

## 環の cross-section について

名古屋大多元数理 松岡 学 (Manabu Matsuoka)

$R$  を環、 $I$  をそのイデアル、 $A := R/I$  を剰余環、 $\pi: R \rightarrow A$  を自然な準同型写像とする。 $h: A \rightarrow R$  : 環準同型写像で、 $\pi \circ h = \text{id}_A$  を満す時、 $h$  を section という。この時、

$$\begin{aligned} \tau: A \oplus I &\longrightarrow R \\ (\alpha, x) &\longmapsto h(\alpha) + x \end{aligned}$$

は全単射であるが、

$$\begin{cases} \tau((\alpha, x) \cdot (\beta, y)) = h(\alpha\beta) + xy \\ \tau(\alpha, x) \cdot \tau(\beta, y) = h(\alpha)h(\beta) + xh(\beta) + h(\alpha)y + xy \end{cases}$$

より、和は保つが積は必ずしも保たない。しかし、 $A \oplus I$  に積を

$$(\alpha, x) \cdot (\beta, y) := (\alpha\beta, xh(\beta) + h(\alpha)y + xy)$$

で入れ直すと、 $A \oplus I$  は環構造をもち、上の  $\tau$  は和、積、共に保つようになる。つまり、 $\tau$  は環同型写像となる。

今回の目的は、このような状況を cross-section の場合に

一般化して考察することである。

## § 1 Everett sum

さき程のことから、 $K, N$  を環とするとき直積集合  $K \times N$  にどのような環構造を与えるかが重要となる。このことに関して、C. J. Everett は [1] において、1つの構成法を与えている。この章では、この Everett による構成法を紹介する。

$N$  を環とする。 $E_1(N)$  を  $N$  自身を右  $N$ -module と見なした時の endomorphism ring とし、 $E_2(N)$  を  $N$  自身を左  $N$ -module と見なした時の endomorphism ring とする。 $E'(N) := E_1(N) \oplus E_2(N)$  をアーベル群としての直和とし、 $E'(N)$  に積を次のように与える。

$$(\phi', \phi^2) \cdot (\psi', \psi^2) = (\phi' \circ \psi', \psi^2 \circ \phi^2) \quad ; (\phi', \phi^2), (\psi', \psi^2) \in E'(N)$$

この積に関して  $E'(N)$  は環の構造をもつ。

定義  $E'(N)$  の元  $\phi = (\phi', \phi^2)$  は、次の (i) (ii) を満す時、 $N$  の double homothetism と呼ばれる。

$$(i) \quad x \cdot \phi'(y) = \phi^2(x) \cdot y$$

$$(ii) \quad \phi'(\phi^2(x)) = \phi^2(\phi'(x)) \quad (x, y \in N)$$

$N$  の double homothetism 全体を  $DH(N)$  で表す。

定義  $K, N$  を環とする。2つの写像

$$[, ] : K \times K \longrightarrow N \quad \vee \quad d : K \longrightarrow DH(N)$$

$$(\alpha, \beta) \longmapsto [\alpha, \beta]$$

$$\alpha \longmapsto d_\alpha = (d'_\alpha, d''_\alpha)$$

が次の10個の条件を満たす時、 $([.,.], d)$  を E-couple for  $K$  and  $N$  と呼ぶ。

- (1)  $[\alpha, \beta] = [\beta, \alpha]$
- (2)  $[\alpha, \beta] + [\alpha + \beta, \tau] = [\alpha, \beta + \tau] + [\beta, \tau]$
- (3)  $[0, \alpha] = 0$
- (4)  $d_{\alpha+\beta}' \chi + [\alpha, \beta] \chi = d_{\alpha}' \chi + d_{\beta}' \chi$
- (5)  $d_{\alpha+\beta}^2 \chi + \chi [\alpha, \beta] = d_{\alpha}^2 \chi + d_{\beta}^2 \chi$
- (6)  $d_r'([\alpha, \beta]) = [r\alpha, r\beta]$
- (7)  $d_r^2([\alpha, \beta]) = [\alpha r, \beta r]$
- (8)  $d_{\alpha}'(d_{\beta}^2 \chi) = d_{\beta}^2(d_{\alpha}' \chi)$
- (9)  $d_0' \chi = d_0^2 \chi = 0$
- (10)  $d_{\alpha\beta} = d_{\alpha} d_{\beta} \quad (\alpha, \beta, r \in K, \chi \in N)$

定理1.  $K, N$  を環、 $([.,.], d)$  を E-couple for  $K$  and  $N$  とする。  
この時、直積集合  $K \times N$  に次のように演算を定めることにより、  
 $K \times N$  は環の構造をもつ

$$(\alpha, \chi) + (\beta, \gamma) = (\alpha + \beta, [\alpha, \beta] + \chi + \gamma)$$

$$(\alpha, \chi) \cdot (\beta, \gamma) = (\alpha \cdot \beta, d_{\alpha}' \gamma + d_{\beta}^2 \chi + \chi \gamma)$$

