

Normal 型の Torus Fibration について

東大 理 松本 幸夫

(Yukio Matsumoto)

§1. はじめに. 我々は先に、複素楕円曲面の位相的類似物として、Torus Fibration を定義し、極く一般的な性質を調べた. ([Mt 1], [Mt 2]) たとえば、1, 3 handle のない handle 分解を持つような 4 次元閉多様体は 2 次元球面上の Torus Fibration になることなどを示した. この稿では対象をやや制限し、Normal 型の Torus Fibration について考察を進めることにする. すなわち、特異ファイバーとして、normal crossing のみを持つものについて考えるのである. 目標は次の問題である.

問題: Normal 型の Torus Fibration を、(必ずしも fiber を保たない) degree+1 diffeomorphism によって分類せよ.

この問題が解決されれば、次の諸定理の一般化が得られるはずである.

定理. (Kas-Moishezon) [Ka], [Mz]. V_1, V_2 を S^2 上の楕円曲面で, multiple fiber を持たず, また, 少なくともひとつの特異ファイバーを持つようなものとする. 各ファイバーは例外曲線を含まないと仮定する. このとき, V_1 と V_2 が diffeomorphic のための必要十分条件は $b_2(V_1) = b_2(V_2)$ が成り立つことである.

定理. (Zieschang, [Z]). 曲面上の Torus Fibration で multiple fiber しか持たないものの同型類は, もしそれが “十分複雑なら”, 基本群によって決定される.

定理. (坂本-福原, [SF]). T^2 上の T^2 バンドルの分類.

このノートでは, 残念ながら上の問題の解決には到らないが, 以下, Normal 型の Torus Fibration に関する基本的事実 (特異ファイバーの分類, monodromy, ホモロジ-4 球面, Twin S.f. の変形等) および, 特異ファイバーの張り換え技術について述べる. また, 上の問題の部分的解決として次の2つの定理を証明する.

定理. 6.1. 単連結な Normal 型 T.F. M の交叉形式が正定符号なら, M は $\mathbb{CP}_2$ の有限個の連結和に diffeomorphic である. (multiple fiber は無いものとする.)

定理. 7.1. 特異ファイバーとして I_1^+, I_1^- のみを許す S^2 上

の T.F. M の diffeo. class は, 符号数 $\sigma(M) \neq 0$ のとき, $\sigma(M)$ とオイラー数 $e(M)$ で分類できる. (特異ファイバーの記号 $I_i^{\pm}$ については §2 参照.)

後の定理は前述の Kas-Moishezon の定理の (実はささやかな) 一般化である.

Normal 型 Torus Fibration の定義を述べて §1 を終る.

定義. M, B をそれぞれ, smooth, oriented 4-又は 2-mf'd とし, $\partial M = \phi = \partial B$ と仮定する. smooth map $f: M \rightarrow B$ (proper, onto)

が Normal 型 Torus Fibration (略して NTF.) とは, M の各点において f の germ が, $\mathbb{C}^2$ の原点における $z_1^p z_2^q$ 又は $\bar{z}_1^p \bar{z}_2^q: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ の germ に (向きもこめて) 同値であり, かつ, f の一般ファイバーが 2次元トーラスに微分同相であることを言う. ($z_1^p z_2^q$ 又は $\bar{z}_1^p \bar{z}_2^q$ における p, q は, $p \geq 0, q \geq 0, p+q \geq 1$ であるような整数. $\gcd(p, q) = 1$ は仮定しない.) $\partial M \neq \phi, \partial B \neq \phi$ の場合, proper onto な smooth map $f: M \rightarrow B$ が NTF. であるとは, $f|_{\text{Int}(M)}: \text{Int}(M) \rightarrow \text{Int}(B)$ が上述の意味で NTF. であり, かつ, ∂B の適当な collar C の上で $f|_{f^{-1}(C)}: f^{-1}(C) \rightarrow C$ が T^2 -バンドルになっているものを言う.

§2. 特異ファイバーの分類. $f: M \rightarrow B$ を NTF とし

$F_x = f^{-1}(x)$ ($x \in B$) をひとつのファイバーとする. $D_\varepsilon(x)$ で, x を中心とし半径 $\varepsilon > 0$ であるような B の円板を表わす. 制限 $f|f^{-1}(D_\varepsilon(x)): f^{-1}(D_\varepsilon(x)) \rightarrow D_\varepsilon(x)$ が円板上の T^2 -バンドルのとき, F_x を一般ファイバーとよび, 然らざるとき, 特異ファイバーとよぶ.

