

拡散過程の Onsager-Machlup 関数について

京大 理

小谷 真一

藤田 岳彦

§1 序

Brown 運動は、経路積分を用いて形式的に

$$N \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^T |\dot{p}(t)|^2 dt\right) \mathcal{D}p \quad (N \text{ は normalization const.})$$

と表わされる。ここで、上式の $\exp(-\frac{1}{2} \int_0^T |\dot{p}(t)|^2 dt)$ を 仮想的な path space 上の uniform measure に対する density と思うと

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\int_{C_\epsilon^e} \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^T |\dot{p}(t)|^2 dt\right) \mathcal{D}p}{\int_{C_\epsilon^e} \mathcal{D}p} = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^T |\dot{p}(t)|^2 dt\right) \quad (0.1)$$

$$(C_\epsilon^e = \{p \mid \sup_{0 \leq t \leq T} |p(t) - p_0(t)| \leq \epsilon\})$$

なる式を考えたくなるが、勿論左辺の分母は定義されていない。しかし、 $\mathcal{D}p$ の一様性から想像すれば、

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\int_{C_\epsilon^e} \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^T |\dot{p}(t)|^2 dt\right) \mathcal{D}p}{\int_{C_\epsilon^e} \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^T |\dot{p}(t)|^2 dt\right) \mathcal{D}p} &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\int_{C_\epsilon^e} \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^T |\dot{p}(t)|^2 dt\right) \mathcal{D}p / \int_{C_\epsilon^e} \mathcal{D}p}{\int_{C_\epsilon^e} \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^T |\dot{p}(t)|^2 dt\right) \mathcal{D}p / \int_{C_\epsilon^e} \mathcal{D}p} \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^T |\dot{p}(t)|^2 dt\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^T |\dot{p}(t)|^2 dt\right)} \quad (0.2) \end{aligned}$$

なる式が (0.1) を表わしていると考えることが出来る。

つまり、この問題は、path のまわりの ϵ 近傍の滞在確率の

評価に帰着される。実際、以上のような考え方で、Stratonovich

([7]) は、1-dim diffusion process の probability density functional (Onsager Machlup function)

を求めている。しかし、一般の多次元拡散過程において、この問題を考察すると、(0.2)の左辺の極限が存在しない([3])のでこのままではうまくいかない。そこで拡散過程を幾何学的に捉えることが必要となってくる。つまり、拡散係数 $g^{ij}(x)$ を空間の歪みと解釈するのである。以上のことをふまえて問題を次のように設定し、一般の多次元拡散過程の Onsager-Machlup 関数を得たことを報告する。なお、この報告は、高橋氏による予想([9])を肯定的に解決したものであり、[10]においても確率論的方法で同じ定理が得られている。なお数学への応用に関しては、[1]物理への応用に関しては [2],[4],[6]などを参照されたい。

§2 得られた定理

M を滑らかな d -dim Riemannian Manifold, $\rho(x, y)$ を M の Riemannian 距離性 $(X_t, P_q)_{q \in M}$ を the minimal diffusion processes with generator $\frac{1}{2}\Delta_M + b$ (Δ_M : the Laplace Beltrami operator on M , b : a smooth vector field on M)

$\Phi = (\Phi_t)_{0 \leq t \leq T}$: a smooth curve on M starting at $\Phi(0) = q$
 として、次の滞在確率

$$\mu_\varepsilon^q(\varphi) = P_q \left\{ \omega \mid \rho(X_t(\omega), \varphi_t) \leq \varepsilon \text{ for all } 0 \leq t \leq T \right\}$$

を $\varepsilon \downarrow 0$ で漸近評価することを考える。

なお、定理の中の L が Onsager-Machlup 関数と呼ばれているものである。

定理

$$\mu_\varepsilon^q(\varphi) = f_1(0) \int f_1(x) dx \exp\left(-\frac{\lambda T}{\varepsilon^2} + \int_0^T L(\varphi_t, \dot{\varphi}_t) dt + o(1)\right) \quad (\varepsilon \downarrow 0)$$

