

KASPAROV 群について

阪大基礎工 市原 亮 (Ryo Ichihara)

0. 準備と記号 G.G. Kasparov [4] によって、 C^* -環の代数的 K -理論と C^* -環の拡大の理論の統一である両変関手の " KK -Group " が定義された。ここで C^* -環の拡大とは Brown-Douglas-Fillmore [1] によって与えられた可換 C^* -環 $C(X)$ に対して短完全列 $0 \rightarrow K \rightarrow D \rightarrow C(X) \rightarrow 0$ の全体の同値類から得られる K -homology から発展して、一般に可分 C^* -環に対しても同様に、短完全列の全体から得られる理論である。すなわち、2つの C^* -環 A, B に対して、 $KK^*(A, B)$ という添字付きの可換群が対応して、 A に対して反変、 B に対して共変の関手である。 X を可分局所コンパクト空間のとき、

$$KK^*(\mathbb{C}, C_0(X)) \cong K^*(X) \quad \text{コンパクト台 } K\text{-理論}$$

$$KK^*(C_0(X), \mathbb{C}) \cong \mathcal{K}_*(X) \quad \text{一般ステーンロッドホモロジー}$$

更に、 $KK^*(\mathbb{C}, B) \cong K_*(B) \quad \text{代数的 } K\text{-理論}$

$$KK^*(A, \mathbb{C}) \cong \text{Ext}^*(A) \quad \text{拡大群, if } A: \text{核型}$$

ここで、何故 C^* -環を用いるのか、Banach 環を用いないのかという疑問が浮ぶが、次の例を見ることによって理解できる。実数 $\mathbb{R}$ も可換位相群と見てその L^1 代数（積はコンヴォリューション）はその C^* -ノルム閉包 $C_0(\hat{\mathbb{R}}) \cong C_0(\mathbb{R})$ の稠密部分環で、関数計算の閉性についての障害があって、代表元の取り方の計算に一考必要になる。 C^* -環はこれに用いていることから、非常に便利である。

最初に、KK-理論の定義を述べるが、その考え方の中心は Fredholm 作用素の理論とその拡張である。このことを意識して進んで行く。

記号

◦ A, B, D, E : 可分 C^* -環

K : 可算無限次元 Hilbert 空間上のコンパクト作用素全体から成る C^* -環

◦ $C_{p,q}$: クリフォード環 $/\mathbb{C}$ 、符号が p, q .

更に、 $C_{p,q}$ は外積代数 $\wedge \mathbb{C}^{p+q}$ 上に表現を持つ有限次元 C^* -環で

$$C_{p,q} \cong \begin{cases} M_{2^{\frac{p+q}{2}}} & p+q : \text{even} \\ M_{2^{\frac{p+q-1}{2}}} \otimes \mathbb{C}^2 & p+q : \text{odd} \end{cases}$$

のような構造を持っている。

$C_{p,q}$ の符号 $C_{p,q}$ は C^{p+q} を部分線形空間として持ち C^{p+q} の基底が $C_{p,q}$ の生成元となる。これらの生成元の偶数個の積の和として表される元 x を偶といい、 $\deg x = 0$ 、奇数個の積の和として表される元 y を奇といい、 $\deg y = 1$ と定める。

。 $M(B)$: C^* -環 B の multiplier 環を表す。

ここでこの環は次の性質を持つ。もし、 C^* -環 B があるヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上に忠実に表現されているとき、すなわち、 $B \hookrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ のとき、 $M(B) = \{ x \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid xB, Bx \subset B \}$ 。別の言葉で言えば、 $M(B)$ は B の $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ での idealizer である。上で注意すべきことは、表現空間が異っても $M(B)$ は同型である。

。 $B(X)$: 局所コンパクト-ハウスドルフ空間 X 上の C^* -環 B 値を持ち無限遠点で消える連続関数全体の成す C^* -環、

特に I を単位区間とすると、 $B(I)$ など。

1 KK 群の定義

$p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 添字に対して、 $K_{p,q}(A, B)$ を定義しよう。

先ず、構成元全体は

$$\mathcal{E}_{p,q}(A,B) = \left\{ (\varphi, F); \varphi: A \otimes C_{p+1,q} \rightarrow M(B \otimes K) \text{ }^{\ast}\text{-homo}, F \in M(B \otimes K) \right\} \\ \text{with } (*)$$

$$(*) \begin{cases} (1) \quad \varphi(a)F \sim (-1)^{\deg a} F \varphi(a) \\ (2) \quad (F^2 - 1) \varphi(a) \sim 0 \\ (3) \quad (F - F^*) \varphi(a) \sim 0 \end{cases} \quad \forall a \in A \otimes C_{p+1,q}$$

