

アクティブ流動カーペットと長距離結合振動子系の同期現象

東北大学 大学院理学研究科 物理学専攻 内田就也¹

多数の振動子が相互作用によって集団的に同期する現象は、非線形・非平衡ダイナミクスの代表的な問題の1つとして研究されてきた。理論的には蔵本モデルを嚆矢とする平均場理論が大きな成功を収めてきたが、現実の系で重要となる相互作用の距離依存性の影響、特に空間ゆらぎの効果については未だ十分に解明されているとは言えない。本講演では、相互作用が距離のべき乗に比例して減衰する長距離結合振動子系の同期現象について論じる。前半ではその一例として、鞭毛や繊毛など水中微生物の推進機構が示す集団ダイナミクスを取り上げる。鞭毛や繊毛の運動を単純化した回転子モデルを用いて、流体力学相互作用が、同期・非同期転移を含め多様な動的パターンを誘起しうることを示す。後半では一般の長距離相互作用 $G(r) \sim 1/r^\alpha$ を持つ格子系について、空間ゆらぎの効果を摂動論的に扱う試みを紹介する。格子次元 $d > \alpha$ の場合は平均場近似が厳密に成立する一方、 $d < \alpha < \frac{3}{2}d$ の場合はシャープな同期・非同期転移は起こらず、滑らかなクロスオーバーとなる。

1 アクティブ流動カーペットの集団ダイナミクス

水中を泳ぐ単細胞生物は細胞表面に生える鞭毛や繊毛の協動的なダイナミクスを利用して効率的に推進するものが多い [1]。例えば大腸菌は数本の螺旋状鞭毛が束になって同期的に回転することで、一方向に水流を作り出して推進する。ゾウリムシは数千本の繊毛の集団的な波打ち（メタクロナル波）によって表面に沿った流れを作り出す。最近では工学的応用として、多数の鞭毛バクテリアを基盤に貼り付けたバクテリアカーペットも提案されている [2]。細胞本体はエラストマー基盤に固定されている一方、鞭毛は水中で自由に向きを変えることができ、自発的に整列して巨視的なスケールの表面流を作り出す。これは滑りなし境界条件の制約を破って狭い流路内での輸送や混合を促進する新種のマイクロ流動デバイスとなりえる。これらのアクティブな流動素子の集団的な同期現象は流体力学相互作用によって誘起されると考えられるが、その機構の解明は G. I. Taylor による先駆的な研究 [3] 以来大きく進んでいるとは言えない。例えば鞭毛や繊毛のミニマルモデルとして考える剛体螺旋や、円軌道上を回転する剛体球は、一定トルク下では同期しないことが示されている [4]。このことから鞭毛や繊毛の屈曲性が同期現象を導くのに本質的であるという見方もある [5]。我々は剛体球に最小限のアクティブな要素を付与した回転子モデルを提案し、基盤上に配列した回転子が示す集団ダイナミクスを解析した [6, 7]。

¹E-mail: uchida@cmpt.phys.tohoku.ac.jp

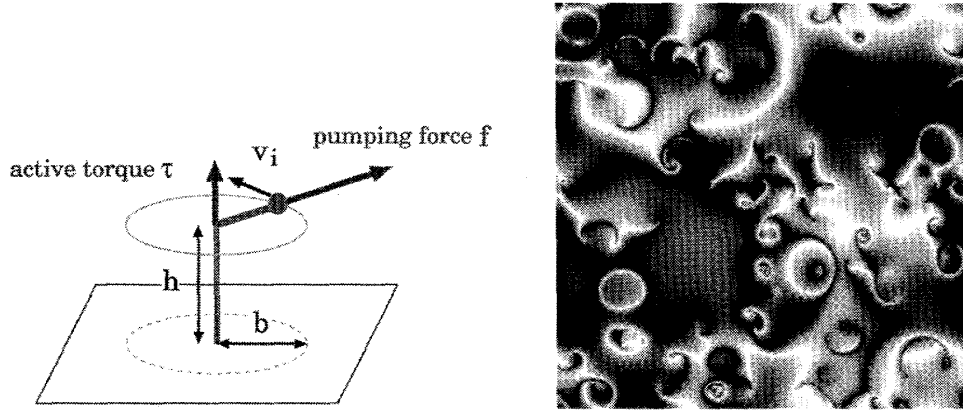


図 1: (左) 回転子モデル. 剛体球はトルク τ で駆動され, ポンピング力 f を周囲の流体に及ぼす. (右) 乱れた螺旋波パターン ($\delta = 45^\circ$, 格子サイズ 256×256). グレースケールは $\cos \phi(\mathbf{r})$.