ここで、 L は接バンドル TM 上の関数で、

$$L(p, v) \equiv -\frac{1}{2} \|v - b(p)\|_p^2 - \frac{1}{2} \operatorname{div}(b)(p) + \frac{1}{12} R(p)$$

$\|\cdot\|_p$ は、the Riemannian norm in $T_p(M)$, $\operatorname{div}(b)(p)$ は、the divergence of b at P , $R(p)$ は、the scalar curvature at P である。

また、 $\{\lambda_1, f_1\}$ は、次の固有値問題の解とする。

$$\frac{1}{2} \Delta_g f + \lambda f = 0 \quad \text{in } \{|x| < 1\} \quad f = 0 \quad \text{on } \{|x| = 1\}$$

つまり、 λ_1 は最小固有値、 f_1 は対応する正規化された固有関数とする。

§3. 証明のための準備

$q \in M$ を中心とする正規座標とは、 q に十分近い p に対して

$$p = \operatorname{EXP}(q, x^i e_i) \quad (e_i \text{ はある正規直交系 at } T_q(M)) \quad \text{となる}$$

$(x^1, x^2, \dots, x^d)$ とする。ここで、 $\operatorname{EXP}(q, X)$ ($X \in T_q(M)$) は

指数写像と呼ばれるもので、 $t \mapsto \operatorname{EXP}(q, tX)$ が $C(0) = q$,

$\dot{C}(0) = X$ なる測地線を表わすものである。

Lemma 3.1 (E. Cartan) (図参照)

q を中心とする正規座標においては、次の展開式が成立する。

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij} + \frac{1}{3} R_{ikjl}(q) x^k x^l + O(|x|^3)$$

$$\Gamma_{ij}^k(p) = \frac{1}{3} \{ R_{iklj}(q) x^l + R_{klij}(q) x^l \} + O(|x|^2) //$$

ここで、曲線に沿った正規座標というものを導入する。

ϕ は 定理中における曲線として、

$$\Phi(t, (x, \dots, x^d)) \equiv (t, \text{EXP}(\phi(t), x^k e_k(t))) \text{ とする。}$$

ただし、 $e_k(t)$ は $e_k(0)$ (ある $T_{p_0}(M)$ における正規直交系) の曲線 ϕ に沿う平行移動とする。すると、 Φ は、 $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ における $(t, 0)_{0 \leq t \leq T}$ のある近傍 U から、 $[0, T] \times M$ における $(t, \phi(t))_{0 \leq t \leq T}$ のある近傍 V への微分同相写像となっている。すると、 t を固定すれば、 $\Phi(t, \cdot)$ は $\phi(t)$ を中心とする正規座標なので、この座標でみた b の成分、metric tensor, Christoffel symbol などそれぞれ $b^i(t, x)$, $g^{ij}(t, x)$, $\Gamma_{ij}^k(t, x)$ などと表わすことにする。また、微分作用素 ∂ を Φ で U 上の微分作用素に写したものを $\hat{\partial}$ と書くことにする。つまり、

$$\hat{\partial} f(t, x) \equiv \partial(f \circ \Phi^{-1})(\Phi(t, x))$$

ここで、 $\hat{b}$, $\hat{\Delta}_M$, $(\frac{\hat{\partial}}{\partial t})$ を計算しておく。

Lemma 3.2.

$$\begin{aligned} \hat{b} &= b^i(t, x) \frac{\partial}{\partial x^i} \\ \hat{\Delta}_M &= g^{ij}(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} - g^{ij}(t, x) \Gamma_{ij}^k(t, x) \frac{\partial}{\partial x^k} \\ (\frac{\hat{\partial}}{\partial t}) &= \frac{\partial}{\partial t} - (\dot{\phi}^i(t) + e^i(t, x)) \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

ここで, $\dot{\phi}(t) = \lim_{u \rightarrow t} \frac{\phi(u) - \phi(t)}{u - t}$ ($\phi(u)$ は $\phi(u)$ の座標 $\Phi(t, \cdot)$ でみたときの成分)

また, $E^i(t, \alpha)$ は, $\max_{0 \leq t \leq T} |E^i(t, \alpha)| = O(|\alpha|^2)$, $\max_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{\partial}{\partial \alpha^i} E^i(t, \alpha) \right| = O(|\alpha|)$ を満たす関数である。

証明.