(こゝで $T_1 \sim T_2 \Leftrightarrow T_1 \in T_2 + B \otimes K$ を表わす。)

次に、0元となるもの全体 (degenerate element) は、

$$\mathcal{D}_{p,q}(A,B) = \left\{ (\varphi, F); (\varphi, F) \in \mathcal{E}_{p,q}(A,B) \text{ with } (*)_0 \right\}$$

$$(*)_0 \begin{cases} (1)_0. \quad \varphi(a)F = (-1)^{\deg a} F \varphi(a). \\ (2)_0. \quad (F^2 - 1) \varphi(a) = 0 \\ (3)_0. \quad (F - F^*) \varphi(a) = 0 \end{cases} \quad \forall a \in A \otimes C_{p+1,q}$$

ホモトピー-同値

$(\varphi_0, F_0) \equiv (\varphi_1, F_1)$; ホモトピー-同値

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists (\{\varphi_t\}, \{F_t\}) \in \mathcal{E}_{p,q}(A, B([0,1])) \quad t \in [0,1]$$

$t=0,1$ のとき、それぞれ $(\varphi_0, F_0), (\varphi_1, F_1)$ と一致している。

$$\overline{\mathcal{E}}_{p,q} = \mathcal{E}_{p,q} / \equiv, \quad \overline{\mathcal{D}}_{p,q} = \mathcal{D}_{p,q} / \equiv \quad (\mathcal{E}_{p,q} \text{ 内での } \mathcal{D}_{p,q} \text{ の同値類})$$

和

$$[(\varphi_1, F_1)] + [(\varphi_2, F_2)] \stackrel{\text{def}}{=} [(\varphi_1 \oplus \varphi_2, F_1 \oplus F_2)] \quad [] \text{ は同値類}$$

well-defined は $B \otimes K \oplus B \otimes K \subset B \otimes K \otimes M_2$ よりいえる。

この K の性質より和が定義できる。

$$K_{p,g} K(A,B) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{E}}_{p,g}(A,B) / \overline{\mathcal{D}}_{p,g}(A,B).$$

定理 1 $K_{p,g} K(A,B)$ は可換群である。

$\therefore$ (φ, F) に対して

$$(\overline{\varphi})(a) = (-1)^{\deg a} \varphi(a) \quad \forall a \in A \otimes C_{p+1,g}$$

$\overline{\varphi}$ も $*$ -homo で。

$$(\varphi, F) + (\overline{\varphi}, -F) = (\varphi \oplus \overline{\varphi}, F \oplus (-F)) \in \overline{\mathcal{D}}_{p,g}.$$

実際 $\begin{pmatrix} F & \\ & -F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$ by ホルトル - $F_\theta = \begin{pmatrix} F \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -F \cos \theta \end{pmatrix}$

$$\varphi_\theta = \varphi \oplus \overline{\varphi} \quad \text{とするととき.}$$

$$1) \quad \varphi_\theta(a) F_\theta - (-1)^{\deg a} F_\theta \varphi_\theta(a)$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} [\varphi_\theta(a), F_\theta] \quad (\text{general commutator})$$

$$= \begin{pmatrix} [\varphi_\theta(a), F] \cos \theta & 0 \\ 0 & [\varphi_\theta(a), F] \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$2) \quad F_\theta^2 - 1 = \begin{pmatrix} (F^2 - 1) \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & (F^2 - 1) \cos^2 \theta \end{pmatrix}$$

$$3) \quad F_\theta - F_\theta^* = \begin{pmatrix} (F - F^*) \cos \theta & 0 \\ 0 & -(F - F^*) \cos \theta \end{pmatrix}$$

明らか 12. $(\varphi_{\frac{\pi}{2}}, F_{\frac{\pi}{2}}) \in \mathcal{D}_{p,g}.$

g. e. d.

定理 2 (stable 同値) H : 可分ヒルベルト空間

$$KK(A \otimes K(H), B) \cong KK(A, B \otimes K(H)) \cong KK(A, B)$$

(1) 第2の同値は $\{B \otimes K(H)\} \otimes K \cong B \otimes K$

第1の同値は $K(H)$ の1次元射影子の一つを P とすると

$$\varphi|_{A \otimes P} \text{ で 類は決まる。} \quad \text{g.e.d.}$$

定理 3 (形式的 Bott 周期性)

$$K_{p,q}K(A, B) \cong K_{p-q}K(A, B) \quad p-q \text{ の mod 2 で同型が従う。}$$

(1) 定理 2 と クリフォード環の構造定理より従う。 g.e.d.

