

Existence of solutions of two point boundary value problems with concave and convex nonlinearities

八戸工業高等専門学校・電気工学科

田中 敏 (Satoshi Tanaka)

Department of Electrical Engineering

Hachinohe National College of Technology

本講演は内藤雄基氏 (神戸大・工) との共同研究によるものである.

2階常微分方程式

$$(E) \quad u'' + \lambda a(x)f(u) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

を考える. ここで, $\lambda > 0$ はパラメータ, $a \in C^1[0, 1]$, $a(x) > 0$ for $0 \leq x \leq 1$, $f \in C(-\infty, \infty)$, $f(s) > 0$ for $s > 0$, f は $(0, \infty)$ 上局所 Lipschitz 連続, $f(-s) = -f(s)$ for $s > 0$, ある $s_0 > 0$ に対して, 区間 $(0, s_0]$ 上 $f(s)$ は非減少, かつ, $f(s)/s$ は非増加であるとする. さらに,

$$(C) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{s} = \infty, \quad \lim_{s \rightarrow +0} \frac{f(s)}{s} = \infty$$

を仮定する.

上段を満たす f の典型例の一つとして

$$f(s) = |s|^{q-1}v + |s|^{p-1}v, \quad 0 < q < 1 < p$$

がある.

境界条件

$$(B) \quad u(0) = u(1) = 0$$

を考える. 境界値問題 (E)-(B) に対して, 次の定理 1, 2 を得る.

定理 1. 次の (i)-(iii) を満たす $\lambda_0 > 0$ が存在する:

- (i) $0 < \lambda < \lambda_0$ のとき (E)-(B) はすくなくとも 2 つの正值解をもつ,
- (ii) $\lambda = \lambda_0$ のとき (E)-(B) はすくなくとも 1 つの正值解をもつ,
- (iii) $\lambda > \lambda_0$ のとき (E)-(B) は正值解をもたない.

定理 2. λ_0 を定理 1 のものとする. 以下を満たす $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ が存在する:

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_k < \lambda_{k+1} < \cdots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty,$$

かつ, 各 $k \in \{1, 2, \dots\}$ に対して, 次の (i), (ii) が成立する:

- (i) $\lambda \in (0, \lambda_k)$ のとき, (E)-(B) の解 u で $u'(0) > 0$ かつ $(0, 1)$ 内にちょうど k 個の零点をもつものが, すくなくとも 2 つ存在する,
- (ii) $\lambda = \lambda_k$ のとき, (E)-(B) の解 u で $u'(0) > 0$ かつ $(0, 1)$ 内にちょうど k 個の零点をもつものが, すくなくとも 1 つ存在する.

$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty$ であるから, 定理 2 よりすべての $\lambda > 0$ に対して (E)-(B) は無限に多くの解をもつことを注意しておく.

Ambrosetti-Brezis-Cerami [1] は境界値問題

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda(|u|^{q-1}u + |u|^{p-1}u) = 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad 0 < q < 1 < p$$

に対して, 定理 1 と同様の結果や定理 2 のように無限に多くの解をもつような結果を得ている. ここで $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ は有界である.

また, Ouyang-Shi [3] は境界値問題

$$(P1) \quad \begin{cases} \Delta u + \lambda f(u) = 0, & x \in B^N, \\ u = 0, & x \in \partial B^N, \end{cases}$$

に対して, $f(s) = s^q + s^p$ ($0 < p < 1 < q$) の場合を含むようなある条件のもとで, 次の (i)-(iii) を満たす $\Lambda > 0$ が存在することを示した:

- (i) $0 < \lambda < \Lambda$ のとき (P1) はちょうど 2 つの正値解をもつ,
- (ii) $\lambda = \Lambda$ のとき (P1) はちょうど 1 つの正値解をもつ,
- (iii) $\lambda > \Lambda$ のとき (P1) は解をもたない.

ここで, $N \geq 3$, $B^N = \{x \in \mathbf{R}^N : |x| \leq 1\}$ である.

我々の問題 (E)-(B) は [1] や [3] の問題の $N = 1$ の場合である. また, 我々の問題 (E)-(B) は非自励系であることが, [1] や [3] の問題に比べれば一般的である.

ちなみに, 自励系の場合 ($a(x) \equiv 1$) で, $N = 1$, $f(s) = s^q + s^p$ ($0 < p < 1 < q$) のときは Sánchez-Ubilla [4] によって, 次の (i)-(iii) を満たす $\Lambda > 0$ が存在することが示されている:

- (i) $0 < \lambda < \Lambda$ のとき (E)-(B) はちょうど 2 つの正値解をもつ,
- (ii) $\lambda = \Lambda$ のとき (E)-(B) はちょうど 1 つの正値解をもつ,
- (iii) $\lambda > \Lambda$ のとき (E)-(B) は解をもたない.