明らかに, ($\varepsilon > 0$ が小なら) $f^{-1}(D_\varepsilon(x))$ は F_x を変形レトラクトとして持つ. また F_x は smooth に埋め込まれた 2次元球面 S^2 又はトーラス T^2 の和集合である. ([M₊2] 参照). これ等の S^2 又は T^2 を F_x の既約成分とよび, 一律に $\Theta_1, \dots, \Theta_s$ と表わそう. Θ_i, Θ_j ($i \neq j$) が交わる時は有限個の点で transverse に交わる. M, B が oriented であることから, 各 Θ_i には自然に向きが定まり, $H_2(f^{-1}(D_\varepsilon(x)); \mathbb{Z})$ の元 $[\Theta_i]$ を unique に定める. $f^{-1}(D_\varepsilon(x))$ に含まれる一般ファイバーの定めるホモロジ-類 $[T^2]$ を $[T^2] = \sum_{i=1}^s m_i [\Theta_i]$ と表わしたとき, 係数 ($m_i \geq 1$) を multiplicity とよぶ.

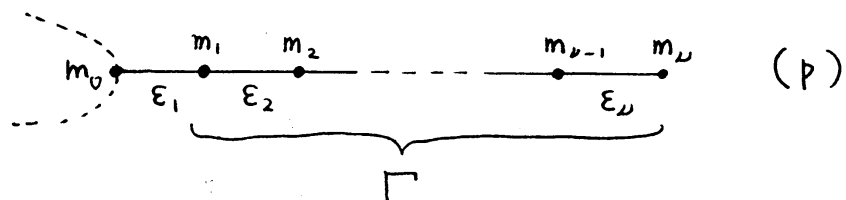
$f^{-1}(D_\varepsilon(x))$ は $\bigcup_{i=1}^s \Theta_i$ を心棒にする plumbing であって, その manifold としての構造は, plumbing diagram 及び, 各 $p \in \Theta_i \cap \Theta_j$ における交わりの符号 $\varepsilon = \pm 1$ を指定すれば決まる. 更に Torus Fibration $f|f^{-1}(D_\varepsilon(x)): f^{-1}(D_\varepsilon(x)) \rightarrow D_\varepsilon(x)$ の構造は, 各 Θ_i の multiplicity m_i を指定する

ことにより定まる。以下特異ファイバーを weighted graph で表わすが、頂点は S^2 を表わし、2 頂点^間 n 本の辺で結ばれているとき、対応する S^2 は n 個の点で transverse に交わるものと約束する。(大抵は $n=0$ or 1) 辺上の符号は交わりの符号、頂点の weight は multiplicity m_i (≥ 1) である。(頂点の weight は self-intersection number ではない!!)

注意 2.1. multiplicity m_0 を持つ既約成分 H_0 が、他の既約成分 $H_1, \dots, H_t$ と (しかも、これらの既約成分とだけ) 1 点で transverse に交わっているとする。 H_i の multiplicity を m_i , $H_0 \cdot H_i = \varepsilon_i$ ($= \pm 1$) とする。このとき self-intersection $H_0 \cdot H_0 = -(\sum_{i=1}^t \varepsilon_i m_i) / m_0$ である。

(証明) 一般ファイバーと特異ファイバーは交わらないから、
 $0 = [T^2] \cdot [H_0] = m_0 H_0 \cdot H_0 + \sum_{i=1}^t m_i (H_i \cdot H_0)$. Q.E.D.

Weighted graph 中の線形枝 Γ を考える:



線形枝においては、 $\gcd(m_0, m_1) = \gcd(m_1, m_2) = \dots = \gcd(m_{\nu-1}, m_\nu) = m_\nu$ が成り立つ。上図の右端のカッコ中

の数 p は $p = m_0/m_\mu$ で与えられる整数である。 $p = 1$ であるような線形枝を 除き得る線形枝 (RLB) とする。

補題 1.2. RLB の正則近傍の境界は S^3 である。

(略証) それは明らかに lens 空間であるから, $H_1 = 0$ を示しさえすればよい。 $p = 1$ (i.e. $m_0 = m_\mu$) の条件を用いて, 当該線形枝の intersection form が unimodular なことがわかる。 Q.E.D.

