

Wirtinger 型不等式に関する一考察

山形大・工 高橋眞映 (Sin-Ei Takahasi)

山形大・工 三浦 毅 (Takeshi Miura)

楕円型微分方程式に関連する Wirtinger 型不等式、微分幾何に関連があると言われる Beesack の不等式を統一的に論ずることが我々の目的である。この発想は我々が最初という訳ではなく、調べてみると、近年 Florkiewicz と Wojteczek (Demonstratio Math., 32(1999), 495-502) によっても、これらの不等式の統一的な議論がなされている。しかしながら、我々の方法は彼らとは、全く異なったものである。

はじめにこの二つの不等式を掲げよう：

Wirtinger's inequality :

$$\int_0^1 f(t)^2 dt \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 f'(t)^2 dt \text{ if } f(0) = f(1) = 0,$$

$$\int_0^1 f(t)^2 dt \leq \frac{4}{\pi^2} \int_0^1 f'(t)^2 dt \text{ if } f(0) = 0$$

Beesack's inequality :

$$\int_0^1 f(t)^2 t^4 dt \leq \frac{4}{25} \int_0^1 f'(t)^2 t^6 dt \text{ if } f(0) = f(1) = 0$$

注：Beesack の不等式が微分幾何に関連があるというのは [不等式への招待：大関信雄・大関清太、近代科学社、p. 145] を参照せよ。

先ず H を実 Hilbert 空間とし、関数 φ, ψ を以下の性質をもつものとする。

(1) $\varphi \in C^1((0, 1], R)$ such that $\lim_{t \downarrow 0} t\varphi(t)$ and $\lim_{t \downarrow 0} t^2\varphi'(t)$ exist.

(2) $\psi \in C^1([0, 1], R)$.

このとき次の定理が成り立つ。

定理. 関数 $x, y \in C^1([0, 1], H)$ は $x(0) = y(0) = 0$ and $\varphi(1)\psi(1) < x(1), y(1) > = 0$ を満たすとする。このとき次式が成り立つ。

$$\left| \int_0^1 (\varphi\psi)'(t) \langle x(t), y(t) \rangle dt \right| \leq \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \varphi^2(t) (\|x(t)\|^2 + \|y(t)\|^2) dt + \int_0^1 \psi^2(t) (\|x'(t)\|^2 + \|y'(t)\|^2) dt \right]$$

ただし、上式の等号が成立する必要十分条件は $(0, 1]$ 上で $\varphi x + \psi y' = \psi x' + \varphi y = 0$ または $-\varphi x + \psi y' = \psi x' - \varphi y = 0$ のどちらかが成り立つことである。

略証。Put

$$q(t) = \left| \varphi(t)x(t) + \psi(t)y'(t) \right|^2 + \left| \psi(t)x'(t) + \varphi(t)y(t) \right|^2 \quad (0 < t \leq 1).$$

Then we see from (1) and (2) that the integrals $\int_0^1 q(t)dt$ and $\int_0^1 \varphi^2(t) (\|x(t)\|^2 + \|y(t)\|^2) dt$ exist and so

$$2 \int_0^1 \varphi(t) \psi(t) \langle x(t), y(t) \rangle dt = \int_0^1 q(t) dt - \int_0^1 \varphi^2(t) (|x(t)|^2 + |y(t)|^2) dt \\ - \int_0^1 \psi^2(t) (|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2) dt$$

holds. Note also that

$$\int_0^1 \varphi(t) \psi(t) \langle x(t), y(t) \rangle dt = - \int_0^1 (\varphi \psi)'(t) \langle x(t), y(t) \rangle dt$$

holds. Therefore by the above two equalities, we have

$$2 \int_0^1 (\varphi \psi)'(t) \langle x(t), y(t) \rangle dt \leq \int_0^1 \varphi^2(t) (|x(t)|^2 + |y(t)|^2) dt + \int_0^1 \psi^2(t) (|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2) dt.$$

The equality is attained if and only if $\int_0^1 q(t) dt = 0$, that is

$$\varphi(t)x(t) + \psi(t)y'(t) = \psi(t)x'(t) + \varphi(t)y(t) = 0$$

for all $t \in (0, 1]$. Replacing φ by $-\varphi$ in the above argument, we can obtain the desired result. 証終

定理で特に $x = y$ として、次の系を得る。

系 1. 関数 $x \in C^1([0, 1], H)$ が $x(0) = \varphi(1)\psi(1)x(1) = 0$ を満たせば、次式が成り立つ。

$$\int_0^1 ((\varphi \psi)'(t) - \varphi^2(t)) |x(t)|^2 dt \leq \int_0^1 \psi^2(t) |x'(t)|^2 dt.$$

上式の等号が成立する必要十分条件は $\varphi(t)x(t) + \psi(t)x'(t) = 0$ ($0 < t \leq 1$) である。

注意 1. $0 < \alpha < \pi$, $\varphi_\alpha(t) = \cot \alpha t$ ($0 < t \leq 1$), $\psi_\alpha(t) = -\frac{1}{\alpha}$ ($0 < t \leq 1$) とすると、 $\varphi_\alpha, \psi_\alpha$ は条件 (1), (2) を満たし、 $(\varphi_\alpha \psi_\alpha)'(t) - \varphi_\alpha^2(t) = 1$ ($0 < t \leq 1$) が成り立つ。従って系 1 から Hilbert space case に対する Wirtinger's inequality :

$$(3) \quad \int_0^1 |x(t)|^2 dt \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 |x'(t)|^2 dt \quad (x \in C^1([0, 1], H) \text{ with } x(0) = x(1) = 0)$$