簡単であるので省略する。(C1参照)

§3. 定理の証明

11 項. space-time process (t, X_t) を考える。すると, その generator は, $\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta_M + b$ である。

$0 \equiv \inf \{t \geq 0 : (t, X_t) \notin U\}$, $(t_0, \hat{X}_{t_0}) \equiv \Phi^1(t_0, X_{t_0})$ とする。

すると, Lemma 3.2 により, $\hat{X}_t$ の local generator は,

$$\frac{1}{2} g^{ij}(t, \alpha) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^i \partial \alpha^j} + \hat{b}^i(t, \alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha^i} \quad \text{である。}$$

(ただし, $\hat{b}^i(t, \alpha) = b^i(t, \alpha) - \frac{1}{2} g^{ij}(t, \alpha) \Gamma_{ij}^k(t, \alpha) - \dot{\phi}^k(t) + E^k(t, \alpha)$)

$\Psi(\alpha) \equiv \text{EXP}(\phi(0), \alpha^i e_i(0))$, $U_\epsilon(\alpha) \equiv P_{\Psi(\alpha)} \{ \omega \mid P(X_t(\omega), t) \leq \epsilon, \text{ for all } 0 \leq t \leq T \}$

とおくと, 正規座標の基本的な性質 $P(q, \text{EXP}(q, X)) = |X|_q$ より,

$$U_\epsilon(\alpha) = \tilde{P}_{0, \alpha} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |\hat{X}_t| \leq \epsilon \right\} \quad (\tilde{P}_{0, \alpha} \text{は } \hat{X}_t \text{ の } (0, T) \times \mathbb{R}^n \text{ での分布で, } t=0 \text{ のとき } \alpha \text{ を出発するもの}) \text{ となる。}$$

つまり, $U_\epsilon(\alpha)$ の評価を求めたいのであるが, 重で変換すれば地球の中の滞在確率の評価となり, 偏微分方程式との対応により, 計算ができるというわけである。

$U_0^\varepsilon(t, \alpha)$ を 次の初期値—境界値問題の一意的な解とする。

$$\frac{\partial U_0^\varepsilon}{\partial t} = \left\{ \frac{1}{2} g^{ij}(T-t, \alpha) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \hat{b}^i(T-t, \alpha) \frac{\partial}{\partial x^i} \right\} U_0^\varepsilon \quad \text{on } [0, T] \times \{\alpha \leq \varepsilon\}$$

$$U_0^\varepsilon(t, \cdot)|_{\partial D} = 0, \quad U_0^\varepsilon(0, \alpha) = 1 \quad \text{for } \{\alpha \leq \varepsilon\}$$

すると、よく知られているように、 $U_\varepsilon(\alpha) = U_0^\varepsilon(T, \alpha)$ である。

つまり、定理を得るためには、

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \exp\left(-\frac{\lambda T}{\varepsilon^2}\right) U_0^\varepsilon(T, 0) = f_1(0) \int f_1(\alpha) d\alpha \exp\left[\int_0^T L(\varphi_t, \dot{\varphi}_t) dt\right]$$

を示せばよい。

そこで、さらにスケールの変換を行なう。また、ドリフト部分の特異性を考慮に入れて、次の U_1 を考える。

$$U_1^\varepsilon(t, \alpha) = U_0^\varepsilon(t, \varepsilon \alpha) \exp\left\{ \frac{\lambda T}{\varepsilon^2} + \varepsilon \sum_{k=1}^d \hat{b}^k(T-t, 0) \varepsilon^k \right\}$$

