

22.

実 2 次有理関数族の モジュライ空間について

日本大学 理工学部 数学科
藤村 雅代 (Masayo FU-
JIMURA)

J. Milnor [Mil92] により、2 次有理関数族のモジュライ空間の研究がなされている。これを基に、実 2 次有理関数の空間から、モジュライ空間を定める。また、2 次有理関数の力学的な性質の違いによって、モジュライ空間を代数曲線で分類¹する。

なお、ここで必要な複素力学系の用語は [Mil] [Bea91] による。

22.1 準備

実 2 次有理関数の空間、 $\text{Rat}_2(\mathbf{R})$ は次をみたす有理関数 $f: \mathbf{R} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ からなる空間である。

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0x^2 + a_1x + a_2}{b_0x^2 + b_1x + b_2}$$

ただし、 $p(x)$ と $q(x)$ は、互いに素な実係数多項式とし、 a_0 と b_0 は同時に 0 にならないとする。

空間 $\text{Rat}_2(\mathbf{R})$ に Möbius 変換群 $\text{Rat}_1(\mathbf{R})$ は次のように作用する。

$$g \in \text{Rat}_1(\mathbf{R}), f \in \text{Rat}_2(\mathbf{R}) \Rightarrow g \circ f \circ g^{-1} \in \text{Rat}_2(\mathbf{R})$$

したがって、 $\text{Rat}_2(\mathbf{R})$ の 2 つの f_1, f_2 に対して、 $g \in \text{Rat}_1(\mathbf{R})$ が存在して、

$g \circ f_1 \circ g^{-1} = f_2$ となるとき、 f_1 と f_2 は **holomorphically conjugate** であるといい、 $f_1 \sim f_2$ と書く。

¹代数曲線の描画には数式処理システム Risa/Asir を用いた。

22.2 実 2 次有理関数のモジュライ空間

22.2.1 モジュライ空間 $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$

定義 22.2.1. $\mathcal{M}_2(\mathbf{R}) = \text{Rat}_2(\mathbf{R}) / \sim$ とするとき、 $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ を実 2 次有理関数 f の holomorphic conjugacy class $\langle f \rangle$ のモジュライ空間 (moduli space) と呼ぶ。

上と同様にして、 $\text{Rat}_2(\mathbf{C})$, $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ が定義できる。 $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ に座標を入れるため、[Mil92] では次のような手法を用いている。

Rat_2 (係数、変数とも、複素数でも実数でもよい) の関数 f に対して、 $f \in \text{Rat}_2$ の不動点を z_1, z_2, z_3 とおき、それぞれの multiplier (不動点での微分係数) を μ_1, μ_2, μ_3 とする。さらに multiplier の基本対称式を次のようにおく。

$$\sigma_1 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \quad \sigma_2 = \mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1, \quad \sigma_3 = \mu_1\mu_2\mu_3$$

$\text{Rat}_2(\mathbf{C})$ に対し、 $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ は次のように決まる。

補題 22.2.2. [Mil92] multiplier μ_1, μ_2, μ_3 は $\langle f \rangle$ を決定し、次の式をみたす。

$$\mu_1\mu_2\mu_3 - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) + 2 = 0 \quad (\text{i.e. } \sigma_3 = \sigma_1 - 2) \quad (1)$$

したがって、モジュライ空間 $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ は座標 (σ_1, σ_2) によって、 $\mathbf{C}^2$ と同形になる。

ここで $\text{Rat}_2(\mathbf{R})$ の関数 f について考える。このとき、不動点 z_1, z_2, z_3 と multiplier μ_1, μ_2, μ_3 は、すべて実数、または、実数 1 つと複素共役なもの 2 つの組合せしかあり得ない。したがって、 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ はいつでも実数値をとることがわかる。

また、multiplier は、(1) 式をみたし、ある例外を除いて $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbf{R}^2$ を一つ決めると、実係数の Möbius 変換によってただ一つの $\langle f \rangle$ ($\neq \langle x^2 + c \rangle$) が決まる。例外を与えるような点 $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbf{R}$ の集合は、3 次代数曲線になる。

ただし、直線、 $\sigma_1 = 2$ 上では、2 次多項式の holomorphic conjugacy class $\langle x^2 + \frac{\sigma_2}{4} \rangle$ も同時に対応する。

