

Resistant BIB design について

愛媛大 教育 大森博之

§ 1 序

BIB design は 一般的モデルのもとで 2つの "balanced" という性質をもっている。 i.e. (i) Variance balanced: 処理効果のすべての normalized estimable linear function が 同一の分散をもつ。 (ii) paired balanced: 処理のすべての対が 同一の block に 一定回数だけ施にされている。

Hedayat & John [2] は BIB design にあいて、いくつかのある処理があいて、それぞれに施にされているすべての experimental units を取り除いた残りの design が、(i), (ii) の性質を保存している事を要する立場から locally resistant BIB design, globally resistant BIB design 及び susceptible BIB design なるものを提起し、特に位数 1 の locally resistant BIB design

globally resistant BIB design の特徴付けを行っている。

この特徴付けをもとに、位数 n の locally resistant BIB design の若干の例を述べるのが、この講演の目的である。

§2 定義及び諸結果

D を処理の集合 Ω 上の BIB (u, b, r, k, λ) design とし、 $\Omega \supset L$ ($|L|=n \leq u-2$) とする。

D から、 L に属する処理が施されている n 個の experimental units を取り除いて得る design を D_L とする。

[定義] D : 位数 n の locally resistant BIB design
 $\Leftrightarrow \Omega \supset L$ ($|L|=n$) s.t. D_L variance balanced

[定義] D : 位数 n の globally resistant BIB design
 $\Leftrightarrow \Omega \supset L$ ($|L|=n$), D_L variance balanced

[定義] D : susceptible BIB design
 $\Leftrightarrow \Omega \supset L$ s.t. D_L variance balanced

位数 1 の場合について、以下のような特徴付けが Hedayat と John [2] に与えられている。

[定理 1] D の処理 α に関して locally resistant BIB design とする為の必要十分条件は D_1 (従って D_2) が BIB design とする事である。

ここに D_1 は処理 α が施されているブロックの block から成る design で、又 D_2 は $D_1 = D_{\text{fix}} - D_1$,

[定理 2] D の位数 1 の globally resistant BIB design とする為の必要十分条件は D が 3-design とする事である。

定理 1 によって、位数 1 の locally resistant BIB design (ある場合には globally resistant も) を構成するには、BIB design D_1 があつて、 D_1 のあつての block に新しい処理 α を付け加へて (この design を $\bar{D}_1$ とする。) $D = \bar{D}_1 \cup D_2$ が BIB design とする。そのような BIB design D_2 が存在するかどうかを問はれる。もしこのような BIB design D_2 が存在するとき、 D_1 は embeddable という。

[定理 3] $D(u, b, r, k, \lambda)$ が embeddable である為の必要条件は $(k+1) \mid b(u-k)$ である。

更にこのとき D_2, D はそれぞれ

$$D_2(u, b(u-k)/(k+1), b-r, k+1, r-\lambda),$$

$$D(u+1, b(u+1)/(k+1), b, k+1, r)$$

上の定理の必要条件が十分条件であるかどうか未知である。又上記の D において $u+1 \geq 2(k+1)$ として、従って $u \geq 2k+1$ と仮定しよう。

§ 3 Examples

Example (a) $D(2k+1, b, r, k, \lambda)$ の場合。
 D_2 は $D_2(2k+1, b, b-r, k+1, r-\lambda)$ となり、これは D_1 の complementary design の parameters と一致する。
 次の結果は Hedayat & John [2] による。

[定理 4] $D = D_1 \cup D_2$ は位数 1 の globally resistant BIB design となる。(i.e. D は $3-(2k+2, k+1, \lambda)$ design)。但し、 D_2 は D_1 の complementary design。

$11 = 2k+1$ とする design の例として $D_1(4t+3, 4t+3, 2t+1, 2t+1, t)$ があるが、この design については次の事がいえる。

[定理 5] $D_1(4t+3, 4t+3, 2t+1, 2t+1, t)$ が存在するとき $D = D_1 \cup D_2$ は $(4t+4, 8t+6, 4t+3, 2t+2, 2t+1)$ となる BIB design であり、これは位数 $2t+2$ の locally resistant BIB design となる。但し D_2 は D_1 の complementary design。

Example (b) $D_1(2k+2, b, r, k, \lambda)$ の場合。
 D_1 が embedable であるための必要条件は
 $D_1(2k+2, m(k+1), mk/2, k, mk(k-1)/2(2k+1))$,
 $D_2(2k+2, m(k+2), m(k+2)/2, k+1, mk(k+2)/2(2k+1))$
 となる。 (45)

[定理 6] $D_1(2k+2, m(k+1), mk/2, k, mk(k-1)/2(2k+1))$,
 $D_2(2k+2, m(k+2), m(k+2)/2, k+1, mk(k+2)/2(2k+1))$ の存在は
 位数 1 の locally resistant BIB design
 $D(2k+3, m(2k+3), m(k+1), k+1, mk/2)$ の存在を意味する。

例として m は (1): $k = 6t+3$ 又は $6t+5$ のとき

$m = 2(2k+1)n$, (ロ): $k = 6t+1$ のとき

$m = 2(4t+1)n$, (ハ): $k = 6t$ または $6t+2$ のとき

$m = (2k+1)n$, (ニ): $k = 6t+4$ のとき $m = (4t+3)n$.

[系] 定理 6 の D_1, D_2 が存在するとき

$3 - (2k+4, k+2, mk/2)$ design が存在する。

(注意) 定理 6 の D_1, D_2 及び N_1, N_2 の complementary design の結合行列を各々 N_1, N_2, N_1^c, N_2^c とするとき, 新しい処理 x, y をつけ加え, 結合行列 N^* を持つ design D^* は $\{x, y\}$ に関する $\text{fully locally resistant BIB design}$ [4] である。 $\therefore \therefore \sim$

$$N^* = \begin{bmatrix} 1 \cdots 1 & 1 \cdots 1 & 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 \\ 1 \cdots 1 & 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & 1 \cdots 1 \\ N_1 & N_2 & N_1^c & N_2^c \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{処理 } x \\ \leftarrow \text{処理 } y \end{array}$$

さらに 定理 6 の D_1 において, (ハ) で $n=1$ の場合, D_1 は位数 $2k+2$ の $k-1$ 個の mutually orthogonal latin squares を用いて構成される [3] から, (ロ), (ハ), (ニ) の一般的な構成方法は未だないようである。

参考文献

- [1] R.C. Bose (1939) On the construction of balanced incomplete block designs. Ann. of Eugenics, 9 353-399
- [2] A. Hedayat & P.W.M. John (1974) Resistant and susceptible BIB designs. Ann. Statist. 2, 148-158.
- [3] J. F. Lawless (1971) Note on a family of BIBD's and sets of mutually orthogonal latin squares. Jour. Comb. Theory 11 101-105.
- [4] B.M. Most (1975) Resistance of Balanced Incomplete Block Designs Ann. Statist. 3, 1149-1162