

Quasi-static な塑性問題の可解性について

熊本大 理学部 三好 哲彦

はじめに. 塑性問題は変分不等式の視角からある程度扱う事ができるが, この方向では種々の理論的, 又は工学的な問題を考える際に不便が生じる事がある. それは変分不等式的な接近法では塑性問題のわくの中では問題が扱えなくなり, 塑性問題を他の "穏やかな" 問題の極限としてとらえるを得なくなると言うところに根本的な原因がある. 塑性現象のわく組みの中でとらえる事が望ましいが, そこには塑性問題における最も本質的な問題 "状態の決定" を避けて通る事ができない. すなわち $t > t_0$ で (初期値) 問題を設定するためには, $t > t_0$ で, 考えている場所が elastic となるか plastic となるかを事前に決定しなければならぬ. この事が可能であれば, はじめに方程式が (その形が) 定まるからである. 離散的か, 動的な問題にたいしてはこれが可能である事を [1] で示したが, 準静的な問題ではその方法が使えないため全く異なった方法と工夫をしなければならぬ. 本稿ではこの

"状態の決定"という事に話題をしばりて述べたいと思う。

エネルギー評価を得て連続的な問題の解を構成する事は [1], [2] の場合と全く同様にやればよいので本稿では触れない。

1. 準静的な多質点系

問題の性格, "状態の決定"のスキームを例示するたう
 N 個の質点系, 弾, 塑性問題を^{まず}考える. $u_i, \varepsilon_i, \sigma_i, \alpha_i$ ($i=1 \sim N$) とそれぞれ, 変位, ひずみ, 応力, 降伏面の中心とし, 次の方程式を併立するこれを求めるという問題を考えよう。

$$(1)a \quad \sigma_i - \sigma_{i+1} = b_i(t) \quad i=1 \sim N$$

$$(1)b \quad \begin{cases} \dot{\sigma}_i = k \dot{\varepsilon}_i & \dot{\alpha}_i = 0 & \text{if } |\sigma_i - \alpha_i| < \bar{\sigma} \text{ or } |\sigma_i - \alpha_i| = \bar{\sigma} \times \operatorname{sgn}(\sigma_i - \alpha_i) \dot{\varepsilon}_i < 0 \\ \dot{\sigma}_i = (1-\gamma)k \dot{\varepsilon}_i & \dot{\alpha}_i = \dot{\sigma}_i & \text{if } |\sigma_i - \alpha_i| = \bar{\sigma} \times \operatorname{sgn}(\sigma_i - \alpha_i) \dot{\varepsilon}_i \geq 0 \end{cases}$$

$$(1)c \quad \varepsilon_i = u_i - u_{i-1}$$

$\Rightarrow$ $b_i(t)$ は連続な関数, $\underbrace{k(\gamma), \bar{\sigma}, \gamma (0 \leq \gamma < 1)}_{\text{で区分的に解析的}}$ は与えられた

定数, $u_0 = u_{N+1} = \cancel{\text{fixed}} = 0$ とする. 残りの問題は (1) を初期条件 ($t=0$)

$u_i = \sigma_i = \alpha_i = 0$ のもとで満たす (絶対連続な) $(u, \varepsilon, \sigma, \alpha)$

を求める事である. 一で言えば "区分的には解析的" なものが欲しいので絶対連続をカッコ付とした。

まず $t=0$ の近くでは (1)b の 1つ目の式を使用し σ_i は小さい値をとるから, (1)b の付帯条件が解に対して要求を

れ子とすれば $\sigma - \dot{\varepsilon}$ relation としこれは elastic rule, すなわち

$$\dot{\sigma}_n = k \dot{\varepsilon}_n, \quad \dot{\alpha} = 0$$

が使用されなければならぬ。したがってこのとき (1)_a は

$$k(-u_{n-1} + 2u_n - u_{n+1}) = b_n(t) \quad n=1 \sim N$$

となり, この式が一意解を持つ事は明らかである。すなわち
ある t_0 で $| \sigma_n | = \bar{\sigma}$ となるまで (1) は ^{解析的} 解析解 $(u, \varepsilon, \sigma, \alpha)$ を持つ。

いま E と E_1 を全負歪の集合及び $t=t_0$ で $| \sigma_n | = \bar{\sigma}$ となる負歪の集合を表わす。 $E - E_1$ の負歪は $t=t_0$ を越えても elastic である (注. 負歪にたいし, (1)_b の上の式 $\dot{\sigma}_n = k \dot{\varepsilon}_n, \dot{\alpha}_n = 0$ が使用される ~~(1)_a~~) とし, この負歪は elastic であるといふ, 他の式が使用される ~~(1)_a~~ とし, plastic であるといふ。この時 (1) の解は同論の付帯条件を満足してゐなければならぬ)

問題は E_1 の負歪になし, $t > t_0$ で (1)_b の n 個の関得式を使用するかどうかである。 E_1 の負歪の個数を M とすれば状態の可能な組み合わせは 2^M 個ある。したがってこの中 t_0 以後の微小時間のうち

(1) (1)_b の付帯条件を満足するような elastic-plastic の組み合わせが存在するか。

(2) この組み合わせはただ一つであるか。

という事が問われなければならない。本稿で第1巻4のはこの n 個の yes であるという事 ^の 証明である。以下はこの事を順を追って説明する。

まず (1)_b の条件を満たすような組み合わせが存在したとし、
 この組み合わせに従って (4) の問題を $t > t_0$ で解いたとき、その
 解にたいし $\dot{\varepsilon}_i(t_0+0)$ の符号がどうなるかを考える。このた
 りに次の方程式を満たす $(u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$ を求める事を考える。

$$(2)_a \quad \sigma_i^* - \sigma_{N+1}^* = \dot{b}_i(t_0+0) \quad i=1 \sim N$$

ただし σ_i^* は u_i^* より次の式から決定されるとする。

$$(2)_b \quad \sigma_i^* = k \varepsilon_i^* \quad \text{for } E = E_1$$

$$(2)_c \quad \begin{cases} \sigma_i^* = k \varepsilon_i^* & \text{in } D_{-i}^1 = \{u^* \in E^N; \operatorname{sgn}[\sigma(t_0)](u_i^* - u_{i-1}^*) < 0\} \\ \sigma_i^* = (1-\xi)k \varepsilon_i^* & \text{in } D_{+i}^1 = \{u^* \in E^N; \operatorname{sgn}[\sigma(t_0)](u_i^* - u_{i-1}^*) \geq 0\} \end{cases}$$

$$(2)_d \quad \varepsilon_i^* = u_i^* - u_{N+1}^*, \quad u_0^* = u_{N+1}^* = \frac{u^*}{N+1} = 0$$

