

## 測地線の指数定理について

九大工 酒井 隆

一般の境界条件の下での測地線の指数定理は W. Ambrose ([1]) によって与えられている。しかしその証明は非常に複雑であつて、しかも誤りを含んでいた。その誤りは大槻先生によって指摘され、高橋先生によって訂正された ([7])。その後 M. Klingmann ([5]) は Hilbert space 上の二次形式の理論を用いることによって、より一般の指数定理を得ている。

最近 W. Klingenberg ([3], [4]) は geodesic flow の観点から閉測地線に対する指数定理を得た。その方針は簡明で、幾何学的に興味深い。ここでは Ambrose の指数定理をこの観点から証明できることを述べる。実際我々は Jacobi 場の基本的な性質だけを必要とする。§1 では geodesic flow の観点から Jacobi 場を特徴づける。Ambrose による共役点の概念はよく知られているとは云えないので §2 では指数定理をきちんと書くことにする。§3 でその証明の概略を述べる。

1° 準備。  $(M^{n+1}, g)$  を  $n+1$  次元 Riemann 多様体,  $\pi: TM \rightarrow M$  を  $M$  の接 bundle とする。  $K: TTM \rightarrow TM$  を  $g$  の Levi-Civita 接続に関する接続写像とする ([2])。 二のとき、若  $X \in T_x M$  に対して  $\varphi: T_x TM \rightarrow T_x M \oplus T_x M$  を  $\varphi(\hat{X}) := (\pi_* \hat{X}, K\hat{X})$  で定義すれば、これは linear isomorphism である。  $\text{Ker } \pi_*$  の元を vertical vector,  $\text{Ker } K$  の元を horizontal vector と呼ぶ。 以下  $\varphi$  によって  $T_x TM$  と  $T_x M \oplus T_x M$  を同一視することにして  $\hat{X} := (X_h, X_v)$  と書くことにする。 次は  $\varphi_t$  を geodesic flow とする。 可能な  $X \in TM$  に対して、  $c \in C(0) = \pi(X)$ ,  $\dot{c}(0) = X$  なる測地線 (affine parameter) とするとき、

$\varphi_t X := \dot{c}(t)$ 。  $\varphi_t$  が定義する  $TM$  上の vector 場  $\xi$  が geodesic spray であり、上の notation で  $\xi_X = (X, 0)$ 。

さて geodesic flow の orbit は測地線によって決定されるが、geodesic flow で不変な vector 場を実は Jacobi 場で特徴づけることができる。 次の補題は Klingenberg による。(Prof. Klingenberg は仙石での講演でこの補題の Fermi 座標を用いない簡単な証明はないか? と云われたので、その様な証明をつけおいた)。

Lemma.  $(A, B) \in T_x TM$ ,  $(\varphi_t)_*(A, B) = (X_h(t), X_v(t))$  を geodesic flow invariant な  $TM$  上の vector 場とする。

このとき、 $X_h(t)$  は  $X_h(0) = A$ ,  $\nabla X_h(0) = B$  を満たす  $c(t) =$

$\pi \varphi_t$  に沿った Jacobi 場  $X_h(t) = \nabla X_h(t)$  が成立する。こゝに  $\nabla$  は  $\dot{c}(t)$  に関する共変微分を表す。逆に  $X_h(t) \in X_h(0) = A$ ,  $\nabla X_h(0) = B$  なる測地線  $c(t)$  に沿った Jacobi 場とすれば、 $(X_h(t), \nabla X_h(t)) = (\varphi_t)_* (A, B)$ 。

(証明).  $X(s)$  を  $X(0) = x$ ,  $\dot{X}(0) = (A, B)$  をみたす TM 内の curve とする。このとき  $s \rightarrow \pi \circ \varphi_t \circ X(s) = \exp_{\pi X(s)}^t X(s)$  は  $s=0$  で接ベクトル

$$\frac{\partial}{\partial s} (\pi \circ \varphi_t \circ X(s)) \Big|_{s=0} = \pi_* \circ (\varphi_t)_* \dot{X}(0) = \pi_* \circ (\varphi_t)_* (A, B) = X_h(t)$$