この環を  $K \cdot N_{([.,.], d)}$  で表し、 $K$  と  $N$  の  $([.,.], d)$  に関する Everett sum と呼ぶ。

証明

この  $+$ ,  $\cdot$  が環の公理を満たすことは、E-couple の 10 個の条件から分かる。

(証終)

embedding  $l: N \longrightarrow K \cdot N_{(\alpha, \gamma, d)}$ ,  $x \mapsto (0, x)$  によって,  $N$  は  $K \cdot N_{(\alpha, \gamma, d)}$  のイデアルと見なされる。  $\pi: K \cdot N_{(\alpha, \gamma, d)} \longrightarrow K$ ,  $(\alpha, x) \mapsto \alpha$  とすれば,

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{l} K \cdot N_{(\alpha, \gamma, d)} \xrightarrow{\pi} K \longrightarrow 0$$

は環の完全系列である。

## § 2 cross-section と Everett sum の関係

定義  $R$  を環、 $I$  を  $R$  のイデアル、 $A = R/I$  とし、 $\pi: R \rightarrow A$  を natural homomorphism とする。写像  $f: A \rightarrow R$  が

$$(i) f(0) = 0 \quad (ii) f(ab) = f(a)f(b) \quad (iii) \pi \circ f = id_A$$

を満たす時、 $f$  を  $A$  から  $R$  への cross-section という。

定理 2.  $R$  を環、 $I$  を  $R$  のイデアル、 $A = R/I$  とする。

$f: A \rightarrow R$ : cross-section が存在するための必要十分条件はある E-couple  $(l, \gamma, d)$  for  $A$  and  $I$  と 次の図式を可換にする  $\forall: A \cdot I_{(\alpha, \gamma, d)} \longrightarrow R$ : 環同型写像 が存在することである。

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & A \cdot I_{(\ell, \gamma, d)} & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \text{id} & & \downarrow \nabla & & \downarrow \text{id} \\
0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & R & \longrightarrow & A \longrightarrow 0
\end{array}$$

証明 ある E-couple  $(\ell, \gamma, d)$  for  $A$  and  $I$  と上の図式を可換にする同型写像  $\nabla: A \cdot I_{(\ell, \gamma, d)} \longrightarrow R$  が存在したとする。この時、 $f: A \longrightarrow R$  を  $f(\alpha) = \nabla(\alpha, 0)$  と定めると、この  $f$  は cross-section となる。

逆に、cross-section  $f: A \longrightarrow R$  が存在したとする。この時、写像  $[\cdot, \cdot]: A \times A \longrightarrow I$  を  $[\alpha, \beta] = f(\alpha) + f(\beta) - f(\alpha + \beta)$  によって写像  $d: A \longrightarrow DH(I)$  を  $d_\alpha = (d'_\alpha, d''_\alpha)$ ,  $d'_\alpha \chi = f(\alpha)\chi$ ,  $d''_\alpha \chi = \chi f(\alpha)$  ( $\alpha, \beta \in A, \chi \in I$ ) によって定めると、10個の条件を満たし、 $(\ell, \gamma, d)$  は E-couple for  $A$  and  $I$  となる。

又、 $\nabla: A \cdot I_{(\ell, \gamma, d)} \longrightarrow R$  を  $\nabla(\alpha, \chi) = f(\alpha) + \chi$  で定めると、この  $\nabla$  は、上の図式を可換にする環同型写像となる。(証終)

cross-section  $f: A \longrightarrow R$  を Everett sum  $A \cdot I_{(\ell, \gamma, d)}$  によって特徴づけることができる、という事がこの定理から分かる。

### §3 cross-section の extension

$R^*$  は環、 $R$  はその部分環とする。 $I^*$  は  $R^*$  のイデアル、

$I$  は  $R$  のイデアルで  $I = I^* \cap R$  とする。この時、自然に  $A = R/I$  は  $A^* = R^*/I^*$  の部分環と見なされる。以下において、このような  $R^*, R, I^*, I, A^*, A$  を固定しておく。

定義  $f: A \rightarrow R$  を cross-section とする。cross-section  $f^*: A^* \rightarrow R^*$  で  $f^*|_A = f$  となる  $f^*$  を  $f$  の extension とする。