注意 KK -群の代表元として、(1), (2), (3) をみたすものは、理論上考えた方がよいが、また、応用面でもそのような例がでてくるが、計算のつごう上少し条件を強くした形で代表元を取るとよい。

$A \ni 1$ のとき、(2), (3), (2)', (3)' の条件は次のような (2)', (3)' と見ることが出来る。

$$(2)' (F^2 - 1) \varphi(1) \sim 0 \quad (3)' (F - F^*) \varphi(1) \sim 0$$

$$(2)'_0 (F^2 - 1) \varphi(1) = 0 \quad (3)'_0 (F - F^*) \varphi(1) = 0$$

Connes [3] によって、 $\mathcal{E}_{p,q} \ni (\varphi, F)$ に対して $(\varphi', F') \in \mathcal{E}_{p,q}$ があって、(1), (2)', (3)' をみたし、 $[(\varphi, F)] = [(\varphi', F')]$ となる。そして、もう少し強いことかいて、 F を self adjoint ユニタリ

に取れる。つまり、 $[\varphi(a), F] \sim 0$ となる self-adjoint unitary F と見ることが出来る。ところが (1) を (1)₀ にすることが大変難しい。

通常、KK-理論ではどういった代表元をあたかうのかというと、定理 3 より小さい p, q について考察してみよう。

$$p = q = 0 \text{ のとき, } C_{1,0} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}e_0 \quad (e_0^2 = 1, e_0^* = e_0)$$

$$\varphi(e_0) = P_1 - P_{-1} \quad P_1, P_{-1} \text{ は projection}$$

(1) の条件より、 $1 = P_1 + P_{-1}$ の分解に対して

$$F \sim \begin{pmatrix} 0 & P \\ Q & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & P \\ P^* & 0 \end{pmatrix} \quad (3.81)$$

$$(2) \text{ より, } 1 - P^*P \sim 0, 1 - PP^* \sim 0$$

P は広義フレドホルム作用素 (P_{-1} から P_1 への) となる。

$$P \xleftrightarrow{1:1} F$$

次に $p = 1, q = 0$ のとき $C_{2,0} = M_2$ 更に、生成元が

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, e_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ より, 条件式から}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & iP \\ iP & 0 \end{pmatrix} \quad P^2 - 1 = P^*P = 0 \quad [\varphi(a), P] \sim 0 \quad \forall a \in A$$

$$E = \frac{P+1}{2} \quad \text{で} \quad [\varphi(a), E] \sim 0$$

つまり、表現 φ と $K \otimes B$ を法として可換な射影子 E と見ることが出来る。

以上で定義より、代表元 (φ, F) はどのような形になるかを演繹してきたが、実際、あたかう元は上の形よりさらに簡単なものである。以下、それをかく。

$n \in \mathbb{N}$ に対し $\mathbb{Z}$.

$$\varphi_0: A \rightarrow M_n(B) \text{ } *\text{-homo} \quad \varphi_1: A \rightarrow M_n(B) \text{ } *\text{-homo.}$$

が与えられたとき.

$$\varphi(a \otimes e_0^n) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \varphi_0(a) & 0 \\ 0 & (-1)^n \varphi_1(a) \end{pmatrix}, \quad F = 0$$

$$(\varphi, 0) \in \mathcal{E}_{0,0}(A, B)$$

ここで、注意するのは $\varphi_i (i=0,1)$ が degenerate してもし
いてこそで、もし $A = \mathbb{C}$ のとき、 $[\varphi_0(1)] - [\varphi_1(1)] \in K_0(B)$
となる元に対応する。

$K_0 K(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = \mathbb{Z}$ の 1 に対応する元の構成は

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(e_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad F = 0.$$

$c_1 = [(\varphi, F)]$ が生成元である。

2. Intersection Product.

KK -群の間の同型問題や新しい元の構成などに利用される
pairing であり、Intersection product が Kasparov [] によ
って定義された。

$$K_p K(A_1, B_1 \otimes D) \otimes_D K_q K(D \otimes A_2, B_2)$$

$$\longrightarrow K_{p+q} K(A_1 \otimes A_2, B_1 \otimes B_2)$$

($\otimes$ は spacial tensor product. 注, C^* -環の tensor product
はたくさん存在する。)