を持つ。こゝに  $s \rightarrow \pi \circ \varphi_t \circ X(s)$  は各固定された  $s$  に対して測地線であるから、 $X_h(t)$  は Jacobi 場となる。明らかに

$$X_h(0) = \pi_* (A, B) = A \quad \text{であり、} \quad D_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial s} \quad \text{とおけば}$$

$$\begin{aligned} \nabla X_h(0) &= \nabla_{D_1} X_h(0) = \nabla_{D_1} \frac{\partial}{\partial s} (\pi \circ \varphi_t \circ X(s)) \Big|_{s=0, t=0} = \nabla_{D_2} \frac{\partial}{\partial t} (\pi \circ \varphi_t \circ X(s)) \Big|_{s=0, t=0} \\ &= \nabla_{D_2} \varphi_t \circ X(s) \Big|_{s=0, t=0} = \nabla_{D_2} X(s) \Big|_{s=0} = K X^* D_2 \Big|_{s=0} = K \dot{X}(0) = B. \end{aligned}$$

を得る。他方、

$$\begin{aligned} X_h(t) &= K(\varphi_t)_* (A, B) = K \frac{\partial}{\partial s} (\pi \circ \varphi_t \circ X(s)) \Big|_{s=0} = \nabla_{D_2} \varphi_t \circ X(s) \Big|_{s=0} \\ &= \nabla_{D_2} \frac{\partial}{\partial t} (\pi \circ \varphi_t \circ X(s)) \Big|_{s=0} = \nabla_{D_1} (\pi \circ \varphi_t)_* (A, B) \\ &= \nabla_{D_1} \pi_* (\varphi_t)_* (A, B) = \nabla X_h(t). \end{aligned}$$

逆は Jacobi 場  $X_h$  から  $X_h(0), \nabla X_h(0)$  によって一意に決まることから明らかである。証明終り。

TM 上には Sasaki metric  $G$  が

$$G(\tilde{X}, \tilde{Y}) := g(\pi_* \tilde{X}, \pi_* \tilde{Y}) + g(K\tilde{X}, K\tilde{Y}) \quad \tilde{X}, \tilde{Y} \in TTM$$

によって導入される。さて次に  $\pi_1: T_1M \rightarrow M \in \mathcal{g}$  に属する  $M$  の単位接 bundle、 $G_0 \in \mathcal{g}$  に属する  $\iota: T_1M \hookrightarrow TM$  に属する、 $G_0$  から induce される Riemann 計量とある。  $X \in T_1M$  に対して

$\varphi|_{T_X T_1M}$  は  $T_X T_1M$  から  $T_{\pi_1(X)}M \oplus \perp X \subset T_{\pi_1(X)}M \oplus T_{\pi_1(X)}M$  の上への linear isomorphism である。ここで  $\perp X$  は  $T_{\pi_1(X)}M$  における  $\mathcal{g}$  に属する  $X$  の orthogonal complement。前と同様に

$T_X T_1M$  と  $T_{\pi_1(X)}M \oplus \perp X$  を同一視する。さて geodesic spray  $\xi$  は  $T_1M$  に接していることを注意する。  $T_X^{2n} T_1M$  ( $X \in T_1M$ ) :=  $\perp \xi_X$  ( $G_0$  に属する  $\xi_X$  の  $T_X T_1M$  における orthogonal complement) とおけば、この notation で、  $T_X^{2n} T_1M := \perp X \oplus \perp X$ 。最初の直和因子を  $T_{Xh}^n$ 、第2の直和因子を  $T_{Xv}^n$  と書くことにすれば、  $T_X^{2n} T_1M := T_{Xh}^n \oplus T_{Xv}^n$ 。  $T_{Xh}^n \subset T_{Xv}^n$  を  $T_X^{2n} T_1M$  の "水平部分" ("垂直部分") と呼ぶ。