(1) の解が $t > t_0$ で存在すれば、その解にたいする $(u, \varepsilon, \sigma)(t_0+0)$
 は問題 (2) の解にならなければならない。

定理 1. (2) の問題は一意解 $(u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$ を持つ。この解は

$$F_1(u^*) = \frac{1}{2} \langle \sigma^*, \varepsilon^* \rangle - \langle \dot{b}(t_0+0), u^* \rangle \quad (\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^N \alpha_i \beta_i)$$

を付帯条件 (2)_b ~ (2)_d のもとで最小化するものとして求まる。

証明 $F^i \equiv \frac{1}{2} \sigma_i^* \cdot \varepsilon_i^* - \dot{b}_i(t_0+0) u_i^*$ とすると、 F^i は u^* に関する C^1
 クラスの関数であり、従って $F_1 = \sum_{i=1}^N F^i$ も C^1 クラスである。

$\overbrace{F_1 \text{ の変分 } \delta F_1}^{F_1 \text{ の変分 } \delta F_1}$ D_{-i}^1 では $\sigma_i^*, \varepsilon_i^* = k(\varepsilon_i^*)^2$ であるから、 D_{-i}^1 では

$$(3)_a \quad \partial F^i / \partial u_p^* = \sigma_i^* \cdot \partial \varepsilon_i^* / \partial u_p^* - \dot{b}_i(t_0+0) \delta_{ip}$$

同様に、 D_{+i}^1 では次式が成立する。

$$(3)_b \quad \partial F^i / \partial u_p^* = (1-\xi)k \varepsilon_i^* \cdot \partial \varepsilon_i^* / \partial u_p^* - \dot{b}_i(t_0+0) \delta_{ip} = \sigma_i^* \cdot \partial \varepsilon_i^* / \partial u_p^* - \dot{b}_i(t_0+0) \delta_{ip}$$

と σ_n^* は D_n^1 と D_{n+1}^1 の境界上では連続であるから F^1 は C^1 である。次に, $0 \leq \xi < 1$ であるから $F_1(u^*)$ は下に有界であり, 従って最小値を持つが, これは同時に停留値にもなっている。

と σ_n^* が, u^* が F_1 の停留値であるならば (3)_a, (3)_b より $\sigma^* = \sigma^*(u^*)$ は

$$\partial F_1 / \partial u_n^* = \sigma_n^* - \sigma_{n+1}^* - b_n(t_0 + 0) = 0$$

を示す必要がある。したがって問題 (2) の解が存在するといふ事が証明された。同時に, 問題 (2) の解 u^* は $F_1(u^*)$ の停留値になっているといふ事もわかる。したがって (2) の解の一意性を示すには $F_1(u^*)$ の停留値の一意性を示せばよい。このため

に, E_1 の点に対応して超平面 $\pi_n = \{u \in E^N; \operatorname{sgn}(\sigma(t_0))(u_n^* - u_{n+1}^*) = 0\}$ を考え, これらの超平面による E^N の分割を $\{R_j\}$ とする。各 R_j ではすべての変数について σ_j^* と σ_{j+1}^* との関係は一定であり, また Ξ では $F_1(u^*)$ は正定値 2 次形式であって, その停留値が存在してはたかたかである。さて, E^N 内に $F_1(u^*)$ の停留値がたつたかといふ事を示す。 $\underline{u}^* \in R_i$ と $\bar{u}^* \in R_j$ ($i \neq j$) 2 つあるとする。直線

$$\ell: \underline{u}^* + t(\bar{u}^* - \underline{u}^*) \quad t \in [0, 1]$$

を考えよ。 t が 0 から 1 へと動くとき, ℓ はすくなくとも 2 つの R_j の領域を通過する。この直線上, すなわち, $f(t) = F_1(\underline{u}^* + t(\bar{u}^* - \underline{u}^*))$ は各領域内では退化した 2 次式であり, $[0, 1]$ で C^1 クラスである。したがって $\underline{u}^*$ が $F_1(u^*)$ の停留値,

ある
 1. したがって u^* を含む $\{R_j\}$ の領域内での最小値であれば、 $f(t)$ は $\sqrt{(0,1)}^2$ の仮定、増加関数となりなければならない。これは u^* が別の停留点という仮定に反する。(定理1の証明終)

$(u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$ を (2) の解とする。 E_1 の値にたいし $\text{sgn}(\sigma(t_0))(u_i^* - u_{Li}^*)$ の符号が従って判明する。 E_1 の値 ~~は E_1^p である~~、この符号が負又は非負に従って、elastic 又は plastic に分類する。(この分類はさし当りこの段階では仮の分類である) この分類は elastic となる E_1 も E_1^e , plastic となる E_1 も E_1^p とする。 $t=t_0$ で設定された次の初期値問題を考えよう。

$$(4)_a \quad \sigma_i - \sigma_{i+1} = b_i(t) \quad i=1 \sim N$$

$$(4)_b \quad \begin{cases} \dot{\sigma}_i = k \dot{\varepsilon}_i & \dot{\alpha}_i = 0 & \text{for } E = E_1^e \\ \dot{\sigma}_i = (1-\beta)k \dot{\varepsilon}_i & \dot{\alpha}_i = \dot{\sigma}_i & \text{for } E_1^p \end{cases}$$

$$(4)_c \quad \varepsilon_i = u_i - u_{i-1}, \quad (u, \sigma, \alpha)(t_0) = (u, \sigma, \alpha)(t_0-0), \text{ etc.}$$