Neumann-Weintraub により, RLB を除いて 4次元円板 D^4 で貼り替えて得られる mfd M' は, 貼り替え前の mfd M と, $M = M' \# S^2 \times S^2 \# \dots \# S^2 \times S^2$ 又は $M = M' \# \pm \mathbb{C}P_2 \# \dots \# \pm \mathbb{C}P_2$ のような関係にある。 ([NW]) また RLB 付近の Fibration の構造を考察することにより, M' も M と共通の底空間 B 上の NTF であり, 特異ファイバーを表わす weighted graph は, 除いた RLB の分しか異ならないことがわかる。従って, 全体の微分同相類を問題にする限り, RLB を含まない NTF のみを考えれば十分である。

定理 1.3. RLB を含まない Normal 型の特異ファイバーは以下の 6 クラスに分類される。 (線形枝の端のカッコ内の数

は上述の p -数である.)

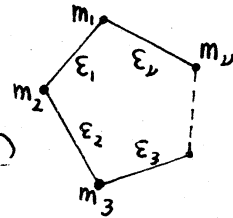
(i) mI_0 型: (multiple torus) Seifert 型の fibered $nbd \times S^1$ に同値である. (M.C. Thornton [Th].)

(ii) $\tilde{A}$ 型: グラフは cyclic.

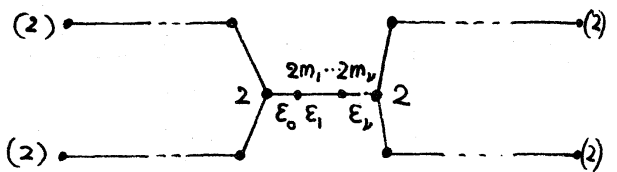
条件として $\gcd(m_1, m_2) = \gcd(m_2, m_3)$

$= \dots = \gcd(m_\nu, m_1)$. かつ

$m_i \mid \varepsilon_{i-1} m_{i-1} + \varepsilon_i m_{i+1}$.



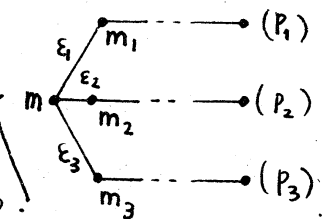
(iii) $\tilde{D}$ 型: グラフは右図.



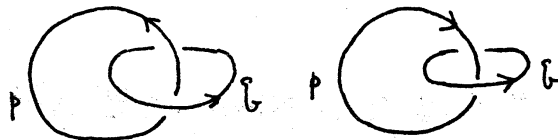
(iv) $\tilde{E}_6$ 型: $m=3, p_1=p_2=p_3=3$.

(v) $\tilde{E}_7$ 型: $m=4, p_1=2, p_2=p_3=4$.

(vi) $\tilde{E}_8$ 型: $m=6, p_1=2, p_2=3, p_3=6$.



(略証) これ等の graph の分類は基本的には Scharf [Sch] あるいは Neumann [N] によりなされている. この特異ファイバーのまわりの Torus Fibration の様子はより詳しい幾何的考察による. すなわち, 既約成分の交点付近では, 射影 $f: M \rightarrow B$ の germ は $z_1^p z_2^q$ 又は $\bar{z}_1^p \bar{z}_2^q: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ の原点における germ に同値. よって Torus Fibration は, ここでは local に 'multiple ($\pm$) Hopf link' (下図) の cone の形である.



'multiple fibered link' として, この link の fiber は.

$\gcd(p, q)$ 個の annulus からなる. また monodromy もわかる. 上述のグラフに沿ってこれらの annuli をつなげて行き, Torus Fibration が構成される. $\square$

定義. 特異ファイバー $F = \sum_{i=1}^s m_i \mathbb{H}_i$ において, $\gcd(m_1, m_2, \dots, m_s) > 1$ であるとき, F を multiple fiber とよぶ.

multiple fiber になり得るのは mI_0 型, $\tilde{A}$ 型の 2 つに限る. (i.e. 単連結でないもの.) 小平先生のホモトピー-K3 曲面の問題のように, multiple fiber の現われる場合のトポロジーは難しそうである.

注意. $\tilde{A}$ 型において, $\nu=1$ の場合は, 1 個の transverse self-intersection point を持つ immersed S^2 である. 更に $m_i=1$ のとき $\varepsilon_i = +1$ 又は -1 に応じて, χ の特異ファイバーを I_1^+ 又は I_1^- で表わす. このまわりの monodromy

$$I_1^+ = \bigcirc_+^{\leftarrow S^2} \quad I_1^- = \bigcirc_-^{\leftarrow S^2}$$

は $\varepsilon_i = +1, -1$ に応じてそれぞれ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ である.