さて  $M$  上の正規測地線  $C: [a, b] \rightarrow M$  が与えられているとする。  $\dot{C}: [a, b] \rightarrow T_1M$  に属する  $T^{2n} T_1M \rightarrow T_1M$  の induced bundle  $\tau^{2n}: V^{2n} \rightarrow [a, b]$  を得る。これは fiber  $\tau^{2n}(t) = V^{2n}(t) = T_{\dot{C}(t)}^{2n} T_1M = T_{C(t)h}^n \oplus T_{C(t)v}^n$  は水平部分  $T_{C(t)h}^n$ 、垂直部分  $T_{C(t)v}^n$  に分解される。つまり、  $\tau^{2n}$  上には、

$$2\alpha((X_h, X_v), (Y_h, Y_v)) := g(X_h, Y_h) - g(Y_h, X_v)$$

によって、symplectic 形式  $\alpha$  が定義される。 geodesic flow  $\phi_t$  は各 fibre  $V^{2n}(t_0) \subset V^{2n}(t_0 + t)$  に写す。 Lemma より

$\phi_t$ -不変な section が  $C$  に垂直な Jacobi 場 で特徴づけられる。Jacobi 場の簡単な性質から  $d\phi_t$  は symplectic 形式  $\alpha$  を不変に保つ。最後に言葉の約束をする。  $V^{2n}(t)$  の部分空間  $W$  は  $\alpha|_W \equiv 0$  をみたすとき、"isotropic" な部分空間と呼ばれる。  $\phi_t$ -inv. の  $\tau$  の cross-section  $\Upsilon(t)$  に対して  $\Upsilon(t) := (\gamma(t), \nabla \gamma(t))$  と書くことにする。

2° 指数定理.  $(M^{2n}, g)$  を Riemann 多様体.  $K, L \in M$  の部分多様体,  $C: [a, b] \rightarrow M$  を  $C(a) \in K, \dot{C}(a) \perp T_{C(a)}K$ ;  $C(b) \in L, \dot{C}(b) \perp T_{C(b)}L$  をみたす測地線とする。我々は  $K, L$  を結ぶ  $C$  に近い曲線で  $C$  より短いものがどこかに存在するかという問題を取扱うことにする。以下  $g$  から定義される接空間の内積を " $\langle, \rangle$ " で表す。

例 1 境界条件.  $t \in [a, b]$  における境界条件とは、  
 $\mathcal{S} = (\mathcal{S}, A_{\mathcal{S}})$  という形で、 $\mathcal{S}$  は  $\perp \dot{C}(t) (C T_{C(t)} M)$  の部分空間、 $A_{\mathcal{S}}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  は  $\langle, \rangle$  に関して self-adjoint な線形写像である。

Example 1.  $P \in C(t) \in P, \dot{C}(t) \perp T_{C(t)}P$  なる  $M$  の部分多様体、 $H_{\dot{C}(t)}$  を  $P$  への法線方向  $\dot{C}(t)$  に関する第 2 基本形式と取る。

$$\mathcal{S} := T_{C(t)}P; \quad \langle A_{\mathcal{S}}X, Y \rangle := H_{\dot{C}(t)}(X, Y) \quad X, Y \in \mathcal{S}.$$

と定義すれば、 $\mathcal{S}$  によって  $t$  における境界条件  $\mathcal{S} = (\mathcal{S}, A_{\mathcal{S}})$