定義  $([, ], d)$  を E-couple for  $A$  and  $I$ 、 $([, ], d^*)$  を E-couple for  $A^*$  and  $I^*$  とする。 $([, ], d^*)$  が  $([, ], d)$  の extension とは、

$$(i) \quad [, ]^*: A^* \times A^* \rightarrow I^*, \quad [, ]: A \times A \rightarrow I$$

$$[, ]^*|_{A \times A} = [, ]$$

$$(ii) \quad d_\alpha^* = (d_\alpha^{*1}, d_\alpha^{*2}), \quad d_\alpha = (d_\alpha^1, d_\alpha^2)$$

任意の  $\alpha \in A$  に対して  $d_\alpha^{*1}|_I = d_\alpha^1$ 、 $d_\alpha^{*2}|_I = d_\alpha^2$  となることをいう。

$([, ], d^*)$  が  $([, ], d)$  の extension であるとき、injection  $A \cdot I_{([, ], d)} \rightarrow A^* \cdot I_{([, ], d^*)}^*$ ,  $(\alpha, x) \mapsto (\alpha, x)$  によって、 $A \cdot I_{([, ], d)}$  を  $A^* \cdot I_{([, ], d^*)}^*$  の部分環と見なすことができる。

cross-section の extension が E-couple の extension によって特徴づけられることが次の定理から分かる。

定理3.  $f: A \rightarrow R$  を cross-section とし、 $([, ], d)$  を定理2

のように定められた E-couple for  $A$  and  $I$  とする。

cross-section  $f^*: A^* \rightarrow R^*$  で  $f$  の extension であるものが存在するための必要十分条件は、 $(L, J, d)$  の extension である E-couple  $(L, J^*, d^*)$  for  $A^*$  and  $I^*$  と 次の図式を可換にする環同型写像  $\nabla^*: A^* \cdot I_{(L, J^*, d^*)}^* \rightarrow R^*$  で、任意の  $\alpha \in A$  に対して  $\nabla^*(\alpha, 0) = f(\alpha)$  となるものが存在することである。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I^* & \longrightarrow & A^* \cdot I_{(L, J^*, d^*)}^* & \longrightarrow & A^* \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \nabla^* & & \downarrow \text{id} \\ 0 & \longrightarrow & I^* & \longrightarrow & R^* & \longrightarrow & A^* \longrightarrow 0 \end{array}$$

証明  $f^*: A^* \rightarrow R^*$  を  $f$  の extension である cross-section とする。

この時、

$$\begin{cases} [\alpha, \beta]^* = f^*(\alpha) + f^*(\beta) - f^*(\alpha + \beta) & \alpha, \beta \in A^* \\ d_{\alpha}^{*1} \chi = f^*(\alpha) \chi, \quad d_{\alpha}^{*2} \chi = \chi f^*(\alpha) & \alpha \in A^*, \chi \in I^* \end{cases}$$

によって  $(L, J^*, d^*)$  を定めると、これは  $(L, J, d)$  の extension である。 $\nabla^*: A^* \cdot I_{(L, J^*, d^*)}^* \rightarrow R^*$  を  $\nabla^*(\alpha, \chi) = f^*(\alpha) + \chi$  で定めれば、 $\nabla^*$  は上の図式を可換にする環同型写像となる。

又、任意の  $\alpha \in A$  に対して、 $\nabla^*(\alpha, 0) = f^*(\alpha) = f(\alpha)$

逆に、 $(L, J, d)$  の extension である E-couple  $(L, J^*, d^*)$  for  $A^*$  and  $I^*$  と上の図式を可換にする環同型写像  $\nabla^*: A^* \cdot I_{(L, J^*, d^*)}^* \rightarrow R^*$  で任意の  $\alpha \in A$  に対して  $\nabla^*(\alpha, 0) = f(\alpha)$  となるものがあるとする。このとき、 $f^*: A^* \rightarrow R^*$  を  $f^*(\alpha) = \nabla^*(\alpha, 0)$  と

定めると、 $f^*$  は  $A^*$  から  $R^*$  への cross-section になる。任意の  $\alpha \in A$  に対して、 $f^*(\alpha) = \sigma^*(\alpha, 0) = f(\alpha)$  なので、 $f^*$  は  $f$  の extension である。 (証終)

E-couple  $e = (\mathcal{L}, \mathcal{J}, d)$  の extension に対して、e-equivalent という概念を導入しておく。