補題 22.2.3. holomorphic conjugacy class $\langle f \rangle$ ($\neq \langle x^2 + c \rangle$) が唯一つに決まらない (σ_1, σ_2) の集合は、次のような $\mathbf{R}^2$ 上の 3 次代数曲線である。(図 22.2.1 参照。)

$$2\sigma_1^3 + \sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_1^2 - 4\sigma_2^2 - 8\sigma_1\sigma_2 + 12\sigma_1 + 12\sigma_2 - 36 = 0 \quad (2)$$

(2) 式で定まる 3 次曲線の上の (σ_1, σ_2) に対しては、2 つの conjugacy class が対応する。

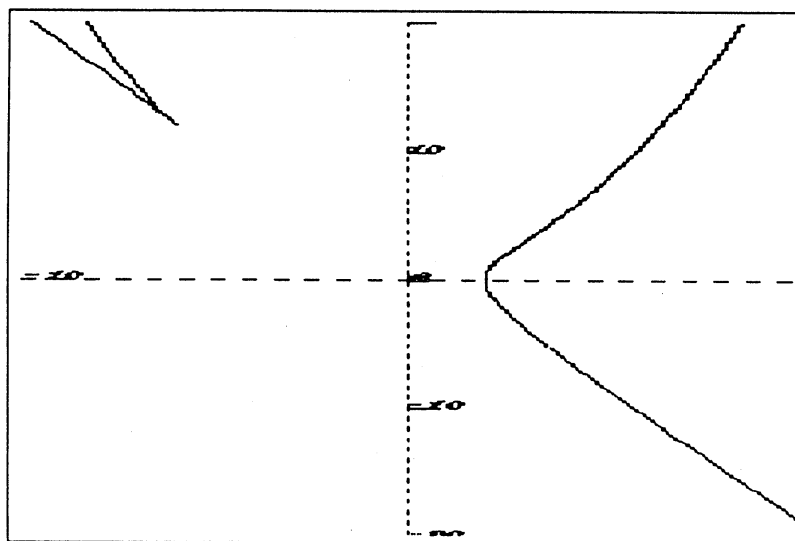


図1 Moduli plane 上の3次曲線 $2\sigma_1^3 + \sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_1^2 - 4\sigma_2^2 - 8\sigma_1\sigma_2 + 12\sigma_1 + 12\sigma_2 - 36 = 0$

補題 22.2.3. は次の小節で示す。

これ以後 $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ として (σ_1, σ_2) によって座標の入った $\mathbf{R}^2$ をとる。

22.2.2 2次有理関数族の normal form

ここでは、実2次有理関数族の normal form について述べる。

複素2次有理関数族の normal form は [Mil92] にもいくつか挙げられているが、実係数の場合は、conjugacy として実係数の Möbius 変換だけしか使えないので、厳密な意味での normal form はとれない、しかし、 (σ_1, σ_2) に $\langle f \rangle$ が1対1に対応する場合は、 f として、 $\frac{\mu x}{ax^2 + 2x + 1}$ の形の関数がとれる。

よって、この意味で次のような2パラメータ2次有理関数族

$$f_{a,\mu}(x) = \frac{\mu x}{ax^2 + 2x + 1} \quad (a, \mu \in \mathbf{R}, a, \mu \neq 0) \quad (3)$$

を $\text{Rat}_2(\mathbf{R})$ の normal form として考えると便利である。

実際、次のように (σ_1, σ_2) と $\langle f_{a,\mu} \rangle$ は1対1に対応する。

$f_{a,\mu}$ に対して、不動点とその multiplier は次のようになる。

$$\begin{array}{ll} \text{不動点} & 0, \quad \frac{-1 \pm \sqrt{1 - a(1 - \mu)}}{a} \\ \text{multiplier} & \mu, \quad \frac{1}{\mu} \left\{ 2 - \frac{2}{a} - \mu \pm \sqrt{1 - a(1 - \mu)} \right\} \quad (\text{複号同順}) \end{array}$$

したがって、 $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ と (a, μ) の間には次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \mu + \frac{4}{\mu} \left(1 - \frac{1}{a}\right) - 2 \\ \sigma_2 &= \left(\mu + \frac{1}{\mu}\right)\sigma_1 - \left(\mu^2 + \frac{2}{\mu}\right)\end{aligned}$$

よって、 (σ_1, σ_2) が与えられたとき、

$$\begin{cases} \mu^3 - \sigma_1 \mu^2 + \sigma_2 \mu - \sigma_1 + 2 = 0 \\ a = \frac{4}{\mu^2 - (\sigma_1 + 2)\mu + 4} \end{cases} \quad (4)$$