補題2. 初期値問題 (4) は一意解を持つ。又、その解に対し

$$(\dot{u}, \dot{\sigma}, \dot{\varepsilon})(t_0+0) = (u^*, \sigma^*, \varepsilon^*) (= (2) \text{ の解}) \text{ が成立する。}$$

証明. $\overbrace{(4)_a \text{ と } (4)_c \text{ の式}}^{\text{如(4)の式}}$ の両辺を形式的に微分すると問題 (4) は $(\dot{u}, \dot{\varepsilon}, \dot{\sigma}, \dot{\alpha})$ に関する方程式となる (これを今問題 (4)' とする) $0 \leq \dot{\sigma} < 1$ という条件より (4)' は明らかに一意解を持つ。この解を積分して σ の $(4)_b$ の一意解がある。一方、(2) の解 $(u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$ は E_1^p の作り方から $t=t_0+0$ の (4)' の解になっている。しかし (4)' の解

は $t=t_0+t_0$ においても一意的に走まるから補題が成立する。

E_1^p の節点のうち, (4) の解が $\dot{z}_i(t_0+t_0)=0$ と存するものを全体を E_2 と表わす. E_2 が空集合であれば E_1^e, E_1^p の点は t_0 以後 (1) の条件を満たすように, ちくちくと走る微小時間のあり方は動く. 1点かつて我々に行つた E_1 の分類は正しかつ E_2 とばかり, E の点の t_0 以後の状態は完全に走まつて, 問題 (1) の解が $t=t_0$ を越えて接続される. 1かし E_2 が空集合でない場合には E_2 に属する点の t_0 以後の状態はまだ不確いであり, $\dot{z}_i(t_0+t_0)$ がいかに振動するもの. 又, E_2 の t_0 以後の状態の走つ方によつては, すばいに走まつた E_1-E_2 の点の状態にも影響があるかも知れなかりが, この可能性は否定される. 以上の補題は重要なものである.

補題 3. E_2 が空集合でないとき, E_2 の節点の全部又は一部を E_1^e に入れ, 新しい E_1^p について問題 (4) を解り E とする. このとき一意解 $(u, \varepsilon, \sigma, \alpha)$ が $t=t_0$ で存在するが, $(u, \varepsilon, \sigma)(t_0+t_0)$ は再び (2) の解 $(u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$ に等しい. すなわち, $(u, \varepsilon, \sigma)(t_0+t_0)$ は E_2 の節点の t_0 以後の状態 (elastic or plastic) とは独立に決まる の選定 される.

証明. 補題 2 により E_2 の節点に対し $\dot{z}_i^* = 0$ が成立する. 1ちかつて (2) の解 $(u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$ は新しい E_1^p に関する次の方程式の

解でもある。(t=t₀+0 にあつる)

$$(5)_a \quad \dot{q}_i - \dot{q}_{i+1} = \dot{b}_i(t) \quad i=1 \sim N$$

$$(5)_b \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_i = k \dot{\varepsilon}_i \\ \dot{q}_i = (1-\varepsilon)k \dot{\varepsilon}_i \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{for } E-E_1^p \\ \text{for } E_1^p \end{array}$$

$$(5)_c \quad \dot{\varepsilon}_i = \dot{u}_i - \dot{u}_{i-1} \quad \text{etc.}$$

2の問題は一意解を持つ(4) - 新しり E_1^p に属する - の解と一致するから補題が成立する。

E_2 が空集合でない時 それに属する点、 t_0 以後の状態を定めるには $\dot{\varepsilon}_i(t_0+0)$ を推測できればよい。これには上の便法を繰返せばよい。すなわち、その手順は次の通り。

(1) E_2 の点にたいし、(1)の条件を t_0 以後みたすような状態の組み合わせがあつたとして、そのとき $\ddot{u}(t_0+0)$ が従うべき方程式を考える。未知数を $(u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$ とする。

(2) 上の方程式が一意解を持つ、という事を最小化問題に帰着せしめる。

(3) 上の方程式の解にたいし、 $\arg(\sigma(t_0)) \varepsilon_i^*$ の正負に従つて E_2 を分類し、その分類に従つて(4)に相当する初期値問題を解く。解を $(u, \varepsilon, \sigma, \alpha)$ とする。

$$(4) \quad (u^*, \varepsilon^*, \sigma^*) = (u, \varepsilon, \sigma)(t_0+0) \text{ を示す。}$$

(5) E_2 の点に $\varepsilon_i^* = 0$ となるものがあるとしても、 $(\ddot{u}, \dot{\varepsilon}, \dot{\sigma})(t_0+0)$ はそれらの点の t_0 以後の状態とは独立に定められることを示す。

多軸の場合の一般論を述べることに都合上、この論法を一般化しておく。いま変数の集合 E_{k+1} ($k \geq 1$) があって、それは空集合であるか、又は空集合でなければ次の条件を満たすとする。

(A) E のすべての点について、その t_0 以後の状態が指定されており、その指定に従って $\sigma - \varepsilon$ 関係を送って方程式

$$\sigma_{\lambda} - \sigma_{\lambda+1} = b_{\lambda}(t) \quad \lambda = 1 \sim N$$

を $t > t_0$ において解く。その解を (u, ε, σ) とすれば

$$\frac{d^{\ell}}{dt^{\ell}}(u, \varepsilon, \sigma)(t_0+0) \quad b_{\lambda}, \quad (\ell \leq k)$$

は E_{k+1} の t_0 以後の状態とは独立に走まる。

(B) $E_1 - E_{k+1}$ の点にたいしては、その点に依存した n_{λ} ($1 \leq n_{\lambda} \leq k$) があって、 $\frac{d^{\ell}}{dt^{\ell}} \varepsilon_{\lambda}(t_0+0) = 0$ ($1 \leq \ell < n_{\lambda}$)、 $\dot{\varepsilon}_{\lambda}^{(n_{\lambda})} = \frac{d^{n_{\lambda}}}{dt^{n_{\lambda}}} \varepsilon_{\lambda}(t_0+0) \neq 0$ であり、その点の t_0 以後の状態は $\text{sgn}[\dot{\sigma}(t_0)] \dot{\varepsilon}_{\lambda}^{(n_{\lambda})}$ が負のとき elastic 正のとき plastic と指定されている。