とおくと、 U_1^ε は次の方程式の一意的な解であることがわかる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1^\varepsilon}{\partial t} = & \frac{1}{2\varepsilon^2} g^{ij}(T-t, \varepsilon \alpha) \frac{\partial^2 U_1^\varepsilon}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \hat{b}^i(T-t, \varepsilon \alpha) - g^{ij}(T-t, \varepsilon \alpha) \hat{b}^j(T-t, 0) \right. \\ & \left. \frac{\partial U_1^\varepsilon}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \left\{ g^{ij}(T-t, \varepsilon \alpha) \hat{b}^i(T-t, 0) \hat{b}^j(T-t, 0) - \delta_{ij} \hat{b}^i(T-t, 0) \hat{b}^j(T-t, \varepsilon \alpha) \right\} \right. \\ & \left. - \varepsilon \sum_{k=1}^d \frac{\partial \hat{b}^k}{\partial t}(T-t, 0) \alpha^k + \frac{\lambda}{\varepsilon^2} \right\} U_1^\varepsilon \quad \text{on } [0, T] \times D \end{aligned}$$

$$U_1^\varepsilon|_{\partial D} = 0, \quad U_1^\varepsilon(0, \alpha) = \exp\left\{ \varepsilon \sum_{k=1}^d \hat{b}^k(T-t, 0) \alpha^k \right\} \quad \text{on } D$$

すると、

$$M_\varepsilon^q(\varphi) = U_\varepsilon(0) = U_1^\varepsilon(T, 0) \exp\left(-\frac{\lambda T}{\varepsilon^2}\right) \quad \text{である。}$$

つまり、定理を証明するためには、 $U_1^\varepsilon(T, 0)$ が、 $\varepsilon \downarrow 0$ で

$$f_1(0) \int_D f_1(\alpha) d\alpha \cdot \exp\left[\int_0^T L(\varphi_t, \dot{\varphi}_t) dt\right] \text{ に収束することを示せばよい}$$

とわかる。

u_1^e は、上記の偏微分方程式を満たしているが、それを次の方程式からの perturbation と見なした。

$$\frac{\partial u_2^e}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{2} \Delta_{\mathbb{R}^d} + \lambda_1 \right) u_2^e \quad \text{on } [0, T] \times D$$

$$u_2^e|_{\partial D} = 0, \quad u_2^e(0, x) = \exp \left\{ \varepsilon \sum_{k=1}^d \hat{b}^k(T, 0) x^k \right\}$$

すると、

$$\frac{\partial u_1^e}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{2} \Delta + \lambda_1 \right) u_1^e + \left\{ L^{t, \varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{2} \Delta + \lambda_1 \right) \right\} u_1^e$$

($L^{t, \varepsilon}$ は u_1^e の方程式の右辺の微分作用素) と変形すると
により、

$$u_1^e(t, x) - u_2^e(t, x) = \int_0^t \int_D \hat{p}\left(\frac{t-s}{\varepsilon^2}, x, y\right) \underbrace{\left\{ L^{s, \varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{2} \Delta_{\mathbb{R}^d} + \lambda_1 \right) \right\} u_1^e(s, y)}_{\rightarrow 2^{s, \varepsilon} \text{ とおく}} dy ds$$

ただし、 $\hat{p}(t, x, y) = \exp(\lambda_1 t) p(t, x, y)$ 。そして、 $p(t, x, y)$ は

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u$ on D , $u|_{\partial D} = 0$ の基本解とする。

そこで、 $\varepsilon \downarrow 0$ とすれば、 $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} u_2^e(t, x) = \int_0^t f_1(s) ds + f_1(x)$ (固有関数展開を使えば、すぐにわかる)

$$\text{また, } \hat{p}\left(\frac{t-s}{\varepsilon^2}, x, y\right) = f_1(x) + f_1(y) + \sum_{k=2}^{\infty} \exp\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_k}{\varepsilon^2}(t-s)\right) f_k(x) f_k(y)$$

$$\text{Lemma 3.1 (I)} \quad \sum \hat{b}^k = \left(-\frac{1}{6} R_{ikie}(T, 0) x^i x^e + o(\varepsilon) \right) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^e} + \left(\frac{\partial \hat{b}^1}{\partial x^j}(T, 0) x^j + o(\varepsilon) \right) \frac{\partial}{\partial x^1} \\ + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \hat{b}^k(T, 0)^2 + o(\varepsilon)$$

また、わかるから、 $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} u_1^e(t, x) (= u_1(t, x))$ の存在もわかる。

(詳しくは、[1] 参照)