の実根 (a, μ) を求めればよい。

(4) が実根を一つだけ持つとき (a, μ) によって定まった $\langle f_{a, \mu} \rangle$ が (σ_1, σ_2) に対応する holomorphic conjugacy class となる。

(4) が実根を 3 つ持つときそれを $(a_1, \mu_1), (a_2, \mu_2), (a_3, \mu_3)$ と置くと、 (σ_1, σ_2) に対応する normal form の形の関数が 3 つ存在するが、実係数 Möbius 変換によって、3 つの不動点をそれぞれ他の不動点に移すと、不動点での multiplier は Möbius 変換によって不変なので、

$$f_{a_1, \mu_1} \sim f_{a_2, \mu_2} \sim f_{a_3, \mu_3}$$

をみtas。よって、これらのうち 1 つをとって $\langle f_{a_1, \mu_1} \rangle$ が (σ_1, σ_2) に対応する holomorphic conjugacy class となる。

補題 22.2.3. の証明

上で述べたように、 $f \in \text{Rat}_2(\mathbf{R})$ に対して、 $a, \mu \in \mathbf{R}$ が存在して $f \sim f_{a, \mu}(x)$ となることと、 $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbf{R}^2$ と、holomorphic conjugacy class $\langle f \rangle$ の間に 1 対 1 の関係がある、ということは同値である。

よって、任意の $a, \mu \in \mathbf{R}$ に対して

$$f(x) \not\sim \frac{\mu x}{ax^2 + 2x + 1}$$

が成り立つ場合を考える、それは、次のような場合である。

1. f が 2 次多項式と conjugate になり、ある $c \in \mathbf{R}$ によって $f(x) \sim x^2 + c$, $c \in \mathbf{R}$ となる場合。

このとき、関数族 $\{x^2 + c\}$ は、moduli 平面上の直線 $\sigma_1 = 2$ に対応する。

2. $f \sim \frac{\mu x}{ax^2 + 1}$ となる場合。このとき、さらに右辺を変換すると、次のように 1 パラメータ化することができる。

$$a > 0 \quad \text{のとき} \quad f \sim \frac{\mu x}{x^2 + 1} \quad (5)$$

$$a < 0 \quad \text{のとき} \quad f \sim \frac{\mu x}{-x^2 + 1} \quad (6)$$

(5) 式、(6) 式の、不動点での multiplier を計算すると、2 式とも

$$\sigma_1 = \mu + \frac{2}{\mu}(2 - \mu), \quad \sigma_2 = 2(2 - \mu) + \frac{1}{\mu^2}(2 - \mu)^2 \quad (7)$$

をみたす。よって、このとき (σ_1, σ_2) に対して、2つの holomorphic conjugacy class $\langle \frac{\mu x}{x^2+1} \rangle$, $\langle \frac{-\mu x}{-x^2+1} \rangle$ が対応する。

したがって holomorphic conjugacy class が 2 つ対応するような (σ_1, σ_2) の集合は、(7) 式から μ を消去して、次のような 3 次代数曲線として得られる。

$$2\sigma_1^3 + \sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_1^2 - 4\sigma_2^2 - 8\sigma_1\sigma_2 + 12\sigma_1 + 12\sigma_2 - 36 = 0$$

■

この 3 次代数曲線は、唯一つの特異点として $(\sigma_1, \sigma_2) = (-6, 12)$ にカスプを持つ。

22.2.3 モジュライ空間上の分類

定義 22.2.4. n 周期点での、multiplier が μ であるような写像の、conjugacy class $\langle f \rangle \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ の集合を $\text{Per}_n(\mu)$ とする。

補題 22.2.5. [Mil92] $\text{Per}_1(\mu)$ は直線であり、

$$\begin{cases} \mu \neq 0 \text{ のとき} & \sigma_2 = (\mu + \mu^{-1})\sigma_1 - (\mu^2 + 2\mu^{-1}) \\ \mu = 0 \text{ のとき} & \sigma_1 = 2 \end{cases} \quad (8)$$

となる。(図 22.2.3 参照。)