(C) E_{k+1} の点にたいしては $\frac{d^{\ell}}{dt^{\ell}} \varepsilon_{\lambda}(t_0+0) = 0$ ($1 \leq \ell \leq k$) である。

$k=1$ のとま上に定義した E_2 はこれらの条件を満たしている。すなわち、 $E - E_1$ の点は elastic、 E_1 の点は $\text{sgn}[\dot{\sigma}(t_0)] \dot{\varepsilon}_{\lambda}^{(n_{\lambda})}$ の正負に従ってその状態を指定した。この指定に従って問題 (4) を解き、その解 (u, ε, σ) にたいして補題 3 が成立した。したがって (4) が成立する。 E_2 は E_1 のうち $\dot{\varepsilon}_{\lambda}(t_0+0) = 0$ となるもの

であるから (B), (C) が成立する。

さて, E_{k+1} が空集合でなるとき, それに属する点の t_0 以後の状態は σ 反に指定してあるだけであるので確定, E も σ はな。これは次の手順によって定められる。(指定される)

[1st step] 次の方程式を解く $(u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$ を求める。

$$(b)_a \quad \sigma_{\lambda}^* - \sigma_{\lambda+1}^* = \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} b_{\lambda}(t_0+0) \quad i=1 \sim N$$

$$(b)_b \quad \begin{cases} \sigma_{\lambda}^* = k \varepsilon_{\lambda}^* & (E = E_{k+1} \text{ の elastic point に在るとき}) \\ \sigma_{\lambda}^* = (1-\beta) k \varepsilon_{\lambda}^* & (\quad \quad \text{plastic point} \quad \quad) \end{cases}$$

E_{k+1} に対しては

$$(b)_c \quad \begin{cases} \sigma_{\lambda}^* = k \varepsilon_{\lambda}^* & \text{in } D_- = \{u^*; \operatorname{sgn}(\sigma_{\lambda}(t_0)) \varepsilon_{\lambda}^* < 0\} \\ \sigma_{\lambda}^* = (1-\beta) k \varepsilon_{\lambda}^* & \text{in } D_+ = \{u^*; \operatorname{sgn}(\sigma_{\lambda}(t_0)) \varepsilon_{\lambda}^* \geq 0\} \end{cases}$$

$$(b)_d \quad \varepsilon_{\lambda}^* = u_{\lambda}^* - u_{\lambda+1}^* \quad (u_0^* = u_{N+1}^* = \frac{\sigma_{N+1}^*}{\gamma} \Rightarrow).$$

補題 4. 問題 (b) の解は一意的に存在し, 解は次の汎関数の最小化点として求められる。(b)_b ~ (b)_d の条件下での)

$$F_{k+1}(u^*) = \frac{1}{2} \langle \sigma^*, \varepsilon^* \rangle - \left\langle \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} b(t_0+0), u^* \right\rangle$$

[2nd step] (b) の解 $(u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$ を使い E_{k+1} を次の二つに分類する。
 $E_{k+1}^e = \{E_{k+1} \text{ の点 } \sigma \text{ であって, } \operatorname{sgn}(\sigma(t_0)) \varepsilon_{\lambda}^* < 0\}$, $E_{k+1}^p = \{E_{k+1} \text{ の点 } \sigma \text{ であって, } \operatorname{sgn}(\sigma(t_0)) \varepsilon_{\lambda}^* \geq 0\}$. 前者を 弾性点 (elastic point) とし, 後者を 塑性点 (plastic point) と呼ぶ。この分類に関して次の方程式を解く。
 この解を (u, ε, σ) としよう。(勿論 $t > t_0$ を考える)。

$$(7)_c \quad \sigma_i - \sigma_{i+1} = b_i(t) \quad i=1 \sim N$$

$$(7)_b \quad \begin{cases} \dot{\sigma}_i = k \dot{\varepsilon}_i & E = E_{k+1} \text{ の elastic point 及び } E_{k+1}^e \text{ に 対 し.} \\ \dot{\sigma}_i = (1-\beta)k \dot{\varepsilon}_i & E = E_{k+1} \text{ の plastic point 及び } E_{k+1}^p \text{ に 対 し} \end{cases}$$

$$(7)_c \quad \varepsilon_i = u_i - u_{i-1} \quad (u_0 = u_{N+1} = 0, \quad u(t_0+0) = u(t_0-0) \text{ 也.})$$

補題 5. (6) の解 $(u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$ と (7) の解 (u, ε, σ) に対し次が成立.

$$(a) \quad \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} (u, \varepsilon, \sigma)(t_0+0) = (u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$$

(b) $\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} (u, \varepsilon, \sigma)(t_0+0)$ は E_{k+1}^p の 要 び あり て $\varepsilon_i^* = 0$ と なる も の の t_0 以後の 状態 と は 独立 に 決 定 さ れ る.

補題 4 と 補題 5 は それぞれ 補題 2, 補題 3 と 全く 同様 に 証明 され る. そ こ で, 補題 5 に お け る E_{k+1}^p の 要 び あり て, $\varepsilon_i^* = 0$ と なる も の を 全体 を E_{k+2} と 定義 する. E_{k+2} は 空 集 合 であ る か, 又 は 空 集 合 で な け れ ば 前述 (A), (B), (C) を 満 足 する. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+1} \times \mathbb{R}^{+2}$ 存在 する ば

(A) は, 各 次 以下 の 導 関 数 により, $E_{k+2} \subset E_{k+1}$ であ る か ら 反 走 (A) に よ っ て E_{k+2} の t_0 以後 の 状態 と は 独立 であり, $k+1$ 次 の それ は 補題 5 の (b) に よ っ て 同 じ く 独立 である と $\mathbb{R}^{+1}$ 従 う.

(B) は, $E_1 - E_{k+1}$ の 要 び あり 1 2 は, t_0 以後 の 状態 の 指 定 は 前 と 同 じ であ る か ら, 反 走 (A) 及 び $E_{k+2} \subset E_{k+1}$ より (B) の 条件 を 満 足 する よう に 指 定 され て いる. 又 E_{k+1} の 要 び あり 1 2 は 補題 5 の (a) より 同 様 に 指 定 され て いる.