すると、 $u_1(t, x)$ は次の方程式を満たす。

$$\begin{aligned}
 u_i(t, x) - C f_i(x) &= \int_0^t \int_D f_i(x) f_i(y) \sum^{s_0} u_i(s, y) dy ds \\
 \text{ここで, } C &= \int_D f_i(x) dy \\
 \sum^{s_0} &= -\frac{1}{6} R_{ikjl}(\tau-s, 0) y^k y^l \frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j} + \frac{\partial b^i}{\partial x^j}(\tau-s, 0) y^j \frac{\partial}{\partial y^i} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \hat{b}^k(\tau-s, 0)^2
 \end{aligned}$$

すると, $u_i(t, x) = C(t) f_i(x)$ とおけるから,

$C(t) - C = \int_0^t C(\tau-s) \int_D f_i(x) \sum^{s_0} f_i(x) dy ds$ が成立する。ここで, 上式の右辺を計算した。まず, 次式が成り立つ

$$\begin{aligned}
 \int_D y^i f_i(x) \frac{\partial f_i(x)}{\partial y^j} dy &= -\frac{1}{2} \delta_{ij} \\
 \int_D y^k y^l f_i(x) \frac{\partial^2 f_i(x)}{\partial y^i \partial y^j} dy &= \frac{1}{2} (\delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{kj}) + A^{ijkl} \\
 (A^{ijkl} \text{ は } (i, j, k, l) \text{ の置換に対して不変})
 \end{aligned}$$

第1式は, 部分積分と $f_i|_{\partial D} = 0$ からすぐ出る。また, 同様に 第2式 $= -\int_D y^k y^l \frac{\partial f_i(x)}{\partial y^i} \frac{\partial f_i(x)}{\partial y^j} dy + \frac{1}{2} (\delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{kj})$ かわかる。ここで, f_i は回転不変だから, $f_i(x) = f_i(r)$ ($r = |x|$) とおくと,

$$\begin{aligned}
 \int_D y^k y^l \frac{\partial f_i(x)}{\partial y^i} \frac{\partial f_i(x)}{\partial y^j} dy &= \int_D y^k y^l f_i(r) \frac{y^i}{r} f_i'(r) \frac{y^j}{r} dy \\
 &= \text{constant} \times \int_0^1 r^{d+1} (f_i'(r))^2 dr \int_{\partial D} \theta^i \theta^j \theta^k \theta^l d\theta \quad (y^i = r\theta^i)
 \end{aligned}$$

となり, 第2式が得られた。

まず, 2階微分の項を計算すると,

$$\begin{aligned}
 &-\frac{1}{6} R_{ikjl}(\tau-s, 0) \int_D y^k y^l f_i(x) \frac{\partial^2 f_i(x)}{\partial y^i \partial y^j} dy \\
 &= -\frac{1}{6} R_{ikjl}(\tau-s, 0) \left\{ \frac{1}{2} (\delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{kj}) + A^{ijkl} \right\} \\
 &= -\frac{1}{12} R(\phi(\tau-s)) \quad (\text{ここで, } R = R_{ikjl} g^{ik} g^{jl} (= R_{ikjl} \delta^{ik} \delta^{jl} \text{ の場合}))
 \end{aligned}$$

と $R_{ikjl} = -R_{jikl}$, A^{ijkl} の対称性を使った。)

次に1階微分の項を計算する。

$$\frac{\partial \hat{b}^i}{\partial x^j}(t, 0) = \frac{\partial b^i}{\partial x^j}(t, 0) - \frac{1}{6} \{ R_{kij}(t) \delta^{kj} + R_{iklu} \delta^{lu} \} \delta^{ij}$$

$$\begin{aligned} \text{より, } \frac{\partial \hat{b}^i}{\partial x^j}(T-s, 0) & \cdot \int_D y^i f(y) \frac{\partial f(y)}{\partial y^j} dy \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{div}(b)(\phi(T-s)) + \frac{1}{6} R(\phi(T-s)) \end{aligned}$$