我々の回転子モデルは平面基盤から生える細い L 字型アーム (高さ h , アーム長 b) と, その先端に固定された半径 a の剛体球からなる (図 1(左)). アームは基盤から一定のトルク τ を受けて回転する. 剛体球は動径方向に一定のポンピング力 f を周囲の流体に対して及ぼす一方, 流体との速度差に比例した粘性抵抗 (抵抗係数 $6\pi\eta a$) を受けるとする. このような回転子が基盤 (xy 平面) 上に間隔 d で並んだ正方格子を考える. 回転子間の相互作用は, 滑りなし境界条件下での Stokes 方程式の基本解である Blake テンソルにより記述される. 回転子の配列が疎な場合 ($d \gg b, h$) を考え, i 番目の回転子の位置を $\mathbf{r}_i$ とする. 回転子の位相 ϕ_i の発展方程式は, 動径ベクトル $\mathbf{n}_i = (\cos \phi_i, \sin \phi_i)$ および接線ベクトル $\mathbf{t}_i = (-\sin \phi_i, \cos \phi_i)$ を用いて次の形に書ける [6].

$$\frac{1}{\omega} \frac{d\phi_i}{dt} = \sin \delta + \gamma \sum_{j \neq i} \mathbf{t}_i \cdot \frac{\mathbf{r}_{ij} \mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^5} \cdot [\cos \delta \mathbf{n}_j + \sin \delta \mathbf{t}_j], \quad \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \quad (1)$$

ここで $\omega = f/(6\pi\eta a)$ は特性振動数, $\gamma = 9ah^2/d^3 (\ll 1)$ は無次元結合定数, $\delta = \tan^{-1}(\tau/bf)$ はトルクとポンピング力の合力がアームに対してなす角度である. 回転子の固有振動数は $\omega_0 = \omega \sin \delta$ である. 相互作用が弱い ($\gamma \ll \omega_0$) 場合, 上の運動方程式は遅い変数 $\Phi_i = \phi_i - \omega_0 t$ を用いて

$$\frac{d\Phi_i}{dt} = -\frac{\gamma\omega}{2} \sum_{j \neq i} \frac{1}{r_{ij}^3} \sin(\Phi_i - \Phi_j - \delta). \quad (2)$$

と近似できる. これは位相遅れ δ と長距離相互作用 $\propto 1/r^3$ を持つ結合振動子系を表す.

我々は角度 δ を変えて式 (1) を数値的に解いた. $\delta = 0^\circ$ (ポンピング駆動) の場合, 回転子は整列して長距離方向秩序を形成する. これはバクテリアカーペットの理想化されたモデルとみなすことができる. $\delta = 90^\circ$ (トルク駆動) の場合, 系はフラストレートした無秩序状態に陥る. また $40^\circ < \delta < 90^\circ$ の場合, 動的定常状態において乱れた螺旋波パターン (図 1(右)) が得られた. 螺旋波のコアにはトポロジカル欠陥 (位相の特異点) が存在する. これと類似した螺旋波は短距離結合振動子系でも知られているが, 今回得たパターンは位相の乱れた領域が局在しておらず, 螺旋波が生成消滅を繰り返すという点で従来のパターンと異なる.

また我々はバクテリアカーペットが示す短距離方向秩序を再現するため、ポンピング力の角度 δ_i が個体に依存して動径方向からランダムにずれている場合を考えた [7]. これは鞭毛の折れ曲がりや細胞形状の非対称性を反映する. δ_i の分布幅 δ_0 を大きくすると、定常状態における秩序変数 $\rho = |\langle \mathbf{n}_i \rangle|$ の値は緩やかに減少した. これは平均場理論が予想するシャープな同期・非同期転移とは対照的であり、長距離結合系であっても空間ゆらぎの効果が無視できないことを示唆する.