を得る。

$\mathcal{J}$  で  $C$  に沿う Jacobi 場  $v$ 。  $C$  に垂直なものの全体  $\mathcal{S}$  を含む vector 空間を表わす。  $C$  における境界条件  $(S, A_S)$  が与えられたとき、

$$\mathcal{J}_S^* := \{ Y \in \mathcal{J} \mid Y(t)^{\perp S}, D_Y(t) - A_S Y(t) \perp S \}$$

$$\mathcal{J}_S := \{ Y \in \mathcal{J} \mid Y(t) \in S, D_Y(t) = A_S Y(t) \}$$

と定義する。 明らかに  $\dim \mathcal{J}_S^* = \dim M - 1$ ,  $\dim \mathcal{J}_S = \dim S$ 。

Example 2.  $\mathcal{J} = (S, A_S)$  (resp.  $\mathcal{J} = (T, A_T)$ )  $\in \mathcal{a}$  (resp.  $\mathcal{b}$ ) における境界条件とある。 二つとき、  $t \in [a, b]$  における境界条件  $\mathcal{J}^*(t)$ ,  $\mathcal{J}(t)$  を次の様に定義する。

$$(i) \mathcal{S}^*(t) := \{ Y(t) \mid Y \in \mathcal{J}_S^* \} \quad (\text{resp. } \mathcal{T}(t) := \{ X(t) \mid X \in \mathcal{J}_T \})$$

$$(ii) A_{\mathcal{S}^*(t)} Y(t) := \text{pr}_{\mathcal{S}^*(t)} D_Y(t) \quad (\text{resp. } A_{\mathcal{T}(t)} X(t) := \text{pr}_{\mathcal{T}(t)} D_X(t)).$$

ここに  $\text{pr}_{\mathcal{S}^*(t)}: \perp C(t) \rightarrow \mathcal{S}^*(t)$  等は直交射影を表わす。

(ii) は well-defined であることを注意する。  $\mathcal{J}_S^* = \mathcal{J}_{\mathcal{S}^*(t)}^*$  であるが、  $\mathcal{J}_T$  と  $\mathcal{J}_{\mathcal{T}(t)}$  とは一般に一致しない。

2.2. 共役点  $\mathcal{J}, \mathcal{J}$  をそれぞれ  $\mathcal{a}, \mathcal{b}$  における境界条件とある。  $t_0 \in (a, b)$  に対す  $C$  上の vector 空間  $C(t_0)$  を

$$C(t_0) := \bigcup_{t \in [a, b]} \{ Z(t) \mid \exists Y \in \mathcal{J}_S^*, X \in \mathcal{J}_T \text{ such that}$$

$$Z(u) = Y(u) : u \leq t_0, Z(u) = X(u) : u \geq t_0 ;$$

$$D_Y(t_0) - D_X(t_0) \perp T(t_0) \} . \quad \text{と定義する。}$$

明らかに  $\mathcal{F}_S^* \cap \mathcal{F}_T \subset C(t_0)$  であるが、 $\pi(t_0) := \dim C(t_0) / \mathcal{F}_S^* \cap \mathcal{F}_T$  が正となるとき、 $t_0$  を ordered pair  $\mathcal{S}, \mathcal{T}$  の共役点と呼び、 $\pi(t_0)$  をその位数と呼ぶことにする。

2.3. 指数定理  $C, K, L$  を最初に仮定した通りとし、 $\mathcal{S}, \mathcal{T}$  を  $K, L$  から example 1 のやり方で得られた境界条件とする。

$\Xi := \{ C \text{ に沿った } 2 \text{ の piecewise smooth vector field } \xi(t) \text{ で} \\ \xi(a) \in \mathcal{S} = T_{C(a)}K, \xi(b) \in \mathcal{T} = T_{C(b)}L \text{ をみたすもの} \}.$