実 2 次有理関数 f を次のような 7 つの場合に分類する。

1. f の 2 つの critical point が複素共役のとき。
 - (a) 微分係数が正ならば degree +2
 - (b) 微分係数が負ならば degree -2
2. f の 2 つの critical point が実数のとき。区間 $I = f(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ において
 - (a) I が critical point を含まないとき。
 - i. I で単調増加ならば +monotone
 - ii. I で単調減少ならば -monotone
 - (b) I が critical point を一つだけ含むとき。unimodal
 - (c) I が 2 つの critical points を含むとき、 I での微分係数の正負の変化により、
 - i. (+ - +)bimodal
 - ii. (- + -)bimodal

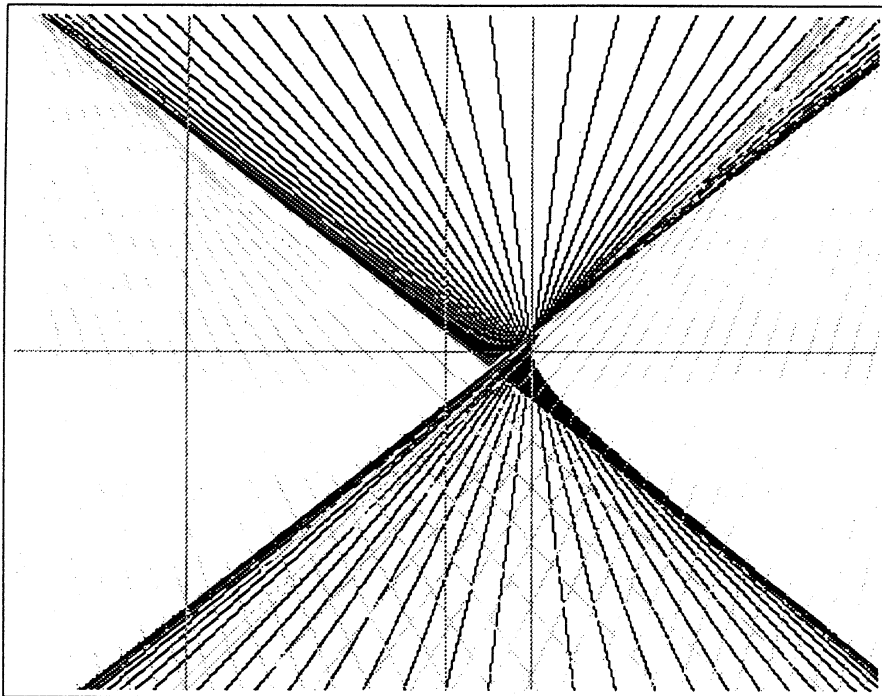


図 2 Moduli plane $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$: $\text{Per}_1(\mu)$ の直線族。 $-10 < \sigma_1 < 10$, $-20 < \sigma_2 < 20$. 薄いグレーの直線は、repeling fixed point を持つ関数に対応し、濃いグレーの直線は、attracting fixed point を持つ関数に対応している。 $\sigma_1 < -6$, $\sigma_1 > 2$ の部分に見えている包絡線 (薄いグレー) は、補題の 3 次代数曲線と一致する。

この分類を (a, μ) によって座標の入った $\{f_{a, \mu}(x)\}$ のパラメータ平面上で行なうとき、次の代数曲線によってなされる。(図 22.2.3 参照。)

$$\begin{cases} a(\mu - 2)^2 - 4 = 0 \\ a(\mu + 2)^2 - 4 = 0 \\ \mu = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

モジュライ空間 $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ 上でこれらの分類は次の代数曲線によりなされ $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ は 7 つの領域に分けられる。(図 22.2.3 参照。)

$$\begin{cases} \sigma_1 = -6 \\ \sigma_1 = 2 \\ 2\sigma_1^3 + \sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_1^2 - 4\sigma_2^2 - 8\sigma_1\sigma_2 + 12\sigma_1 + 12\sigma_2 - 36 = 0 \end{cases}$$

ただし、 $f \in \text{Rat}_2(\mathbf{R})$ の 2 つの critical points を ω_1, ω_2 としたとき、直線 $\sigma_1 = -6$ は $f(\omega_1) = \omega_2$ をみたす関数族、 $\sigma_1 = 2$ は $f(\omega_1) = \omega_1$ をみたす関数族に対応する。