2 長距離結合振動子系の多体理論

長距離相互作用を持つ位相振動子系における空間ゆらぎの効果を解析するため、 d 次元立方格子上に並んだ $N (\gg 1)$ 個の振動子からなる次のモデルを考える：

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i - \sum_{j \neq i} G(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \sin(\phi_i - \phi_j), \quad G(\mathbf{r}) = \frac{G_0}{r^\alpha} \quad (\alpha \geq 0) \quad (3)$$

ここで ω_i は i 番目の振動子の固有振動数であり、平均 0、標準偏差 ω_0 の Gauss 分布に従うとする. また規格化条件 $\sum_{j \neq i} G(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = 1$ を課すことで、結合定数 G_0 は格子次元 d と相互作用の指数 α 、および N の関数となる. $\alpha = 0$ の場合、式 (3) は蔵本モデルに帰着する. この場合 $G_0 = 1/N$ であり、ランダムネス ω_0 を大きくしていくと位相同期の度合を表す秩序変数 $\rho = |\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{i\phi_i}|$ は臨界点 $\omega_0 = \omega_c = \sqrt{\pi/8}$ で 0 となる (同期・非同期転移) [8]. また最近、 $\alpha > \frac{3}{2}d$ の場合はマクロな位相同期は起こらないことが強結合極限 ($\omega_0 \ll 1$) での線形解析によって示された [9]. しかし $0 < \alpha < \frac{3}{2}d$ での同期・非同期転移についてはほとんど何も知られていない. これを平均場からの摂動展開によって解析する [10].

まず局所的な秩序変数 ψ_i およびその振幅 ρ_i 、位相 θ_i を $\psi_i = \rho_i e^{i\theta_i} = \sum_{j \neq i} G(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) e^{i\phi_j}$ によって定義すると、式 (3) は $\dot{\phi}_i = \omega_i - \rho_i \sin(\phi_i - \theta_i)$ の形に書ける. 蔵本モデルの解析にならって $|\omega_i| < \rho_i$ の場合と $|\omega_i| > \rho_i$ の場合に分けることにより、時間平均 $E(\rho_i, \omega_i) = \langle e^{i(\phi_i - \theta_i)} \rangle_t$ を明示的に計算することができる. 秩序変数の時間ゆらぎを無視すると $\psi_i = \sum_{j \neq i} G_{ij} e^{i\theta_j} E(\rho_j, \omega_j)$ と書ける (以下 $G_{ij} = G(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ とする). 計算の便宜上これをベクトル形式 $\psi_i = (\text{Re}\psi_i, \text{Im}\psi_i)$ を用いて $\psi_i = \sum_{j \neq i} G_{ij} \mathbf{F}(\psi_j, \omega_j)$ と書く. 右辺の関数 $\mathbf{F}$ は $E(\rho_i, \omega_i)$ から直ちに導かれる. この式を空間平均 $\bar{\psi} = \sum_{i=1}^N \psi_i$ のまわりのゆらぎ $\delta\psi_i = \psi_i - \bar{\psi}$ について Taylor 展開する：

$$\psi_{ia} = G_{ij} \left[F_{ja} + F_{ja,b} \delta\psi_{jb} + \frac{F_{ja,bc}}{2} \delta\psi_{jb} \delta\psi_{jc} + \dots \right], \quad a, b, c = R, I \quad (4)$$

ここで $F_{ja} = F_j(\bar{\psi}, \omega_j)$, $F_{ja,b} = \partial F_{ja} / \partial \bar{\psi}_b$, $F_{ja,bc} = \partial^2 F_{ja} / \partial \bar{\psi}_b \partial \bar{\psi}_c$ である. 若干の恒等的な式変形の後、これは図 2(左) のようにダイアグラムを用いて表すことができる. 図 2 の式を右辺の $\delta\psi$ に代入して再帰的に展開した後、固有振動数 ω_i についてのアンサンブル平均を取ることで $\bar{\psi}$ についての自己無撞着方程式を得る. これは ω_i の分布の独立性によりループグラフのみで表せ、平均場近似は 0 ループ近似に対応することが分かる. ループグラフは結合関数 $G(r)$ のモーメントで表すことができる. 例えば 2 体モーメントは $\sigma_n = \sum_{i \neq j} G_{ij}^n$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) である. ここで $\alpha \leq d$ のときは、前述した G_0 の規格化により $N \rightarrow \infty$ で $G_0 \rightarrow 0$, $\sigma_n \rightarrow 0$ となるため、ループ