$RX(t) := R(\dot{C}(t), X(t))\dot{C}(t)$  (右側の  $R$  は曲率テンソル) とおくと、

$\Xi$  上の指数形式  $I_{\mathcal{S}\mathcal{T}}$  を次の様に定義する。

$$I_{\mathcal{S}\mathcal{T}}(X, Y) := \int_a^b \{ \langle DX(t), DY(t) \rangle + \langle RX(t), Y(t) \rangle \} dt + \langle A_S X(a), Y(a) \rangle \\ - \langle A_T X(b), Y(b) \rangle \\ \left[ = \int_a^b \{ \langle RX(t) - DDX(t), Y(t) \rangle \} dt + \sum_{a < t < b} \langle DX(t-0) - DX(t+0), Y(t) \rangle \right. \\ \left. + \langle DX(b) - A_T X(b), Y(b) \rangle - \langle DX(a) - A_S X(a), Y(a) \rangle \right]$$

$I_{\mathcal{S}\mathcal{T}}$  は  $\Xi$  上の対称な双一次形式でその指数 (i.e.  $I_{\mathcal{S}\mathcal{T}}$  が負定値となる  $\Xi$  の maximal subspace の次元) が、“ $K, L$  を結ぶ  $C$  に沿った短い曲線がどれ位存在するか”を表わしている。

さて Ambrose の指数定理は、index  $I_{\mathcal{S}\mathcal{T}}$  が  $\mathcal{S}, \mathcal{T}$  の共役点の位数の和と “Convexity” で表わされることを主張している。

可成り

「Ambrose の指数定理.

$$\text{Index of } I_{ST} = \sum_{a < t < b} \bar{n}(t) + \text{Convexity.} \quad \square$$

こゝに Convexity は次の様に定義される。  $\mathcal{X} := \{X \in \mathcal{J}_T \mid X(a) \in \mathcal{S}\}$  とおくとき、  $\mathcal{X}$  上では

$$I_{ST}(X, X') = \langle A_S^* X(a) - \nabla X(a), X'(a) \rangle$$

が成立する。このとき、

$$\text{Convexity} := \text{index } I_{ST}|_{\mathcal{X}} + \dim(\text{Null space of } I_{ST}|_{\mathcal{X}}) / \mathcal{J}_S^* \cap \mathcal{J}_T.$$

3° 定理の証明。以下 geodesic flow の観点から Ambrose の指数定理の証明の概略を述べる。

第一段. まず与えられた境界条件  $\mathcal{S}, \mathcal{T}$  から  $V^{2n}(b)$  の  $n$  次元 isotropic subspace  $V^n(b)$  を構成できることを示す。これは以下の証明で本質的な役割りを果たす。

$$N := S^*(b) \cap T \quad \text{とおく。}$$

$$S^*(b) = S_1 \oplus N, \quad T = T_1 \oplus N, \quad \perp \dot{C}(b) = S_1 \oplus T_1 \oplus N \oplus A$$

をそれぞれ  $S^*(b), \perp \dot{C}(b)$  の直交分解とする。  $V^{2n}(b)$  の次の 3 つの部分空間を与える。

$$a): \mathcal{V}_1 = \{ \hat{Y}(b) = (Y(b), \nabla Y(b)) \mid Y \in \mathcal{J}_S^*, \nabla Y(b) - A_T \text{pr}_T Y(b) \perp T \}.$$

と定義する。  $u$  による  $\Phi: S^*(b) \rightarrow N$  による線形写像を

$$\Phi(Y) := \text{pr}_N(A_{S^*(b)} Y - A_T \text{pr}_T Y)$$

により定義する。このとき、次の補題の成立することは容易

易に分かる。

Lemma 1.  $\hat{Y}(b) \in V_1 \Leftrightarrow Y(b) \in \ker \Phi$  であって、

$$\text{pr}_S \nabla Y(b) = \text{pr}_S A_{S^*(b)} Y(b), \quad \text{pr}_T \nabla Y(b) = \text{pr}_T A_T \text{pr}_N Y(b)$$

$$\text{pr}_N \nabla Y(b) = \text{pr}_N A_{S^*(b)} Y(b) (= \text{pr}_N A_T \text{pr}_N Y(b))$$