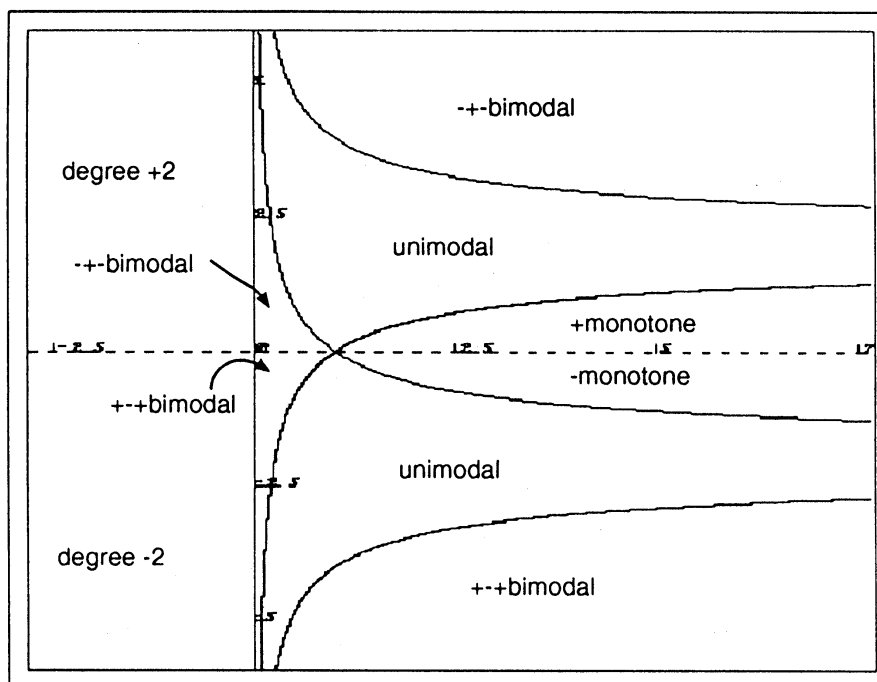


図 3 Parameter plane: パラメータ平面内の代数曲線による分類。

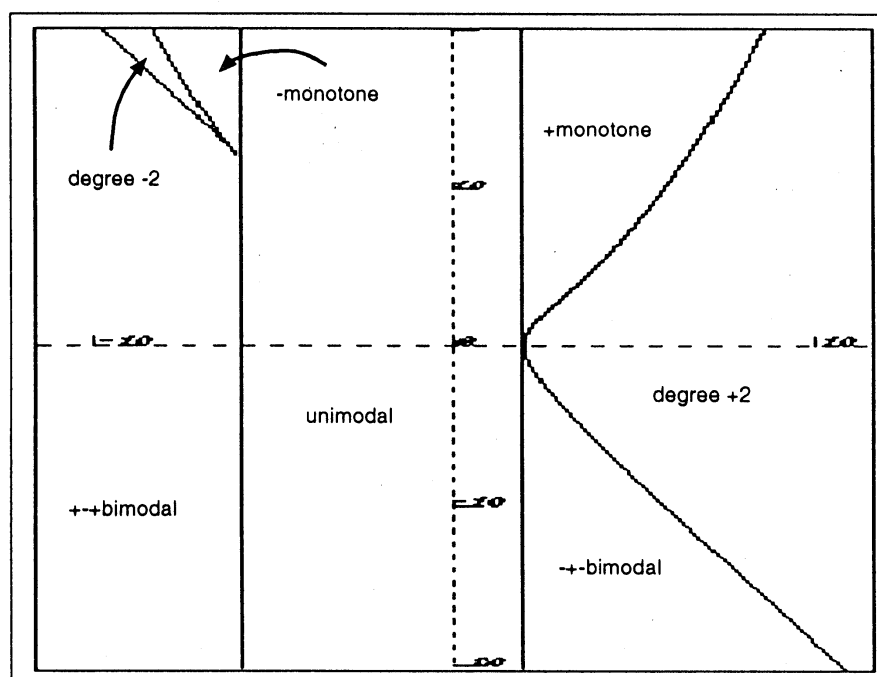


図 4 Moduli plane: モジュライ平面内の代数曲線による分類。

参考文献

- [Bea91] A. F. Beardon. *Iteration of Rational Functions*. Springer-Verlag, 1991.
- [Mil] J. Milnor. Dynamics in one complex variables: Introductory lectures. Preprint # 1990/5, SUNY Stony Brook, 1990.
- [Mil92] J. Milnor. Remarks on quadratic rational maps. Preprint # 1992/14, SUNY Stony Brook, 1992.