \dots, k_m, k_m - 1, \dots, k_{m-1} + 1)$$

なる $k_1 < k_2 < \dots < k_m$ が存在することである ([3]). $k = 1, \dots, n$ とする. 2 つの射影 $\pi_k : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{k-1}$, $\pi_{-k} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n-k}$ を

$$\pi_k \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}, \quad \pi_{-k} \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

とする. ただし, π_1, π_{-n} は定義しないものとする. $\mathcal{W}_n$ のセル分割 (2.1) から, $\mathcal{W}_n$ の固定点が次で与えられることが簡単にわかる.

補題 3.1. $(e_{w(1)}, e_{w(2)}, \dots, e_{w(n)}) \in \mathfrak{S}$ が $\mathcal{W}_n$ の S^1 固定点であるための必要十分条件は, $e_{w(k)} = e_1$ で

$$[\pi_k(e_{w(1)}), \pi_k(e_{w(2)}), \dots, \pi_k(e_{w(k-1)})] \in \mathcal{Y}_{k-1}^{S^1},$$

かつ

$$[\pi_{-k}(e_{w(k+1)}), \pi_{-k}(e_{w(k+3)}), \dots, \pi_{-k}(e_{w(n)})] \in \mathcal{Y}_{n-k}^{S^1}$$

となる k が存在することである.

例えば $\mathcal{W}_3$ の S^1 固定点は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. $\mathcal{W}_n$ の同変コホモロジー環

本節では, 添字を省略して $\mathcal{Y}_n, \mathcal{W}_n$ をそれぞれ $\mathcal{Y}, \mathcal{W}$ で表す. ピーターソン多様体 $\mathcal{Y}$ の場合 [3] と同じように, $\mathcal{W} \subset Fl(\mathbb{C}^n)$, $\mathcal{W}^{S^1} \subset Fl(\mathbb{C}^n)^{T^n} \cong \mathfrak{S}$, $S^1 \subset T^n$ であることから引き起こされる可換図式;

$$\begin{array}{ccc}
H_{T^n}^*(Fl(\mathbb{C}^n)) & \xrightarrow{\iota_1} & \bigoplus_{w \in \mathfrak{S}} H_{T^n}^*(y) \\
\downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\
H_{S^1}^*(\mathcal{Y}) & \xrightarrow{\iota_2} & \bigoplus_{w \in \mathcal{Y}^{S^1}} H_{S^1}^*(y)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
H_{T^n}^*(Fl(\mathbb{C}^n)) & \xrightarrow{\iota_1} & \bigoplus_{w \in \mathfrak{S}} H_{T^n}^*(w) \\
\downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\
H_{S^1}^*(\mathcal{W}) & \xrightarrow{\iota_2} & \bigoplus_{w \in \mathcal{W}^{S^1}} H_{S^1}^*(w)
\end{array}$$

を考える. [3] と同様に表記すると

$$H_{S^1}^*(w) \cong \mathbb{C}[t], \quad H_{T^n}^*(w) \cong \mathbb{C}[t_1, t_2, \dots, t_n],$$

であり,

$$H_{T^n}^*(Fl(\mathbb{C}^n)) \cong \mathbb{C}[\tau_1, \dots, \tau_n, t_1, \dots, t_n]/I$$

である. 各写像は $\iota_1(\tau_i) = t_{w(i)}$, $\iota_1(t_i) = t_i$, $\pi_2(t_i) = (n+1-i)t$ である. なお ι_1, ι_2 は単射, π_2 は全射である. π_1 は $\mathcal{Y}$ の場合には全射であることが示されているが, $\mathcal{W}$ の場合は (期待はされるが) 全射かどうかわかっていない.

[3] では次が示された.

定理 4.1. ([3]) $p_j \in H_{S^1}^*(\mathcal{Y})$ を

$$p_j = \pi_1\left(\sum_{i=1}^j (t_i - \tau_i)\right) \quad (j = 1, 2, \dots, n-1)$$

とし, さらに $\alpha_j = -p_{j-1} + 2p_j - p_{j+1} - t$ とする. このとき,

$$p_j \cdot \alpha_j = 0$$

が成り立ち, $H_{S^1}^*(\mathcal{Y}) \cong \mathbb{C}[t, p_1, \dots, p_{n-1}]/J$ (J は $p_j \alpha_j$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$) により生成されるイデアル) が成り立つ.

次が現時点での結果である.

命題 4.2. $p_j, \alpha_j \in H_{S^1}^*(\mathcal{W})$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$) を形式的に上と同じ式で定めた $H_{S^1}^2(\mathcal{W})$ の元とすると,

$$(i) \sum_{i=1}^{n-1} p_i \alpha_i, \quad (ii) \left(\sum_{i=1}^j p_i \alpha_i + p_j p_{j+1}\right) \alpha_j, \quad (iii) p_j (p_j - jt) \alpha_j, \quad (iv) (p_j - jt) \alpha_j \cdot p_l \alpha_l$$

($j < l \leq n-1$) はいずれも 0 である.