b):  $\Psi: N \rightarrow S^*(b)$  の線型写像を

$\Psi(X) := \text{pr}_{S^*(b)} (\nabla Y(b) - \nabla X(b))$  —  $\because X \in \mathcal{G}_T$  は  $X(b) = X$ ,  $Y \in \mathcal{G}_{S^*(b)}^* = \mathcal{G}_S^*$  は  $Y(b) = X$  をみたす様に取る — によって定義する。  $\Psi$  の定義は  $Y(b) = X$  をみたす  $Y \in \mathcal{G}_S^*$  の選ぶ方によらぬことは可分。  $\dim \Psi(N) = d$  とし、  $x_1, \dots, x_d \in N$  を対応する  $\Psi(x_1), \dots, \Psi(x_d)$  が  $\Psi(N)$  の基底となる様に選ぶ。  $X_i$  ( $i=1, \dots, d$ )  $\in \mathcal{G}_T$  を  $X_i(b) = x_i$  となる様に選んでおいて、

$V_2 := V^{2n}(b)$  の部分空間で、  $\tilde{X}_i(b) = (X_i(b), \nabla X_i(b))$  ( $i=1, \dots, d$ ) によって生成されるもの。

と定義する。明らかに  $\dim V_2 = d$ 。

最後に

$$c): V_3 = \{ \tilde{X}(b) = (X(b), \nabla X(b)) \mid X \in \mathcal{G}_T, X(b) \in T_1 \}$$

と定義すれば、  $\dim V_3 = \dim T_1$ 。  $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ ,  $(V_1 \oplus V_2) \cap V_3 = \{0\}$  であることは容易に分かる。更に  $\Psi$  は  $\Phi$  の adjoint な線形写像に他ならないことを用いれば、補題 1 に注意して

Lemma 2.  $V^n (= V^n(b)) := V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$  は  $T^n(b)$  の  $n$  次元 isotropic な部分空間である。

を示すことができる。

第2段. さて  $V_V^n(t) := \{ \Upsilon(t) = (Y(t), \nabla Y(t)) \mid Y \in \mathcal{F}, Y(t) = 0 \}$  ,

$$V^n(t) := d\phi_{t-b} V^n(b) = \{ \tilde{U}(t) = (U(t), \nabla U(t)) \mid U \in \mathcal{F}, \tilde{U}(b) \in V^n(b) \}$$

$$W(t) := V^n(t) \cap V_V^n(t)$$

と定義する。この節では ordered pair  $\mathcal{F}, \mathcal{T}$  の共役基底  $W(t)$  によって記述することができることを示そう。そのために線形写像  $\chi_{t_0}: C(t_0) \rightarrow W(t_0)$  を次の様に定義する。

$Z \in C(t_0)$  とする。定義によつて、

$\exists X \in \mathcal{F}_T, Y \in \mathcal{F}_S^*$  such that

$$Z(u) = Y(u) : u \leq t_0, \quad Z(u) = X(u) : u \geq t_0 ;$$

$$\nabla Y(t_0) - \nabla X(t_0) (= \nabla Z(t_0 - 0) - \nabla Z(t_0 + 0)) \perp T(t_0).$$

いま  $\Upsilon(b) = (Y(b), \nabla Y(b)) \in V_1$  であることが確かめられる。次に  $X(t) = X_1(t) + X_2(t) + X_3(t) \rightarrow \widehat{X}_2(b) \in V_2, \widehat{X}_3(b) \in V_3$ ,  $X_1(b) \in \text{Ker } \Psi \rightarrow$  と分解することができる。実は  $\widehat{X}_1(b) \in V_1$  とすることができる。よって

$$\chi_{t_0} Z := \Upsilon(t_0) - \widehat{X}(t_0)$$

と定義すれば、 $\chi_{t_0}$  は  $C(t_0)$  から  $W(t_0)$  への線形写像である。

さて  $\chi_{t_0}$  は surjective であり、かつ  $\text{Ker } \chi_{t_0} = \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_S^*$  であることは容易に示される。したがって

Lemma 3.  $\dim W(t) = \bar{n}(t)$   $a < t < b$ . 特に  $t_0 \in (a, b)$  か  $\mathcal{S}, \mathcal{T}$  の共役点  $\Leftrightarrow \dim W(t) > 0$ .

