

無限分解可能分布のモーメント

東京教育大 理 佐藤 健一

μ を 1 次元の無限分解可能分布, ν をその Lévy 測度とする.
お存かし,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\theta x} \mu(dx) = \exp \left[-\frac{\sigma^2}{2} \theta^2 + i a \theta + \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \left(e^{i\theta y} - 1 - \frac{i\theta y}{1+y^2} \right) \nu(dy) \right],$$

$$\int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \frac{y^2}{1+y^2} \nu(dy) < \infty$$

である. このとき次のことがいえる.

定理 『 $f(r)$ を $[0, \infty)$ で定義された $\mathbb{R}$ 非負の函数で, 任意の有限区間で有界, r が十分大きい所では凹かつ非減少とする.
あると

$$\int_{|y|>1} e^{f(|y|)} \nu(dy) < \infty$$

の時, かつその時に限って

$$\int_{\mathbb{R}} e^{f(|x|)} \mu(dx) < \infty$$

である. 』

証明は, Gauss 部分と原点の近くにおける Lévy 測度 ν 上の積分の収束発散には影響 (を $\sigma=0$ とをいう) 213, $\sigma=0$, $\alpha=0$, かつ ν が有限のときは複合 Poisson 分布 ν があることを用いるとできる. $f(r)$ の例として r^α ($0 \leq \alpha \leq 1$), r が十分大きい所では $(\log r)^\beta$, $(\log \log r)^\beta$ に等しい函数 ($\beta > 0$), などがある. 特別の場合として,

系 1. f を上と同じ条件をみたす函数, n を非負整数とする.

$$\int_{|y|>1} |y|^n f(|y|) \nu(dy) < \infty$$

の時, かつその時に限って

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^n f(|x|) \mu(dx) < \infty$$

がある.]

注 1. 定理において $f(|x|)$, $f(|y|)$ の代りに $|x|f(|x|)$, $|y|f(|y|)$ としても命題は, 正しく正しい. 実際, $\nu \equiv 0$ の場合を除けば必ず

$$(*) \quad \int_{\mathbb{R}} e^{|x|^{1+\alpha}} \mu(dx) = \infty, \quad \forall \alpha > 0$$

があることが知られる. したがって, μ が Gauss 分布 ($\nu \equiv 0$, $\sigma^2 > 0$) のときは (*) が成立せず (=

$$\int_{\mathbb{R}} e^{|x|^{1+\alpha}} \mu(dx) < \infty, \quad 0 < \forall \alpha < 1$$

であり, 更に

$$\int_{\mathbb{R}} e^{a|x|^2} \mu(dx) \begin{cases} < \infty \\ = \infty \end{cases} \quad \begin{matrix} (a < \frac{1}{2\sigma^2}) \\ (a \geq \frac{1}{2\sigma^2}) \end{matrix}$$

であることは明かである.

注2. 指数 α ($0 < \alpha < 2$) の安定分布あるいは準安定 (quasi-stable) 分布が $0 < \forall \beta < \alpha$ に対し β -次絶対エーメントをもち $\forall \beta \geq \alpha$ に対し β -次絶対エーメントをもたないことは, よく知られているが, ~~定理系~~ と Lévy 測度の形

$$\nu(dy) = \begin{cases} c_1 y^{-1-\alpha} dy, & y > 0 \\ c_2 (-y)^{-1-\alpha} dy, & y < 0 \end{cases}$$

(c_1, c_2 は非負定数で $c_1 + c_2 > 0$) が明かである.

注3. 1次元 transient 加法過程は1次絶対エーメントをもつか (type II transient), もたないか (type I transient) によって性質が違い, 1次元 recurrent 加法過程は2次エーメントをもつか (type II recurrent), もたないか (type I recurrent) によって著しく性質が異なるが, その分類は ~~定理系~~ により Lévy 測度で述べられる.

注4. 清水良一氏は, ~~定理系~~ ^{上の系において} $rf(r) = r^\alpha$ (α は正の実数) の場合が既に次の論文で証明されているという.

と表示するに:

B. Ramachandran, On characteristic functions and moments,
Sankhyā, Ser. A, Vol. 31 (1969), 1-12.