

(続紙 1)

京都大学	博士（情報学）	氏名	三木 啓司
論文題目	Studies on Generalized Orthogonal Polynomials and Their Applications		
(論文内容の要旨)			
本論文は、幅広い応用がなされている一般化された直交多項式について、その代数的特徴付けに注目し、可積分系の理論などを用いることで、多重直交多項式、コーシー双直交多項式、歪直交多項式など種々の一般化直交多項式に対するスペクトル変換の理論を構築し、新たな可積分な方程式の導出や量子状態転送のモデルとその完全状態遷移に関する結果がまとめられたものであり、全6章からなる。 第1章は研究の背景にある直交多項式と可積分系との関係、直交多項式系の解析を深めることの意義、および本論文の構成を述べている。例として、可積分系の代表的な方程式の一つである戸田方程式と直交多項式との関係を明らかにし、量子情報通信における量子状態の完全状態遷移への応用について述べられている。また、種々の一般化された直交多項式の紹介がなされている。 第2章は多重直交多項式について調べている。多重直交多項式に付随する可積分系として、多重直交多項式のスペクトル変換の理論を導くことにより、一般化された戸田格子方程式とその離散類似を導出している。さらに多重直交多項式とd-直交多項式との関係から、得られた方程式からfull-Kostant戸田格子方程式へのミウラ型変換を構成している。また、多重Charlier多項式および多重Meixner多項式と呼ばれる多重直交多項式の中でも古典性を持つ多項式について、対応する代数的なモデル、つまりリー代数の表現論との対応関係を明らかにすることで、これら多項式系が満足する非自明な関係式を導くことに成功している。 第3章では、コーシー双直交多項式と呼ばれるクラスの多項式系に関して、離散スペクトル変換を導出することで新たな離散可積分系である離散コーシー格子方程式を導出することに成功している。ここで得られたスペクトル変換が、準直交多項式とよばれる一般化直交多項式のスペクトル変換と同一の形式で与えられることを明らかにすることで、半無限格子上の離散コーシー格子方程式に対する2つの異なるクラスの厳密解を与えることに成功している。 第4章では、近年ランダム行列の理論で盛んに応用が試みられている歪直交多項式と呼ばれるクラスの多項式系を扱っている。歪直交多項式はパフィアンによる表示が知られており、パフィアンによる可積分系の理論を用いることにより、離散スペクトル変換を導き、付随する可積分系として離散パフ格子方程式とその3次元格子上の方程式やその行列拡張された方程式を導いている。 第5章では、多変数直交多項式の中でもRahmanが提唱した2変数Krawtchouk多項式が、ある三角型正方格子上のXX型のハミルトニアンを対角化することを明らかにし、それにより量子状態の転送を解析的に与えることに成功している。さらに、特定の条件下では、量子状態が原点から対角線上へ遷移することが確認され、完全状態遷移の拡張概念に相当するものを与えている。 第6章は、本論文のまとめである。前章までで得られた結果に対する考察と将来の展望を述べている。			

(論文審査の結果の要旨)

直交多項式の研究は19世紀末のスティルチェス積分に関する研究から始まり、連分数展開の理論と相互に影響しながら発展してきた理論である。現在では可積分系のみならずランダム行列や数値解析など幅広い分野で応用がなされている。多くの研究者により直交多項式の一般化が行われてきたが、いずれの一般化された直交多項式の理論も未だ発展途上の段階である。本論文は多重直交多項式などの一般化された直交多項式を取り上げ、スペクトル変換の理論を構築することで付随する可積分系の導出に成功し、量子可積分系や量子通信などへの応用を図り、以下の成果を得ている。

1. エルミート型パデ近似に関連する直交多項式系として導入された多重直交多項式に対して、連続的および離散的なスペクトル変換、すなわち同一のクラスの多項式系への変換公式を導出することで、付随する可積分系を導くことに成功している。これにより、代表的な可積分系である戸田格子方程式の一般化を与え、可積分系理論の手法である双線形化法を用いて厳密解の証明にも成功している。また、古典性を有する多重直交多項式の例として、多重Charlier多項式と多重Meixner多項式を取り上げ、対応するリー代数の表現論との関係を明らかにすることで、多項式系を特徴付ける重要な関係式を系統立てて導いている。

2. Degasperis-Procesi方程式の逆散乱問題に関連するパデ近似から導入されたコーシー双直交多項式、および直交条件を緩めることで得られる準直交多項式について、スペクトル変換の理論がそれぞれ考察されている。この中で、異なる直交性を有する2つの多項式系であるコーシー双直交多項式と準直交多項式が、同じ形式の離散スペクトル変換の公式を有していることを見出すことに成功している。

3. 歪対称内積に関する直交性を有する歪直交多項式について、離散的なスペクトル変換を導入することで、パフ格子方程式の離散類似を与えることに成功している。ここでは、歪直交多項式がパフィアン表示を持つことに着目し、代数的恒等式であるパフィアンの恒等式を利用することで、行列型離散パフ格子など新しい離散可積分系の導出手法を確立している。ランダム行列の理論において相関関数を計算する際に重要な核関数に関する歪直交多項式を用いた簡潔な表示も与えている。

4. Aomoto-Gelfand型一般化超幾何級数で記述されるRahman多項式と呼ばれる2変数Krawtchouk多項式について、対応する最隣接関係式を用いることで、ある三角型正方格子上のXX型スピンモデルとの関係を明らかにし、量子情報通信において重要な問題である量子状態の遷移について解析している。さらに、特定の条件下では、完全状態遷移の拡張概念に相当する概念を見出している。

以上、本論文は可積分系の理論を用いることで種々の一般化された直交多項式に対するスペクトル変換の理論を構築することで付随する可積分な方程式を導出し、さらに量子可積分系や量子状態転送のモデルの提案とその完全状態遷移に関する解析を与えており、直交多項式の研究のみならず、直交多項式系が関連する数理解物理学の発展に大きく寄与するものである。よって、本論文は博士(情報学)の学位論文として価値あるものと認める。また、平成24年8月3日に実施した論文内容とそれに関連した試問の結果合格と認めた。