しかしながら, Sánchez-Ubilla [4] の手法を我々の非自励系である問題に適用することはできない.

初期条件

$$(I) \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = \mu$$

を考える. 内藤学-内藤雄基 [2] の方法をもちいれば, 初期値問題 (E)-(I) の解 $u(x; \lambda, \mu)$ は $[0, 1]$ 内に存在して一意であることが証明できる. また, f は奇関数なので $u(x; \lambda, \mu) = -u(x; \lambda, -\mu)$ であるから, $\mu > 0$ の場合を考えれば十分である. λ を 0 から ∞ まで動かしたとき, また, μ を 0 から ∞ まで動かしたとき $u(t; \lambda, \mu)$ の零点の個数がどのように変化するかを考察することによって, 定理 1, 2 を証明する. 以下, その証明について大雑把に述べる.

関数 $b(x)$ を

$$b(x) \equiv \lambda a(x) \frac{f(u(x; \lambda, \mu))}{u(x; \lambda, \mu)}$$

とおけば、方程式 (E) は線形の方程式

$$u''(x; \lambda, \mu) + b(x)u(x; \lambda, \mu) = 0$$

とみなすことができる. Sturm の比較定理より, $b(x) > 0$ が十分小さいときは $u(x; \lambda, \mu)$ は零点をもたないし, $b(x) > 0$ が十分大きいときは $u(x; \lambda, \mu)$ の零点の個数は多いことがわかる.

従って, $b(x)$ の形から, λ を 0 から ∞ まで変化させると, $u(x; \lambda, \mu)$ の零点は増えていくことが期待される.

また, $\mu \rightarrow +0$ または $\mu \rightarrow \infty$ とすると $u(x; \lambda, \mu)$ の零点は増えていく. それは次の関数

$$E[u](x) = \frac{[u'(x)]^2}{2} + \lambda a(x)F(u(x))$$

を利用することでわかる. ここで,

$$F(v) = \int_0^v f(s)ds \geq 0, \quad v \in \mathbb{R}$$

である. なお, $F(v) = F(|v|) > 0$ for $v \in (-\infty, \infty) \setminus \{0\}$, $F(0) = 0$, かつ $F(v)$ は $(0, \infty)$ 上狭義単調増加であることを注意しておく.

関数 $E[u]$ に対して

$$\frac{\mu^2}{2}A_* \leq E[u(\cdot; \lambda, \mu)](x) \leq \frac{\mu^2}{2}A^*, \quad 0 \leq x \leq 1$$

が成り立つ. ここで

$$A_* = \exp\left(-\int_0^1 \frac{[a'(s)]_-}{a(s)} ds\right), \quad A^* = \exp\left(\int_0^1 \frac{[a'(s)]_+}{a(s)} ds\right)$$

である. これより, $\mu \rightarrow 0$ のとき $|u(x; \lambda, \mu)| \rightarrow 0$, また $\mu \rightarrow \infty$ のとき $\max\{|u(x; \lambda, \mu)|, |u'(x; \lambda, \mu)|\} \rightarrow 0$ である. 従って, 条件 (C) より $\mu \rightarrow 0$ のとき $b(x) \rightarrow \infty$, また $\mu \rightarrow \infty$ のとき $[0, 1]$ 内のある区間で $b(x) \rightarrow \infty$ であることがわかるので, $\mu > 0$ を十分小さくするかあるいは十分大きくすると $u(x; \lambda, \mu)$ の零点の個数は増えていく.

これらの議論を組み合わせるにより, 定理 1, 2 を証明することができる.

REFERENCES

- [1] A. Ambrosetti, H. Brezis and G. Cerami, Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems, *J. Funct. Anal.* **122** (1994), 519–543.
- [2] M. Naito and Y. Naito, Solutions with prescribed numbers of zeros for nonlinear second order differential equations, *Funkcial. Ekvac.* **37** (1994), 505–520.
- [3] T. Ouyang and J. Shi, Exact multiplicity of positive solutions for a class of semilinear problem, II, *J. Differential Equations* **158** (1999), 94–151.
- [4] J. Sánchez and P. Ubilla, One-dimensional elliptic equation with concave and convex nonlinearities, *Electron. J. Diff. Eqns.* **2000** (2000), 1–9.