(C) は 補題 5 の (a) 及 び E_{k+2} の 定義 より 明 白 である.

[3rd step] E_{k+2} が空集合であればすべて終り。空集合でなければ同様の手段まで E_{k+3} が空となるかどうかを調べる。

もしこのサイクルが有限の長で終るなら、この事が成り立つとせよ。そのような点の t_0 以後の状態は plastic とこの事にする。存在する場合はこの様に振舞ってあげば、とにかくすべての E の点にたいして以後の状態の振舞い経路を定めることができる。この σ - ϵ 関係により問題 (4) を $t > t_0$ で解けば、すべての点が (1) b の条件を満たし、特に E_∞ の点では $\dot{\epsilon} = 0$ を満たし (1) b の二番目の条件も含めてこころからである。

以上により我々の最初の目的、すなわち E_1 の点のすべてに対し $t > t_0$ の状態を決定する、という事が達成された。2nd の elastic-plastic の組み合わせの内、物理的に許容される組み合わせ、すなわち (1) b を満たすものが存在するかを調べる。このようなものがたいてい1つ1つ存在する、という事は (4) の解が一意的である、という事がわかる。(一意性の証明は容易)。

2. 平面応力問題

当初の目的である、多軸の場合について考えよう。話を簡単にするために、平面応力問題を区分的一次、有限要素を用いて近似した離散系をとり上げる。^{前述の}一軸の場合と異なるのは、 σ と ϵ の非線型関数になっており、最小化

問題、汎関数、形加算関数、階数に応じて異なりうる事である。
 Ω を平面内の多角形領域とし、 Ω は要素と呼ばれる三角形から構成されたとする。 $\{ \varphi_p \}$ はこの分割に対応した区分的一次、通常、有限要素 basis とし、変位を

$$u_\lambda(t) = \sum_{p \in P} u_\lambda^p(t) \varphi_p(x) \quad (12.2)$$

の形で近似する。 P は三角形、頂点であって、 $x = x^i$ は変位境界条件 $(u=0 \text{ 等})$ が与えられていないものを表わす。 $u_\lambda^p(t)$ は次の式より決定される。

$$(12.3) \quad \sum_{j=1}^2 (\sigma_{ij}^j, \varphi_{p,j})_{L^2(\Omega)} = (b_i, \varphi_p)_{L^2(\Omega)} \quad p \in P$$

$$(12.4) \quad \begin{cases} \dot{\sigma} = D \dot{\varepsilon}, & \dot{\alpha} = 0 & \text{if } f(\sigma - \alpha) < 0 \text{ or } f(\sigma - \alpha) = 0 \times \partial f^t \dot{\sigma} < 0 \\ \dot{\sigma} = (D - D') \dot{\varepsilon}, & \dot{\alpha} = (\sigma - \alpha) \frac{\partial f^t \dot{\sigma}}{f} & \text{if } f(\sigma - \alpha) = 0 \times \partial f^t \dot{\sigma} \geq 0 \end{cases}$$

ただし、 $\sigma = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})$, $\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12})$, $\alpha = (\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{12})$

$(\sigma_{12} = \sigma_{21})$, $f(\sigma) = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2$, $D' = D \partial f \partial f^t D / (2 + \partial f^t D \partial f)$

$(2 > 0, \text{定数})$, $\partial f = (\partial f / \partial \sigma_{11}, \partial f / \partial \sigma_{22}, \partial f / \partial \sigma_{12})$ 等である。

さて、 u_λ は要素上 1 次式であるから、 $(\varepsilon_{11} = u_{1,1}, \varepsilon_{22} = u_{2,2}, \varepsilon_{12} = u_{1,2} + u_{2,1})$ で定義されている ε は要素上定数となる。従って (12.4) から定められる σ, α も各要素上で定数となり $t \in \Gamma$ の関数である。我々、問題は b_i に区分的解析性を要求して (12.1) を満たす $(u, \varepsilon, \sigma, \alpha)$ を初期条件 $(u, \varepsilon, \sigma, \alpha)(0) = 0$ のもとで求める事である。

$\sigma - \varepsilon$ 関係の (12.4) の σ -式 ($\sigma = \text{式}$) を満たすとき、その

要素は elastic (plastic) であると呼ぶ。一軸の場合と同じくある時刻 $t=t_0$ である要素が $f(\sigma) = \bar{\sigma}$ を満たすまでは、すべての要素は elastic である。この条件を満たす要素全体の集合を E_1 とし $t > t_0$ で E_1 の要素が elastic となるか plastic となるかを問題としよう。一軸の場合の $\dot{\varepsilon}$ にあたるところは $\dot{\varepsilon}$ の問題では $\partial f^t \dot{\sigma}$ であるが、 $\partial f^t \dot{\sigma}|_{t_0+0}$ が、又はその符号が決まるかどうかをまず考えねばならない。とこから $t > t_0$ では

$$\partial f^t \dot{\sigma} = \partial f^t D \dot{\varepsilon} \left(\partial f^t \dot{\varepsilon} \left[1 - \frac{\partial f^t \partial f}{2 + \partial f^t \partial f} \right] \right) \quad \text{if elastic (plastic)}$$

であるから $\partial f^t \dot{\sigma}$ の正負と $\partial f^t D \dot{\varepsilon}$ の正負は一致してゐる。この事を考慮して、一軸の場合の問題(2)に対応する次の方程式を考える。

$$(2)_a \quad \sum_j (\sigma_{ij}^*, \varphi_{p,j}) = (\dot{b}_i(t_0+0), \varphi_p) \quad p \in P$$

$$(2)_b \quad \sigma^* = D \dot{\varepsilon}^* \quad \text{for } E - E_1$$

$$(2)_c \quad \left\{ \begin{array}{ll} \sigma^* = D \dot{\varepsilon}^* & \text{in } D_- = \{u^*; \partial f^t D \dot{\varepsilon}^* < 0\} \\ \sigma^* = (D - D') \dot{\varepsilon}^* & \text{in } D_+ = \{u^*; \partial f^t D \dot{\varepsilon}^* \geq 0\} \end{array} \right\} \quad \text{for } E_1$$

$$(2)_d \quad \varepsilon_{11}^* = u_{1,1}^* \quad \varepsilon_{22}^* = u_{2,2}^* \quad \varepsilon_{12}^* = u_{1,2}^* + u_{2,1}^*$$

$$(2)_e \quad u_i^* = \sum_{p \in P} u_{i,p}^{(*)} \varphi_p, \quad (D' = D'(t_0+0))$$