Proof. ι_2 は単射であるため ι_2 による (i) から (iv) の像がそれぞれ 0 であることを示せばよい. $Y_k^{S^1}$ を, パラメーターが全て 0 である Y_k の行列からなる部分集合とする. このとき

$$(4.1) \quad w = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & \cdots & 0 \\ \hline w_{k_1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & w_{k_2} \end{array} \right] \in \mathcal{W}^{S^1} \quad (w_{k_1} \in Y_{k_1}^{S^1}, w_{k_2} \in Y_{k_2}^{S^1})$$

とすれば,

$$\iota_2(p_j) = \sum_{i=1}^j (w(i) - i)t, \quad \iota_2(\alpha_j) = (w(j+1) - w(j) - 1)t$$

であり ([3]), w は第 $k_1 + 1$ 列目が単位ベクトル e_1 となっているため, $j > k_1$ のときは $\iota_2(p_j \alpha_j) = 0$

であることがわかる. $j \leq k_1$ のときを考える. $w_{k_1} = \begin{pmatrix} C_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_a \end{pmatrix}$ とする. 各ブロック C_i の右端にあたる w の列を第 b_i 列とおけば,

$$\begin{cases} \iota_2(p_j - jt) = 0 & (j = b_1, \dots, b_a) \\ \iota_2(\alpha_j) = 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

であるため, これらの積をとれば

$$\iota_2((p_j - jt)\alpha_j) = 0$$

が成り立つ. したがって, 任意の j で (iii), (iv) が成り立つ. また,

$$\iota_2(\alpha_{b_i}) = (b_{i-1} - b_{i+1})t$$

であるため,

$$\begin{aligned} \iota_2\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i p_i\right) &= \iota_2\left(\sum_{i=1}^a \alpha_{b_i} p_{b_i}\right) \\ &= (-b_1 b_2 + (b_1 - b_3)b_2 + (b_2 - b_4)b_3 + \dots + (b_{a-2} - b_a)b_{a-1} + b_{a-1}b_a)t^2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

すなわち (i) が成り立つことがわかる. ここからは, (ii) について考える. $j > k_1 (= b_a)$ のときはすぐ上の式から,

$$\sum_{i=1}^j p_i \alpha_i = \sum_{i=1}^a \alpha_{b_i} p_{b_i} = 0$$

でかつ, $p_j \alpha_j = 0$ であるため

$$p_j p_{j+1} \alpha_j = 0$$

となり (ii) が成り立つ. $j \leq k_1$ のときは, $\alpha_j = 0$ のときは明らかに成り立つため, $\alpha_j \neq 0$, すなわち, $j = b_d (d = 1, 2, \dots, a-1)$ のときのみ考えればよい.

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^j p_i \alpha_i + p_j p_{j+1}\right) \alpha_j &= \sum_{i=1}^d \alpha_{b_i} p_{b_i} + p_{b_d} p_{b_{d+1}} \alpha_{b_d} \\ &= (-b_{d+1} b_d t^2 + b_d b_{d+1} t^2) \alpha_{b_d} \\ &= 0 \end{aligned}$$

以上より全ての j で (ii) が成立する.

□

予想 4.3. J_W を命題 4.2 の多項式 (i), (ii), (iii), (iv) で生成されるイデアルとすれば,

$$H_{S^1}^*(W) \cong \mathbb{C}[t, p_1, \dots, p_{n-1}] / J_W$$

が成り立つ.

$\mathbb{C}[t] \otimes H^*(\mathcal{W}) \cong H_{S^1}^*(\mathcal{W})$ なので $H_{S^1}^*(\mathcal{W})$ は自由 $\mathbb{C}[t]$ -加群であり, $H_{S^1}^*(\mathcal{W})$ の $\mathbb{C}[t]$ -加群としての基底の数は $H^*(\mathcal{W})$ の基底の数と一致する. そのため, 注意 2.2 より $H_{S^1}^*(\mathcal{W})$ の基底の数は $\mathcal{W}$ のセルの個数 $c_i = (i-1)\binom{n-2}{i-1} + \binom{n-1}{i}$ の総和であることがわかる. さらに同変コホモロジーの理論から, 予想する剰余環 $\mathbb{C}[t, p_1, \dots, p_{n-1}]/J_{\mathcal{W}}$ の $\mathbb{C}[t]$ -加群としての斉次な生成元で, 「各次数 i の生成元がちょうど c_i 個あるようなもの」が存在すれば, $H_{S^1}^*(\mathcal{W}) \cong \mathbb{C}[t, p_1, \dots, p_{n-1}]/J_{\mathcal{W}}$ が成立することがわかる. $\mathbb{C}[t, p_1, \dots, p_{n-1}]/J_{\mathcal{W}}$ のヒルベルトシリーズの計算により $n \leq 8$ においては $\mathbb{C}[t, p_1, \dots, p_{n-1}]/J_{\mathcal{W}} \cong H_{S^1}^*(\mathcal{W})$ が確かめられた.

REFERENCES

- [1] H. Abe, T. Horiguchi, *A survey of recent developments on Hessenberg varieties.*, (2019).
- [2] H. Abe, M. Harada, T. Horiguchi, and M. Masuda, *The equivariant cohomology rings of regular nilpotent Hessenberg varieties in Lie type A*. Research Announcement, Morfismos 18(2014), No. 2, pp.51-65
- [3] Y. Fukukawa, M. Harada and M. Masuda, *The equivariant cohomology rings of Peterson varieties.*. Math. Soc. Japan. 67(3):1147-1159,(2015).
- [4] M. Harada, J. Tymoczko, *A Positive Monk Formula in the S^1 -Equivariant Cohomology of Type A Peterson Varieties*. Mathematics and Statistics: Faculty Publications, Smith College, Northampton, MA. (2011).
- [5] E. Insko and A. Yong, *Patch ideals and Peterson varieties*. Transform Groups 17 (2012), no. 4, 1011 – 1036.
- [6] B. Kostant, *Flag manifold quantum cohomology, the Toda lattice, and the representation with highest weight ρ* . Selecta Math. (N.S.) 2 (1996), 43 – 91.

General education

National Institute of Technology, Nagaoka College

e-mail address : m_nakayama[at]nagaoka-ct.ac.jp