

g -metrizable space について

群馬大・教養 小竹 義朗 (Yoshiro Kotake)

A. V. Arhangel'skiĭ は [A] で symmetric space の研究に関連して weak base の概念を導入した。そこで, symmetric space とは 空間 (X, d) が 次の (i) ~ (iii) を満たすこととする。

$$(i) \quad d(x, y) \geq 0, \text{ 等号が成立} \Leftrightarrow x = y.$$

$$(ii) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(iii) \quad X \supset A : \text{closed in } X \Leftrightarrow \forall x \notin A \text{ に対し} \\ d(x, A) > 0$$

Symmetric space (X, d) において,

$$U(n, x) = \{y \mid d(x, y) < \frac{1}{n}\}$$

$$Bx = \{U(n, x) \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{とおく。}$$

$$X \supset G : \text{open in } X \Leftrightarrow \forall x \in G \text{ に対し}$$

$$\exists U(n, x) \in Bx, \text{ st. } U(n, x) \subset G$$

となることがわかる。symmetric space においては, $U(n, x)$ は必ずしも x の nbd. とはならない。そこで Arhangel'skiĭ

は次の weak base の概念を導入した。

定義 1. $\mathcal{B}_x$ を space X の部分集合の collection であって、次の条件を満たすものとする。

$$(i) \quad \forall B \in \mathcal{B}_x \rightarrow x \in B.$$

$$(ii) \quad \forall B, B' \in \mathcal{B}_x \rightarrow B \cap B' \in \mathcal{B}_x.$$

$$(iii) \quad X \supset U: \text{open} \iff \forall x \in U \text{ に対し, } B \subset U \\ \text{となる } B \in \mathcal{B}_x \text{ が存在する。}$$

このとき, $\mathcal{B}_x$ を weak neighborhood of x ,

$\mathcal{B} = \bigcup \{ \mathcal{B}_x \mid x \in X \}$ を X の weak base とする。

特に, $|\mathcal{B}_x| \leq \aleph_0$ for $\forall x \in X$ とできるとき, X は weakly first countable (又は $\mathfrak{f}$ -axiom of countability を満たす) であるという。従って symmetric space は weakly first-countable であることがわかる。

F. Sinić は [5] で次の $\mathfrak{f}$ -metrizable space の概念を導入し, $\mathfrak{f}$ -metrizable space と cs -network をもつ空間との関係について述べている。

定義 2 σ -locally finite weak base をもつ regular space を $\mathfrak{f}$ -metrizable space とする。

g -metrizable space が興味をもたれるのは、次の定理により示している事実から他の generalized metric spaces の特徴付け等に有効と考えられるからである。

定義 3 $\mathcal{N}$: collection of subsets of X ,

$\mathcal{N}$: k -network $\iff \forall K$: compact subset of X

K の nbd. $\mathcal{U}$ に対し, $K \subset \bigcup \mathcal{N}' \subset \bigcup \mathcal{U}$ となる $\mathcal{N}$ の finite subcollection $\mathcal{N}'$ が存在する。

定理 1 (L. Foged. [F,]) regular space X について、

次は同値。

- (i) X : g -metrizable
- (ii) X : weakly first countable $\iff \sigma$ -locally finite k -network $\exists$ も。

定理 2 (P. O'Meara [O]) regular space X について

次は同値

- (i) X : metrizable
- (ii) X : first countable $\iff \sigma$ -locally finite k -network $\exists$ も。

定理3 (L. Foged [F₃]) regular space X について
次は同値.

- (i) X : Lashnev space.
- (ii) X : Fréchet space かつ σ -hereditarily closure preserving k -network をもつ.

これらの定理から自然に次の問題が考えられる.

問題1. σ -closure preserving (又は σ -hereditarily closure preserving) weak base をもつ空間を特徴付けよ.

問題2. (L. Foged [F₃]) normal g -metrizable space は M_1 -space か?

R. W. Heath, R. E. Hodel 等により $g: N \times X \rightarrow \tau$ なる写像を用いて generalized metric space を特徴付ける手法が研究された。同様の考えを用いて, $g: N \times X \rightarrow \{A \mid A \subset X\}$ なる写像で, $Bx = \{g(n, x) \mid n \in N\}$ が X の weak abd. となるものを用いて, generalized metric spaces を研究する
ことが K. B. Lee [L], H. W. Martin [M], Y. Inni

and Y. Kotake [I] 等により行われてゐる。

定義3 (K. Lee [L]) X : g -developable $\iff$ 次の (i) ~ (iii) を満たす $g: N \times X \rightarrow$ Power set of X が存在する。

(i) $x \in g(n, x)$, $g(n+1, x) \subset g(n, x)$ for $\forall x \in X$, $\forall n \in N$

(ii) $B_x = \{g(n, x) \mid n \in N\}$: weak nbd base of x

(iii) $x, x_n \in g(n, y_n)$ for $\forall n$

$\rightarrow \{x_n\}$: converges to x .

この g -developable space については, g -metrizable space であつて, not g -developable space なる空間の存在が知られてゐる。([F₁]) また次の問題が Lee [L] により提起されてゐる。

問題3 g -developable space は semi-stratifiable か?

REFERENCES

- [A] A.V. Arhangel'skii, Mappings and spaces, Russian Math. Surveys, 21 (1966), 115-162.
 [F₁] L. Foged, On g -metrizability, Pacific J. Math, 98 (1982), 327-332.

- [F₂] L.Foged, Characterizations of $\aleph$ -spaces, Pacific J. Math., 110 (1984), 59-63.
- [F₃] _____, A characterizations of closed images of metric spaces, to appear.
- [F₄] _____, Normality in k -and- $\aleph$ spaces, to appear.
- [F₅] _____, Weak bases for topological spaces, Washington University Dissertation (1979).
- [I] Y.Inui and Y. Kotake, Metrization theorems for some generalized metric spaces, Q. and A. in Gen. Top. 2 (1984), 147-155.
- [J] N.N.Jakovlev, On g -metrizable spaces, Soviet Math. Dokl. 17 (1976), 156-159.
- [L] K.B.Lee, On certain g -first countable spaces, Pacific J. Math., 65 (1976), 113-118.
- [M] H.W.Martin, A note on the metrization of $\aleph$ -spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 57 (1976), 332-336.
- [O] P.OMeara, A metrization theorem, Math. Nachr., 45 (1970), 69-72.
- [S] F.Siwiec, On defining a space by a weak base, Pacific J. Math., 52 (1974), 233-245.