$D = \mathbb{C}$ のとき、tensor product であり、

$B_1 = A_2 = \mathbb{C}$ のとき、合成である積である。

定義から述べればよいが、非常に複雑で元の形を作るまでに
長いから、詳細は Kasparov [4] を見てもうのことにしてここ
では、重要な性質を挙げておく。

$$1) (x \otimes_D y) \otimes_E z = x \otimes_D (y \otimes_E z) \quad (\text{associative law})$$

$$2) x \otimes C_1 = C_1 \otimes x = x$$

$f: A_1 \rightarrow A_2 \quad g: B_1 \rightarrow B_2 \quad *$ -homo. に對して

$$f^*: K_*(A_2, B_1) \rightarrow K_*(A_1, B_1)$$

$$[(\varphi, F)] \mapsto [(\varphi \circ f, F)]$$

$$g_*: K_*(A_1, B_1) \rightarrow K_*(A_1, B_2)$$

$$[(\varphi, F)] \mapsto [(g_* \circ \varphi, g_*(F))]$$

($\sim \sim$ で、 g_* は g より誘導される $\mathcal{M}(B_1 \otimes K) \xrightarrow{g_*} \mathcal{M}(B_2 \otimes K)$.)

$h: D \rightarrow D_1$ に對して、

$$3) h_*(x) \otimes_{D_1} y = x \otimes_D h^*(y)$$

$$4) K_*(A_1, A_2) \ni [((\begin{smallmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}), 0)] = \gamma_f \text{ と考えると}$$

$$\gamma_f \otimes_{A_2} x = f^*(x)$$

$$K_*(B_1, B_2) \ni [((\begin{smallmatrix} g & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}), 0)] = \delta_g \text{ と考えると}$$

$$x \otimes_{B_1} \delta_g = g_*(x).$$

最も重要なのは次の主張である。

$\alpha \in KK(D, E), \beta \in KK(E, D)$ があつて

$$\alpha \otimes_E \beta = \left[\left(\begin{pmatrix} \text{id}_D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0 \right) \right] \quad \beta \otimes_D \alpha = \left[\left(\begin{pmatrix} \text{id}_E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0 \right) \right]$$

となるとき.

$$6^\circ) \quad \otimes_D \alpha : KK(A, B \otimes D) \rightarrow KK(A, B \otimes E) \quad \text{isomorphism}$$

$$\otimes_E \beta : KK(A, B \otimes E) \rightarrow KK(A, B \otimes D) \quad "$$

$$\beta \otimes_D : KK(A \otimes D, B) \rightarrow KK(A \otimes E, B) \quad "$$

$$\alpha \otimes_E : KK(A \otimes E, B) \rightarrow KK(A \otimes D, B) \quad "$$

又、 $\alpha \in KK(D \otimes E, \mathbb{C})$, $\beta \in KK(\mathbb{C}, D \otimes E)$ がある.

$$\beta \otimes_D \alpha = \left[\left(\begin{pmatrix} \text{id}_E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0 \right) \right], \quad \alpha \otimes_E \beta = \left[\left(\begin{pmatrix} \text{id}_D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0 \right) \right]$$

となるとき.

$$7^\circ) \quad \beta \otimes_D : KK(A \otimes D, B) \rightarrow KK(A, B \otimes E) \quad \text{isomorphism}$$

$$\beta \otimes_E : KK(A \otimes E, B) \rightarrow KK(A, B \otimes D) \quad "$$

$$\otimes_D \alpha : KK(A, B \otimes D) \rightarrow KK(A \otimes E, B) \quad "$$

$$\otimes_E \alpha : KK(A, B \otimes E) \rightarrow KK(A \otimes D, B) \quad "$$

この一般的な積を使って、一つの結果ではあるが、次の定理が従う。

定理4 (Bottの周期性)

$$K_i K(A, B) \cong K_{i+n} K(A(\mathbb{R}^n), B) \cong K_{i-n} K(A, B(\mathbb{R}^n))$$

$\therefore$ Kasparov's canonical generators.

$$\exists K_n K(\mathbb{C}_0(\mathbb{R}^n), \mathbb{C}) \ni \alpha \quad K_{-n} K(\mathbb{C}, \mathbb{C}_0(\mathbb{R}^n)) \ni \beta$$

$$\text{s.t.} \quad \alpha \otimes_{\mathbb{C}} \beta = \left[\left(\begin{pmatrix} \text{id}_{\mathbb{C}_0(\mathbb{R}^n)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0 \right) \right], \quad \beta \otimes_{\mathbb{C}_0(\mathbb{R}^n)} \alpha = c_1$$

g.e.d.