最後に, $\hat{b}^k(t, 0) = b^k(t, 0) - \dot{\phi}^k(t)$ である。0階の項は,

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^d \hat{b}^k(T-s, 0)^2 \int_D f(y)^2 dy \\ &= -\frac{1}{2} |b(\phi(T-s)) - \dot{\phi}(T-s)|_{\phi(T-s)}^2 \end{aligned}$$

これより, $C(T)$ を求めると,

$$C(T) = C \exp \left\{ \int_0^T \left[-\frac{1}{2} |b(\phi(s)) - \dot{\phi}(s)|_{\phi(s)}^2 - \frac{1}{2} \operatorname{div}(b)(\phi(s)) + \frac{1}{6} R(\phi(s)) \right] ds \right\}$$

となり, 定理の証明が終った。 //

§4. 附記

Mckean-Singer ([5]) は, Compact Riemannian Manifold 上の熱方程式 $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta + b$ の基本解の $t \downarrow 0$ における評価を次のように求めている。

$$(2\pi t)^{\frac{d}{2}} p(t, x, x) = 1 + R_1 t + R_2 t^2 + \dots$$

$$R_1 = -\frac{1}{2} |b|^2 - \frac{1}{2} \operatorname{div} b + \frac{1}{12} R, R_2 = \dots$$

これにおいて, $p(t, \phi(t), \phi(t+\delta t))$ を考えると, 定理のような結果が得られることは, 自然に予想できる。そこで, もっと詳しい評価をすれば, R_2, R_3 などの係数が, ε による漸近展開の係数と一致するのではないかと思われるが, まだ証明はできない。というのは, この問題は, 結局, 最小固有

値 $\lambda_1(\varepsilon)$ の漸近展開の 1 次の項まで求めたことになっている。

つまり、時間を含まない場合の摂動問題で説明すれば、

$A(\varepsilon) = A + \varepsilon A_1$, $A(\varepsilon) f_1^e = \lambda_1(\varepsilon) f_1^e$ なる固有値問題を考えて、

$$\lambda_1(\varepsilon) = \lambda_1 + \varepsilon \lambda_1' + \varepsilon^2 \lambda_1'' + \dots, \quad \lambda_1' = (A f_1, f_1), \quad \lambda_1'' = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|(A f_k, f_1)|^2}{\lambda_1 - \lambda_k} \dots$$

なる摂動公式を得るが、 $\lambda_1' = (A f_1, f_1)$ が、定理の証明の (C) に

に当るものである。すると、さらに詳しい展開を求めようと

すれば、 $\lambda_1'' = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|(A f_k, f_1)|^2}{\lambda_1 - \lambda_k}$ を見れば、 f_1 以外の固有関数の計算も必要となり、回転不変性などが使えないので、計算不能となるようである。

文献

- [1] T. Fujita and J. Kotani : The Onsager-Machlup function for diffusion processes, J. math. Kyoto Univ. 1981, to appear
- [2] R. Graham : Lagrangean for Diffusion in Curved Phase Space, Phys. Rev. Lett 38. (1977)
- [3] N. Ikeda and J. Watanabe : Stochastic differential equations and diffusion processes, Kodansha, to appear.
- [4] H. Ito : A Characterization of the Detailed Balance from a Viewpoint of the Onsager-Machlup Theory, to appear
- [5] H. P. McKean and I. M. Singer : Curvature and the Eigenvalue of the Laplacian, J. of Diff. Geom, 1, 1967, P43-P69.

- [6] L. Onsager and S. Machlup ; Fluctuation and irreversible processes, I, II, Phys. Rev. 91 (1953) P1505-P1512 P1512-P1515
- [7] R.L. Stratonovich ; On the probability functional of diffusion processes, Select. in Math. Stat. Prob 10 (1971) P273-P286
- [8] M. Spivak ; A comprehensive introduction to differential geometry, Brandeis University, 1970.
- [9] 高橋陽一郎 ; 拡散過程における most probable paths, 数理科学講究録 367, 確率過程論と開放系の統計力学, 1979
- [10] Y. Takahashi and S. Watanabe ; The Probability functionals (Onsager-Machlup functions) of diffusion processes, Proc. LMS Symp. on Stochastic Integrals at Durham, 1980, to appear.