が成り立つ。更に、 $\varphi_\alpha(1) = 0$ if $\alpha = \frac{\pi}{2}$ であるから、

$$(4) \quad \int_0^1 |x(t)|^2 dt \leq \frac{4}{\pi^2} \int_0^1 |x'(t)|^2 dt \quad (x \in C^1([0, 1], H) \text{ with } x(0) = 0)$$

が成り立つ。しかしながら後で分かるように (4) は任意の実 Banach 空間で成り立つ事が分かる。

注意 2. $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq -1$ with $\lambda \neq -\frac{1}{2}$, $\varphi(t) = \alpha t^\lambda$ ($0 < t \leq 1$), $\psi(t) = t^{\lambda+1}$ ($0 \leq t \leq 1$) とすると、 φ, ψ は条件 (1), (2) を満たし、 $(\varphi \psi)'(t) - \varphi^2(t) = (\alpha(2\lambda + 1) - \alpha^2)t^{2\lambda}$ ($0 < t \leq 1$) が成り立つ。更に、 $\max_{\alpha \in \mathbb{R}} (\alpha(2\lambda + 1) - \alpha^2) = (2\lambda + 1)^2 / 4$ であるから、系 1 より、

$$(5) \quad \int_0^1 |x(t)|^2 t^{2\lambda} dt \leq \frac{4}{(2\lambda + 1)^2} \int_0^1 |x'(t)|^2 t^{2(\lambda+1)} dt \quad (x \in C^1([0, 1], H) \text{ with } x(0) = x(1) = 0)$$

が成り立つ。(5)において、 $\lambda = 2$ and $H = \mathbb{R}$ とすると、Beesack's inequality を得る。

系 2. E を実 Banach 空間、 $x \in C^1([0, 1], E)$ with $x(0) = 0$ とする。更に、 $\varphi(1)\psi(1) = 0$ and $\varphi^2(t) < (\varphi\psi)'(t)$ ($0 < t < 1$) を仮定する。このとき、

$$\int_0^1 ((\varphi\psi)'(t) - \varphi^2(t)) \|x(t)\|^2 dt \leq \int_0^1 \psi^2(t) \|x'(t)\|^2 dt$$

が成り立つ。上式の等号が成立する必要十分条件は

$\varphi(t)\|x(t)\| + \psi(t)\|x'(t)\| = 0$ ($0 < t < 1$) and $\frac{d}{dt}\|x(t)\| = \|x'(t)\|$ ($0 < t < 1$) である。

略証。Set $f(t) = \int_0^t \|x'(\tau)\| d\tau$ ($0 \leq t \leq 1$). Then $f'(t) = \|x'(t)\|$ ($0 \leq t \leq 1$) and $f(0) = 0$.

Then Corollary 1 implies that

$$\int_0^1 ((\varphi\psi)'(t) - \varphi^2(t)) f(t)^2 dt \leq \int_0^1 \psi^2(t) f'(t)^2 dt = \int_0^1 \psi^2(t) \|x'(t)\|^2 dt.$$

Note that $x(t) = \int_0^t x'(\tau) d\tau$ ($0 \leq t \leq 1$) and then $\|x(t)\| \leq \int_0^t \|x'(\tau)\| d\tau = f(t)$ ($0 \leq t \leq 1$).

Therefore $\left[(\varphi\psi)'(t) - \varphi^2(t) \right] \|x(t)\|^2 \leq \left[(\varphi\psi)'(t) - \varphi^2(t) \right] f(t)^2$ ($0 \leq t \leq 1$) by hypothesis and hence we obtain the desired inequality. 証終

注意 3. 注意 1 と系 2 から、(4) 式は任意の実 Banach 空間で成立することが分かる。

問題 1. (3) 式は任意の実 Banach 空間で成立するか？

注意 4. $\alpha \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \lambda < -\frac{1}{2}$, $\varphi(t) = \frac{2\lambda+1}{2} t^\lambda$ ($0 < t \leq 1$), $\psi(t) = (1-t)t^{\lambda+1}$ ($0 \leq t \leq 1$)

とすると、 φ, ψ は条件 (1), (2) を満たし、更に $(\varphi\psi)'(t) - \varphi^2(t) \geq (2\lambda+1)^2 t^{2\lambda} / 4 > 0$ ($0 < t < 1$) 且つ $\psi(1) = 0$ が成り立つ。従って、 E を任意の実 Banach 空間とすると、系 2 から、

$$\int_0^1 \|x(t)\|^2 t^{2\lambda} dt \leq \frac{4}{(2\lambda+1)^2} \int_0^1 \|x'(t)\|^2 t^{2(\lambda+1)} dt \quad (x \in C^1([0, 1], E) \text{ with } x(0) = 0)$$

が成り立つ。

問題 2. $\lambda < -\frac{1}{2}$ のとき、任意の実 Banach 空間に対して、(5) 式はどうなるか考察せよ。

更に境界条件を変更した次の結果が系 2 から導かれる。

系 3. $\lambda \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ は $\lambda'(t) < 0$ ($0 < t < 1$), $\lambda(0) = 1, \lambda(1) = 0$ を満たすとする。 E を実 Banach 空間、 $x \in C^1([0, 1], E)$ は $x(1) = 0$ を満たすとする。更に $\varphi(1)\psi(1) = 0$ かつ $\varphi^2(t) < (\varphi\psi)'(t)$ ($0 < t < 1$) を仮定する。このとき、

$$\int_0^1 \frac{\varphi\psi'(\lambda^{-1}(t)) - \varphi^2(\lambda^{-1}(t))}{-\lambda'(\lambda^{-1}(t))} \|x(t)\|^2 dt \leq \int_0^1 -\lambda'(\lambda^{-1}(t)) \psi^2(\lambda^{-1}(t)) \|x'(t)\|^2 dt$$

が成り立つ。