次の補題はよく知られている。

Lemma 4.  $m_0 = \bar{n}(t_0) = \dim W(t_0) > 0$  とする。  $V^n(t_0) = d\phi_{t_0} V^n(b)$  の基底  $\{\tilde{U}_i(t_0)\}_{i=1, \dots, n}$  を  $\{\tilde{U}_i(t_0)\}_{i=1, \dots, m_0}$  か  $W(t_0)$  の基底となつてゐる様に選ぶ。このとき、

(i)  $\nabla \tilde{U}_i(t_0)$   $1 \leq i \leq m_0$ ,  $\tilde{U}_j(t_0)$ ,  $m_0+1 \leq j \leq n$  は  $\perp \dot{C}(t_0)$  の基底を形成する。

(ii)  $t$  が  $t_0$  から十分近いとき、 $\{\tilde{U}_i(t)\}_{1 \leq i \leq n}$  は  $\perp \dot{C}(t)$  の基底である。

特に  $\bar{n}(t)$  は有限個の  $t$  の値を除く  $0$  である。

第3段. 補題3から

$\text{Index } I_{\mathcal{S}\mathcal{T}} = \sum_{a < t < b} \dim W(t) + \text{Convexity}$   
を証明できればよい。

まず  $\mathcal{S}, \mathcal{T}$  に関する共役点  $t_0 \in (a, b)$  に對して、 $C(t_0)$  の  $\mathcal{S}^* \cap \mathcal{T}$  に complementary な部分空間  $\mathcal{S}W(t_0)$  を選ぶ。  
このとき、 $I_{\mathcal{S}\mathcal{T}}(\mathcal{S}W(t_0), \mathcal{S}W(t_0)) = 0$  であつて、異なる  $t_0$  の値に對する  $\mathcal{S}W(t_0)$  は互いに独立である。次に、

$\mathcal{S}_0$ :  $I_{\mathcal{S}\mathcal{T}}$  が負定値である様な  $\mathcal{S}$  の maximal な部分空間。

$S_1$ :  $I_{ST}|_{\mathcal{S}}$  の null space の部分を向いて  $\mathcal{S}_S^* \cap \mathcal{S}_T$  に complementary なもの.

と定義あり。明らかに  $S_0, S_1, SW = \bigoplus_{a < t < b} SW(t)$  は互いに直交してあって  $I_{ST}(S_0, S_1 \oplus SW) = 0$  である。更に  $I_{ST}|_{S_1 \oplus SW} \equiv 0$  であって、 $S_1 \oplus SW$  の元は  $I_{ST}$  の null space  $\mathcal{S}_S^* \cap \mathcal{S}_T^*$  に属さないことに注意すれば。

$$\text{index } I_{ST} \geq \dim \mathcal{S} = \sum_{a < t < b} \dim W(t) + \text{Convexity.}$$

ただし  $\mathcal{S} = S_0 \oplus S_1 \oplus SW$  とおいた。

第4段 上の不等式で実際に等号が成立することを確認めるには、

「 $\xi \in \Xi$  が  $I_{ST}(\xi, \eta) = 0$  for  $\forall \eta \in \mathcal{S}$  を満たせば、

$I_{ST}(\xi, \xi) \geq 0$ 」が成立することを示せば充分である。

まず  $I_{ST}(\xi, SW) = 0$  から、 $\forall \widehat{U}(t_0) \in W(t_0)$  ( $a < t_0 < b$ ) に対して、

$$\langle \xi(t_0), \nabla \widehat{U}(t_0) \rangle = I_{ST}(\xi, \widehat{Z}) = 0, \text{ ただし } \widehat{Z} = (\chi_{t_0|SW}(t_0))^T \widehat{U}(t_0)$$