刀論(1)の解が $t > t_0$ で存在すればその解にたいして $(u, \dot{\varepsilon}, \dot{\sigma})$ (t_0+0) から(2)の解 $(u^*, \dot{\varepsilon}^*, \sigma^*)$ になつてゐる。前と同じく。

定理 6. (2)の問題は一意解 $(u^*, \dot{\varepsilon}^*, \sigma^*)$ を持つ。この解は

$$F_1(u^*) = \frac{1}{2} (\sigma^*, \dot{\varepsilon}^*)_{L^2(\Omega)} - (\dot{b}(t_0+0), u^*)_{L^2(\Omega)}$$

と付帯条件 (2)_b ~ (2)_e のもとで最小化する u と σ を求める。

証明 定理 1 の証明と原理的には全く同様ルヤルがよい。

$F_1(u^*)$ の正定値性は Korn の不等式及び (2)_f より従う。

$(u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$ を (2) の解とする。 E_1 の要素 p に対し $\partial \varphi_D \varepsilon^*$ の $t = t_0 + 0$ で σ の符号が走まる。この符号が負又は非負に応じて E_1 の要素を elastic 又は plastic にあける。(勿論、仮の分類もある) 前者の集合を E_1^e , 後者を E_1^p とし, $t = t_0 + 0$ で次の初期値問題を解く。

$$(3)_a \quad \sum_j (\sigma_{ij}, \varphi_{p,j}) = (b_i, \varphi_p) \quad p \in P$$

$$(3)_b \quad \begin{cases} \dot{\sigma} = D \dot{\varepsilon} & \alpha = 0 & \text{for } E - E_1^p \\ \dot{\sigma} = (D - D') \dot{\varepsilon} & \alpha = (\sigma - \alpha) \frac{\partial \varphi_D^+ \dot{\sigma}}{\varphi} & \text{for } E_1^p \end{cases}$$

$$(3)_c \quad \dot{\varepsilon} = \varepsilon(\dot{u})$$

補題 7. 初期値問題 (3) は解析的に解 $(u, \varepsilon, \sigma, \alpha)$ を t_0 の近傍で一意的に持ち, $(u, \varepsilon, \sigma)(t_0 + 0) = (u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$ が成立する。

証明 (3)_a の両辺を微分し $\underbrace{(3)_a'}_{(3)_a'}$, (3)_b, (3)_c を併せたものを (3)' とする。(3)_b の $\dot{\sigma}$ - $\dot{\varepsilon}$ 関係式を (3)_{a'} に代入すれば (3)_{a'} は $\dot{u}$ に関して解く事ができる ($\dot{u} = \dot{u}(\sigma, \alpha, t)$ という形で表せる)。従って (3)' は実質的には次の形の微分方程式と考えるより。

$$\frac{d}{dt}(\sigma, \alpha) = X(\sigma, \alpha, t)$$

ここで X は, 少なくとも t_0 の近くでは解析的であるから

の方程式は t_0 近くで解析解を持つ。この解より $\dot{u} = \dot{u}(\sigma, \alpha, t)$ を走らせれば t_0 近く (3) の解 $(u, \varepsilon, \sigma, \alpha)$ がある。さて、 $t = t_0 + 0$ には次の方程式が成立している。

$$(4)_c \quad \sum_j (\dot{\sigma}_{ij}, \varphi_{pj}) = (\dot{b}_i, \varphi_p) \quad p \leq p$$

$$(4)_d \quad \begin{cases} \dot{\sigma} = D\dot{\varepsilon} & \text{for } E - E_1^p \\ \dot{\sigma} = (D - D')\dot{\varepsilon} & \text{for } E_1^p \end{cases}$$

この式は (2) の解 $(u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$ が満足しているから、(4) の解は一意的 $((u, \varepsilon, \sigma))$ として t_0 からの補題が成立する。

E_1^p の要素のうち $\partial \varphi^t D \dot{\varepsilon}(t_0 + 0) = 0$ となるものを全体を E_2 とする。 E_2 が空集合であれば $t > t_0$ の状態はすべて決定されている。仮定すれば、 $E - E_1$ の要素についてこれは問題ないが、 E_1 にも E_1^e にも E_1^p にも E_2 にも $\varphi^2(\sigma) - \varphi^2(\sigma(t_0)) = 2 \int_{t_0}^t \varphi(\sigma) \partial \varphi^t \dot{\sigma} d\sigma < 0$, E_1^p には $\partial \varphi^t \dot{\sigma} = \partial \varphi^t D \dot{\varepsilon}(1 - \theta) > 0$ から $\varphi(\sigma - \alpha) = \sigma$ が t_0 後の微小時間のありたいは成立するから、先の E_1 の分類は正当である。正事かわかるからである。 E_2 が空でないときは一般の場合と同様 $\frac{d}{dt}(\partial \varphi \dot{\sigma})|_{t_0 + 0}$ の符号を推定しなければならない。この際にも補題3に相当する次の事実が成立する。

補題8. E のすべての要素について $(\dot{u}, \dot{\varepsilon}, \dot{\sigma}, \dot{\alpha})(t_0 + 0)$ は E_2 の t_0 以後の状態と独立に決定される。

証明 E_2 の要素の全部又は一部を E_1^e に入れ、新しく E_1^p に加え

て問題(4) (それを(4)'とする) を考える. E_2 の要素に對しては $\dot{\epsilon}^* = \frac{D\phi^t D\dot{\epsilon}^*}{2\tau\phi^t D\phi} = 0$ であるから, 問題(2)の解 $(u^*, \dot{\epsilon}^*, \sigma^*)$ はこの新しい E_1^P に對する(4)'の解にもなっている. (4)'の解は一意であるから, (4)'は, 新しい E_1^P で問題(3)を考えたとき, $t = t_0 + 0$ で $(u, \dot{\epsilon}, \sigma)$ が満たすハミルトン方程式である. したがって $(u, \dot{\epsilon}, \sigma)(t_0 + 0) = (u^*, \dot{\epsilon}^*, \sigma^*)$ が成立. よは σ が定まればまゝの補題が成立する.