定義  $e = (\mathcal{L}, \mathcal{J}, d)$  を E-couple for  $A$  and  $I$  とし、 $(\mathcal{L}, \mathcal{J}^*, d^*)$ 、 $(\mathcal{L}, \mathcal{J}^{**}, d^{**})$  を共に  $e$  の extension である E-couple for  $A^*$  and  $I^*$  とする。 $(\mathcal{L}, \mathcal{J}^*, d^*)$  と  $(\mathcal{L}, \mathcal{J}^{**}, d^{**})$  が e-equivalent であるとは、次の図式を可換にし、かつ  $\mathcal{I}|_{A \cdot I_{(\mathcal{L}, \mathcal{J}, d)}} = \text{id}$  を満す環同型写像  $\mathcal{I}: A^* \cdot I_{(\mathcal{L}, \mathcal{J}^*, d^*)}^* \longrightarrow A^* \cdot I_{(\mathcal{L}, \mathcal{J}^{**}, d^{**})}^*$  が存在することをいう。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I^* & \longrightarrow & A^* \cdot I_{(\mathcal{L}, \mathcal{J}^*, d^*)}^* & \longrightarrow & A^* \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \mathcal{I} & & \downarrow \text{id} \\ 0 & \longrightarrow & I^* & \longrightarrow & A^* \cdot I_{(\mathcal{L}, \mathcal{J}^{**}, d^{**})}^* & \longrightarrow & A^* \longrightarrow 0 \end{array}$$

定理4.  $f: A \rightarrow R$  を cross-section とし、 $(\mathcal{L}, \mathcal{J}, d)$  を定理2のように定められた E-couple for  $A$  and  $I$  とする。 $f^*, g^*$  を共に  $f$  の extension である  $A^*$  から  $R^*$  への cross-section であるとする。 $(\mathcal{L}, \mathcal{J}^*, d^*)$ 、 $(\mathcal{L}, \mathcal{J}^{**}, d^{**})$  を共に次のように定められる  $e = (\mathcal{L}, \mathcal{J}, d)$  の extension である E-couple for  $A^*$

and  $I^*$  とする。

$$\begin{cases} [\alpha, \beta]^* = f^*(\alpha) + f^*(\beta) - f^*(\alpha + \beta) & (\alpha, \beta \in A^*) \\ d_{\alpha}^{*1} \chi = f^*(\alpha) \chi, \quad d_{\alpha}^{*2} \chi = \chi f^*(\alpha) & (\alpha \in A^*, \chi \in I^*) \end{cases}$$

$$\begin{cases} [\alpha, \beta]^{**} = g^*(\alpha) + g^*(\beta) - g^*(\alpha + \beta) & (\alpha, \beta \in A^*) \\ d_{\alpha}^{**1} \chi = g^*(\alpha) \chi, \quad d_{\alpha}^{**2} \chi = \chi g^*(\alpha) & (\alpha \in A^*, \chi \in I^*) \end{cases}$$

この時、 $(\mathbb{L}, \mathbb{J}^*, d^*)$  と  $(\mathbb{L}, \mathbb{J}^{**}, d^{**})$  は、e-equivalentである。

$$\begin{array}{ccccccc} \text{証明} & 0 & \longrightarrow & I^* & \longrightarrow & A^* \cdot I_{(\mathbb{L}, \mathbb{J}^*, d^*)}^* & \longrightarrow A^* \longrightarrow 0 \\ & & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \nabla^* & \downarrow \text{id} \\ & 0 & \longrightarrow & I^* & \longrightarrow & R^* & \longrightarrow A^* \longrightarrow 0 \\ & & & \uparrow \text{id} & & \uparrow \nabla^{**} & \uparrow \text{id} \\ & 0 & \longrightarrow & I^* & \longrightarrow & A^* \cdot I_{(\mathbb{L}, \mathbb{J}^{**}, d^{**})}^* & \longrightarrow A^* \longrightarrow 0 \end{array}$$

のような可換図式が成り立つ。ここで、 $\nabla^*$ 、 $\nabla^{**}$  は、 $\nabla^*(\alpha, \chi) = f^*(\alpha) + \chi$ 、 $\nabla^{**}(\alpha, \chi) = g^*(\alpha) + \chi$  である。

又、任意の  $(\alpha, \chi) \in A^* \cdot I_{(\mathbb{L}, \mathbb{J}, d)}$  に対して、 $\nabla^*(\alpha, \chi) = f^*(\alpha) + \chi = f(\alpha) + \chi = g^*(\alpha) + \chi = \nabla^{**}(\alpha, \chi)$  よって、環同型写像  $A^* \cdot I_{(\mathbb{L}, \mathbb{J}^*, d^*)}^* \longrightarrow A^* \cdot I_{(\mathbb{L}, \mathbb{J}^{**}, d^{**})}^*$  は  $A^* \cdot I_{(\mathbb{L}, \mathbb{J}, d)}$  上では不変である。  
(証終)

この e-equivalent という概念は、cross-section の extension の一意性を議論する時に有益となるが、それらの事は、まだまだこれからの課題である。

## References

[1] Everett, C. J. : An extension theory for rings, Amer. J. Math. 64 (1942), 363-370

[2] Rédei, L. : Algebra I, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1959.

[3] Sumiyama, T. : On double homothetisms of rings and local rings with finite residue fields, Math. J. Okayama Univ. 33 (1991), 13-20