A : nuclear C^* -環と仮定すれば、

$$(i.e., \quad \forall \quad 0 \rightarrow J \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow 0 \text{ (exact)} \quad \exists \quad 0 \rightarrow J \otimes K \rightarrow E' \rightarrow A \rightarrow 0 \text{ (exact)})$$

$$s.t. \quad 0 \rightarrow J \otimes K \rightarrow E \oplus_A E' + J \otimes K \rightarrow A \rightarrow 0 \quad (\text{split exact})$$

これは、本当の定義とは異なるが、同値命題である。）

このとき、 $K_1 K(A, B) \cong \text{Ext}(A, B)$ 。この Ext の定義は以下である。

$$\mathcal{E} = \{ 0 \rightarrow B \otimes K \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow 0 \quad (\text{exact}) \}$$

この上は、 E の C^* -同型で同値を入れ、

$$0 \rightarrow B \otimes K \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow B \otimes K \rightarrow E' \rightarrow A \rightarrow 0 \quad \text{に対し、}$$

$$\text{和を} \quad 0 \rightarrow B \otimes K \otimes M_2 \rightarrow E \oplus_A E' + B \otimes K \otimes M_2 \rightarrow A \rightarrow 0 \quad \text{で導入}$$

して、

$$\mathcal{Q} = \{ 0 \rightarrow B \otimes K \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow 0 \quad \text{split exact} \}$$

で割った群を $\text{Ext}(A, B)$ と書き、拡大の群と呼ぶ。

この拡大の群の性質を便、2. Kasparov は次の定理を得る。

定理 5. A : nuclear $A \supset I, B \supset J$; ideals

次の exact sequences を得る。

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow KK(A/I, B) \rightarrow KK(A, B) \rightarrow KK(I, B) \xrightarrow{\delta} KK(A/I, B) \rightarrow KK(A, B) \rightarrow KK(I, B) \rightarrow \\ \cdots \rightarrow KK(A, J) \rightarrow KK(A, B) \rightarrow KK(A, B/J) \xrightarrow{\delta'} KK(A, J) \rightarrow KK(A, B) \rightarrow KK(A, B/J) \rightarrow \end{aligned}$$

定理 6 d)

$$KK(A, B_1 \oplus B_2) \cong KK(A, B_1) \oplus KK(A, B_2)$$

$$KK(A_1 \oplus A_2, B) \cong KK(A_1, B) \oplus KK(A_2, B)$$

b) A_i : nuclear $A = \bigoplus A_i$ Co-direct sum

$$KK(A, B) \cong \prod KK(A_i, B) \quad (\text{直積})$$

注意. 位相空間の K-理論 との関係.

X, Y ; 可分局所コンパクト Hausdorff 空間.

さらに, X^+, Y^+ が CW-complex. のとき

$$\begin{aligned} K_i K(A, B) &\cong \varinjlim_n \pi_{n+i}(X^+ \wedge \mathcal{F}_n(Y^+)) \\ &\cong \varinjlim_n \pi_{n+i}((X^+ \wedge \mathcal{F}_n)(Y^+)) \\ &= \varinjlim_n [S^{n+i} Y^+, X^+ \wedge \mathcal{F}_n] \end{aligned}$$

注意 Kasparov の原論文では, コンパクト群 G が A, B, K 上作用していて, KK^G -群 を考えている。 (φ, F) に次の条件を付加する。

$\varphi: G$ -equivalent.

i.e. $\forall g \in G, a \in A \quad g \varphi(a) = \varphi(g \cdot a)$

$F: G$ -invariant operator. i.e. $\forall g \in G \quad g F = F$

このとき,

$$K_0 K^G(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = R(G) \quad (\text{表現環}) \quad K_1 K^G(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = 0$$

$KK^G(A, B)$ と $KK(A \rtimes G, B \rtimes G)$ の関係は、は、きりわかっていない。ただ、前者から後者への準同型がある。 G が非コンパクトの場合も定義されているが、この方は準備が邪魔とどかず論文をあげておく。

REFERENCE

- [1] Brown-Douglas-Fillmore; Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of C^* -algebras, Lec. Not. in Math. No.345.
- [2] _____; Extensions of C^* -algebras and K-homology, Ann. of Math. (2) 105 (1977), 265-324.
- [3] Connes; Non-commutative differential geometry, Chap.I: The Chern character in K homology. Chap.II: De Rham homology and non-commutative algebra. to appear.
- [4] Kasparov; The operator K-functor and extensions of C^* -algebras. Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Math. 44(1980).
- [5] _____; K-theory, group C^* -algebras, and higher signatures, to appear.