この補題により, $E - E_2$ の要素は t_0 以後(1)_b の付帯条件も満たすように振舞う事が保障されたので, それ等について考える必要がなくなった. さて, E_2 の要素に對しては t_0 以後の状態をどう反走して問題を解いてみても, 常に $\frac{d\phi^t \dot{\sigma}}{dt} \Big|_{t_0+0} = 0$ であるから, 適当な状態を反走すれば, elastic要素に對しては $\frac{d}{dt}(\phi^t \dot{\sigma}) \Big|_{t_0+0} < 0$, plastic要素に對しては $\frac{d}{dt}(\phi^t \dot{\sigma}) \Big|_{t_0+0} \geq 0$ と出来るかどうかを検証する以外にはない. E_2 に對し $t = t_0 + 0$ で

$$\frac{d}{dt}(\phi^t \dot{\sigma}) = \frac{d}{dt}[\phi^t D\dot{\epsilon}(1-\theta)] = \frac{d}{dt}(\phi^t D\dot{\epsilon}) \cdot (1-\theta) \quad (0 \leq \theta < 1)$$

であるから, 次の問題をまず考えよう.

$$(5)_a \quad \sum_j (\sigma_{ij}^*, p_{p,j}) = \left(\frac{d^2}{dt^2} b_i(t_0+0), p_p \right) \quad p \in P$$

$$(5)_b \quad \begin{cases} \sigma^* = D\dot{\epsilon}^* & E - E_2 \text{ の elastic 要素} \\ \sigma^* = \left\{ (D-D')\dot{\epsilon}^* - \frac{d}{dt}(D)\cdot\dot{\epsilon} \right\}_{t_0+0} & E - E_2 \text{ の plastic 要素} \end{cases}$$

E_2 の要素に對しては

$$(5)_c \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma^* = D \varepsilon^* \quad \text{in } D_- = \left\{ u^*; - \left[\partial \varphi^t D \varepsilon^* + \frac{d}{dt} (\partial \varphi^t) D \varepsilon^* \right]_{t_0+t_0} < 0 \right\} \\ \sigma^* = \left\{ (D-D') \varepsilon^* - \frac{d}{dt} (D) \cdot \dot{\varepsilon} \right\}_{t_0+t_0} \quad \text{in } D_+ = \left\{ u^*; \left[\partial \varphi^t D \varepsilon^* + \frac{d}{dt} (\partial \varphi^t) D \varepsilon^* \right]_{t_0+t_0} \geq 0 \right\} \end{array} \right.$$

$$(5)_d \quad \varepsilon_{11}^* = u_{1,1}^*, \quad \varepsilon_{22}^* = u_{2,2}^*, \quad \varepsilon_{12}^* = u_{1,2}^* + u_{2,1}^*$$

補題 9 問題(5)は一変解 $(u^*, \sigma^*, \varepsilon^*)$ を持つ. u^* は次の汎関数の

最小化変 (5)_b ~ (5)_d の条件下での) と 1, 2 求められ.

$$F_2(u^*) = \frac{1}{2} (\sigma^*, \varepsilon^*)_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2} (\theta_2, \bar{\varepsilon})_{L^2(\Omega)} - \left(\frac{d^2}{dt^2} b(t_0+t_0), u^* \right)_{L^2(\Omega)}$$

$$\text{左辺に, } \theta_2 = \left(\frac{d}{dt} (D) \dot{\varepsilon} \right)_{t_0+t_0}$$

$$\bar{\varepsilon} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ (resp. } \varepsilon^*) \\ \varepsilon_0^* \text{ in } D_- \\ \varepsilon^* \text{ in } D_+ \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} E - E_2 \text{ の elastic 要素に対し.} \\ E_2 \text{ の要素に対し.} \end{array}$$

$$\varepsilon_0^*; \quad \left[\partial \varphi^t D \varepsilon^* + \frac{d}{dt} (\partial \varphi^t) D \varepsilon^* \right]_{t_0+t_0} = 0 \text{ の任意の解.}$$

証明 まず $F_2(u^*)$ が u^* の関数として連続であること. $E - E_2$ 上の要素

での積分に則しては明らかであるが, E_2 の要素上ではこれは

$$F_e \equiv \frac{1}{2} (\sigma^*, \varepsilon^*)_e - \frac{1}{2} (\theta_2, \bar{\varepsilon})_e - \left(\frac{d^2}{dt^2} b(t_0+t_0), u^* \right)_e$$

であるが, これは不連続を呈し得るのは超平面 $\left[\partial \varphi^t D \varepsilon^* + \frac{d}{dt} (\partial \varphi^t) D \varepsilon^* \right]_{t_0+t_0} = 0$ 上にだけである. π_e 上の

$$(6) \quad D' \varepsilon^* + \frac{d}{dt} (D) \dot{\varepsilon} = \frac{D \partial \varphi^t D}{2 + \partial \varphi^t D} \varepsilon^* + \frac{D \partial \varphi^t \frac{d}{dt} (\partial \varphi^t) D}{2 + \partial \varphi^t D} \dot{\varepsilon} = \frac{D \partial \varphi^t}{2 + \partial \varphi^t D} \left(\partial \varphi^t D \varepsilon^* + \frac{d}{dt} (\partial \varphi^t) D \dot{\varepsilon} \right) = 0$$

であるから, σ^* は u^* の連続関数であり, F_e の不連続はその $\sigma =$

項から生じ得る. この $\sigma =$ 項の, 超平面 π_e 上での不連続は

$\frac{1}{2} (\theta_2, \varepsilon_0^* - \varepsilon^*)_e$ であるが, ε_0^* も ε^* も共に π_e 上にあれば (6) より

$D'(\varepsilon_0^* - \varepsilon^*) = 0$ が成立し, D' が対称行列という事を考慮して

$$(\theta_2, \varepsilon_0^* - \varepsilon^*)_e = -(D'\varepsilon^*, \varepsilon_0^* - \varepsilon^*)_e = -(\varepsilon^*, D'[\varepsilon_0^* - \varepsilon^*])_e = 0$$