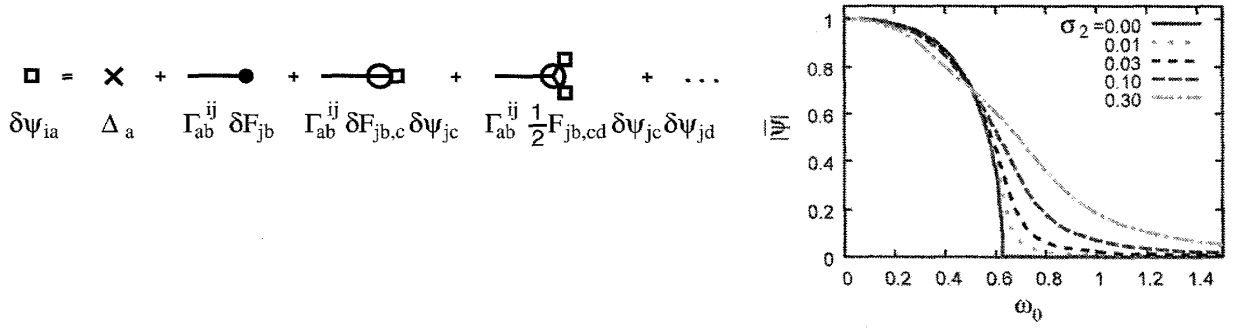


図 2: (左) 空間ゆらぎ項のダイアグラム表示. $f_a(\bar{\psi}) = \langle F_{ja} \rangle_{\omega_j}$ として $\delta F_{ja} = F_{ja} - f_a$, $\Delta_a = (I - \partial f / \partial \bar{\psi})_{ab}^{-1} (f_b - \bar{\psi}_b)$, $\Gamma_{ab}^{ij} = G_{ij} \delta_{ab} + G_{ij}^2 f_{a,b} + \dots$, (右) マクロ秩序変数の振幅プロファイル.

グラフは無視できて平均場近似が正しいことが分かる. 一方 $\alpha > d$ のときは, $\epsilon = (\alpha - d)/d$ を微小パラメータとして $G_0 = O(\epsilon)$, $\sigma_n = O(\epsilon^n)$ となる. 1 ループ近似では空間ゆらぎの効果は σ_2 のみで表せる. 自己無撞着方程式を解き, マクロ秩序変数 $\bar{\psi}$ の振幅をランダムネス ω_0 の関数としてプロットしたものが図 2(右) である. $\sigma_2 > 0$ すなわち $\alpha > d$ の場合, 同期・非同期転移は滑らかなクロスオーバーとなる. これは直観的には, 多数の局所的な同期・非同期転移の重ね合わせと考えられる. すなわち固有振動数がより均一な領域では同期が起きやすく, ばらけた領域では同期が起きにくい. 相互作用の長距離性が弱い (α が大きい) ほど空間不均一性の効果が強く現れ, 転移は緩やかになると考えられる.

謝辞

本講演の前半の内容は Ramin Golestanian 氏 (Oxford 大学) との共同研究によるものである. また後半の内容についても有益な議論をして頂いたことを記し, 同氏に感謝する.

参考文献

- [1] D. Bray, *Cell Movements: From Molecules To Motility*, 2nd Ed., Garland (New York, 2000).
- [2] N. Darnton, L. Turner, K. Breuer, and H. Berg, *Biophys. J.* **86**, 1863 (2004).
- [3] G. I. Taylor, *Proc. R. Soc. A* **209**, 447 (1951); for a review, see: R. Golestanian, J. M. Yeomans, and N. Uchida, *Soft Matter*, doi:10.1039/C0SM01121E (in press).
- [4] M. Kim and T.R. Powers, *Phys. Rev. E* **69**, 061910 (2004); A. Ryskin and P. Lenz, *Phys. Biol.* **3**, 285 (2006).
- [5] M. Reichert and H. Stark, *Eur. Phys. J. E* **17**, 493 (2005); T. Niedermayer, B. Eckhardt, and P. Lenz, *Chaos* **18**, 037128 (2008).
- [6] N. Uchida and R. Golestanian, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 178103 (2010);
- [7] N. Uchida and R. Golestanian, *Europhys. Lett.* **89**, 50011 (2010).
- [8] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*, (Springer, New York, 1984).
- [9] D. Chowdhury and M. C. Cross, *Phys. Rev. E* **82**, 016205 (2010).
- [10] N. Uchida, arXiv:1066.5766.