を得る。したがって補題4から  $\xi(t) = \sum_{i=1}^m w^i(t) U_i(t)$

と書くことが出来る。ここで  $d\phi_{t \rightarrow b} V^n(b)$  の基底  $\{\widehat{U}_i(t)\}_{1 \leq i \leq n}$  は  $\{U_i(b)\}_{1 \leq i \leq t = \dim T}$  が  $T$  の基底になっている様に選ぶことが出来る。したがって  $w^i(b) = 0$  ( $i > t$ ) としてよい。さて

$$I_{ST}(\xi, \xi) = \int_a^b |\dot{w}^i(t) U_i(t)|^2 dt - \langle \sum w^i(b) (A_T U_i(b) - \nabla U_i(b)),$$

$$\sum_j w^j(b) U_j(b) \rangle + \langle \sum w^i(a) (A_\beta U_i(a) - \nabla U_i(a)), \sum w^j(a) U_j(a) \rangle.$$

$\equiv \tau \quad \xi(b) \in T$  より  $\langle \sum w^i(b) (A_T U_i(b) - \nabla U_i(b)), \sum w^j(b) U_j(b) \rangle$   
 $= 0$  が分かる。次に  $\xi(a) \in \mathcal{P}$  であるから Jacobi 場  
 $\sum w^i(a) U_i(a)$  は  $U_S(a) + U_T(a)$  - type  $\hat{U}_S(a) \in d\phi_{t-b}^{-1} T_1$ ,  
 $U_T \in \mathcal{H}$  - の # にかける。  $I_{ST}(U_T, \zeta_0 \oplus \zeta_1) = I_{ST}(\xi, \zeta_0 \oplus \zeta_1)$   
 $= 0$  が条件から成立し、 $\zeta_0, \zeta_1$  の定義の仕方から、

$I_{ST}(U_T, U_T) \geq 0$  でなければならぬ。(だから)

$$\langle \sum w^i(a) (A_S U_i(a) - \nabla U_i(a)), \sum w^j(a) U_j(a) \rangle = \langle A_S U_T(a) - \nabla U_T(a), U_T(a) \rangle = I_{ST}(U_T, U_T) \geq 0.$$

以上から  $I_{ST}(\xi, \xi) \geq 0$  を得る。(証明終り)

Remark. Ambrose は convexity を次の様に定義した。  
 $t \in \mathcal{Q}$  に十分近い  $t$  として、  $\Xi(S, T(t)) = C([a, t])$  によって  
 piecewise smooth な vector 場で  $\xi(a) \in \mathcal{P}$ ,  $\xi(t) \in T(t)$  をみたす  
 ものの  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  vector 空間。と定義する。index  $I_{ST(t)}$  on  
 $\Xi(S, T(t))$  で convexity を定義する。しかし上の証明は  
 二つが  $\dim \zeta_0 + \dim \zeta_1$  に等しいことを示している。

## References

- [1] Ambrose, W. The index theorem in Riemannian geometry, Ann. of Math., 73(1961) 49-86.
- [2] Gromoll, D; Klingenberg, W; Meyer, W. Riemannsche Geometrie im Grossen, Lecture Notes in Math. 55, Springer (1968).
- [3] Klingenberg, W. Manifold with geodesic flow of Anosov type, Ann. of Math. (1974).
- [4] ----- The index theorem for closed geodesics, Tôhoku Math. J. (to appear).
- [5] Klingmann, M. Das Morse'sche Indextheorem bei allgemeinen Randbedingungen, J. Diff. Geo., 1(1967) 371-380.
- [6] Sakai, T. On the index theorem of Ambrose, to appear.
- [7] Takahashi, T. Correction to [1]. Ann. of Math. 80(1964) 538-541.