を得る. 従って F_2 は連続である. F_2 が C^1 であること, 最小化点 μ が (5) の解になること等は一軸の場合と全く同じである. (証明終)

$(u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$ を (5) の解とす. F_2 の要素のうち $[\partial \varphi^t D \varepsilon^* + \frac{d}{dt}(\partial \varphi^t) D \varepsilon^*]_{t_0+0}$ が負となるもの ($= E_2^e$) は elastic, 非負となるもの ($= E_2^p$) を plastic とし (3) を解く (ただし $\dot{E}_1^p \in (E_2^p + E_1^p - E_2)$ とおまかえる). その解を $(\bar{u}, \bar{\varepsilon}, \bar{\sigma}, \bar{\lambda})$ とす. $(\bar{u}, \bar{\varepsilon}, \bar{\sigma}, \bar{\lambda})(t_0+0)$ は以前の解に対するものと同じである (補題 8).

補題 10 $(\bar{u}, \bar{\varepsilon}, \bar{\sigma}, \bar{\lambda})|_{t_0+0} = (u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$. さらに

$$E_3 = \{ \text{要素 } E_2; [\frac{d}{dt}(\partial \varphi^t D \varepsilon^*)]_{t_0+0} = 0 \}$$

とすれば, すべての要素について $(\bar{u}, \bar{\varepsilon}, \bar{\sigma}, \bar{\lambda})|_{t_0+0}$ は E_3 の t_0 以後の状態と独立に走る.

証明 (4) の両辺を微分し, $\dot{E}_1^p \in (E_2^p + E_1^p - E_2)$ とおまかえ左辺 (それを (4') とす) は $(\bar{u}, \bar{\varepsilon}, \bar{\sigma})$ が t_0+0 で満たさなければならない. 一方 $(u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$ も (4') を満たし, その解は一意であるから前半の主張が成立する. 後半は E_3 の要素に対しては $D'\varepsilon^* + \frac{d}{dt}(D)\varepsilon^* = 0$ が t_0+0 で成立するので補題 8 と同じである.」

E_3 が空でないとはこの論法をくり返せばよい. 一軸の

場合との対応は次のようである。

$$E_{k+1} \equiv \left\{ e \in E_k ; \frac{d^{k-1}}{dt^{k+1}} (\partial \varphi^t D \dot{\varepsilon}) \Big|_{t_0+0} = 0 \right\}$$

$$r_{k+1} \equiv \left\{ \frac{d^k}{dt^k} (\partial \varphi^t D \dot{\varepsilon}) - \partial \varphi^t D \frac{d^k}{dt^k} \dot{\varepsilon} \right\}_{t_0+0}$$

$$\theta_{k+1} \equiv \left\{ \frac{D \partial \varphi}{2 + \partial \varphi^t D \partial \varphi} \right\}_{t_0+0} \cdot r_{k+1}$$

$(u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$ $\xrightarrow{t_0+0 \text{ の近傍}} \Sigma$ の問題の解とする。

$$(7)_a \quad \sum_j (\sigma_{ij}^*, \varphi_{pj}) = \left(\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} b_i, \varphi_p \right) \quad p \in P$$

$$(7)_b \quad \begin{cases} \sigma^* = D \varepsilon^* & E - E_{k+1} \text{ の elastic elements} \\ \sigma^* = (D - D') \varepsilon^* - \theta_{k+1} & E - E_{k+1} \text{ の plastic elements} \end{cases}$$

E_{k+1} の要素に對しては

$$(7)_c \quad \begin{cases} \sigma^* = D \varepsilon^* & \text{in } D_- = \{ u^* ; \partial \varphi^t D \varepsilon^* + r_{k+1} < 0 \} \\ \sigma^* = (D - D') \varepsilon^* - \theta_{k+1} & \text{in } D_+ = \{ u^* ; \partial \varphi^t D \varepsilon^* + r_{k+1} \geq 0 \} \end{cases}$$

補題 11. 問題 (7) は一意解 $(u^*, \varepsilon^*, \sigma^*)$ を持つ。この解は汎関数

$$F_k(u^*) = \frac{1}{2} (\sigma^*, \varepsilon^*) - \frac{1}{2} (\theta_{k+1}, \varepsilon^*) - \left(\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} b(t_0+0), u^* \right)$$

を (7)_b ~ (7)_c の条件下で最小化するものと見做すことができる。左に

$$\bar{\varepsilon} = \begin{cases} 0 \text{ (resp. } \varepsilon^*) & E - E_{k+1} \text{ の elastic (resp. plastic) elements} \\ \varepsilon_0^* & \text{in } D_- \\ \varepsilon^* & \text{in } D_+ \end{cases} \quad E_{k+1} \text{ の elements}$$

は $\partial \varphi^t D \varepsilon^* + r_{k+1} = 0$ の任意の解である。

以上をまとめると次の補題となる。

補題 12. E の各要素にたいし $t > t_0$ の状態が一意的に定まり
問題 (1) は、ある $\delta > 0$ に対して $(t_0, t_0 + \delta)$ で解析的な解を一意的
に持つ。

以上の議論が、除存の可能性がある場合にも使用でき矛盾
は明らかなである。又、 ϵ が不連続になり得るのはどの要素か
の状態が変わる場合のみであり、そのようなときは、正の長
さを持つ時間区間の左端となるから、問題 (4) に対して
次の結論が成立する。区間 $I = [0, T]$ を考える。

定理 13. 問題 (4) の方程式を高い可算 α 個の $t \in I$ を除いて満たす
ような絶対連続な関数 $(u, \varepsilon, \sigma, \alpha)$ が一意的に存在する。

注意: エネルギー不等式は動的な場合と全く同様に導かれる。

[1] Miyoshi, T. Elastic-plastic vibration of a rod, R.I.M.S. Kyoto Univ.
Vol. 16 No. 2 (1980)

[2] " On existence proof in plasticity theory, Kumamoto J. Sci.
(Math.) Vol. 14, No. 1 (1980)