注意. 交叉の符号 ε が全て $+1$ の場合, 上記特異ファイバーは Kodaira 型又は χ の blown up に一致する: $\tilde{A} \rightarrow I_0$, $\tilde{D} \rightarrow I_0^*$, $\tilde{E}_6 \rightarrow \{IV, IV^*\}$, $\tilde{E}_7 \rightarrow \{III, III^*\}$, $\tilde{E}_8 \rightarrow \{II, II^*\}$.

§3. Monodromy. 前節で分類した特異ファイバーのまわりの monodromy について述べる. $\mu, \lambda \in H_1(T^2; \mathbb{Z})$ を, $\mu \cdot \lambda = +1$ であるような適当な basis とし, それに関する matrix により表示する: $(h(\mu), h(\lambda)) = (\mu, \lambda) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. (下の定理中の m_i, ε_i の意味については定理 2.3 の図参照.)

定理 3.1. (i) $m_0 I_0$ 型の monodromy は trivial.
(ii) $\tilde{A}$ 型の monodromy は $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. ここに $b = (\varepsilon_1/m_1 m_2) + \dots + (\varepsilon_\nu/m_\nu m_1)$. (iii) $\tilde{D}$ 型は $\begin{bmatrix} -1 & -b \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. ここに $b = (\varepsilon_0/m_1) + (\varepsilon_1/m_1 m_2) + \dots + (\varepsilon_{\nu-1}/m_{\nu-1} m_\nu) + (\varepsilon_\nu/m_\nu)$. (iv) $\tilde{E}_6$ 型. $\varepsilon_3 m_3 \equiv -1 \pmod{3}$ 又は $\varepsilon_3 m_3 \equiv 1 \pmod{3}$ に応じて $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 又は $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. (v) $\tilde{E}_7$ 型. $\varepsilon_3 m_3 \equiv -1 \pmod{4}$, $\varepsilon_3 m_3 \equiv 1 \pmod{4}$ に応じて, $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 又は $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. (vi) $\tilde{E}_8$ 型. $\varepsilon_3 m_3 \equiv -1 \pmod{6}$, $\varepsilon_3 m_3 \equiv 1 \pmod{6}$ に応じて $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 又は $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

§4. ホモロジー-4球面. §1 で述べた問題の非常に特別の場合として次の定理を証明する.

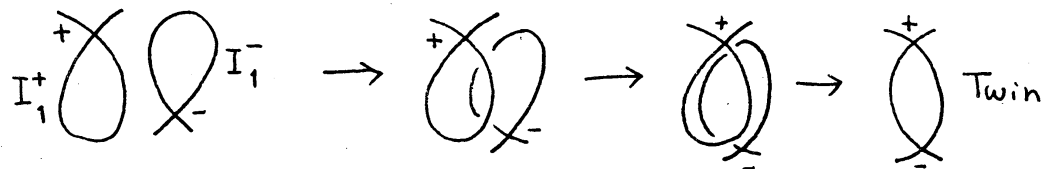
定理 4.1. $f: M \rightarrow B$ を, multiple fiber を含まない NTF とする. そのとき, M がホモロジー-4球面であれば, M は, S^4 に diffeomorphic である.

(証明) $H_*(M; \mathbb{Z}) \cong H_*(S^4; \mathbb{Z})$ と仮定する. もし M が RLB を含めば $M = M' \# S^2 \times S^2 \# \dots$ 又は $M = M' \# \pm \mathbb{C}P_2 \# \dots$ であるから (cf. §2), M はホモロジ - 4 球面になり得ない. 従って M の特異ファイバーは定理 2.3 のそれと一致する. M の euler 数 $e(M) = 2$ は, 特異ファイバーの euler 数の和である. 定理 2.3 の中から $\text{euler} \# \leq 2$ のものを探すと, M の特異ファイバーとして可能なものは, $m_1 \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \circlearrowleft \\ \varepsilon_2 \end{array} m_2$ および, $1 \circlearrowleft \varepsilon_1 \cup 1 \circlearrowleft \varepsilon_2$ の 2 種類である.

前者の場合. m_1 -頂点の self-int. number は注意 2.1 により $-(\varepsilon_1 m_2 + \varepsilon_2 m_1)/m_1$. 一方 $H_2(M; \mathbb{Z}) = 0$ であるからこの数は 0 に等しく, 結局 $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ である. よって, multiple fiber でないから, $\gcd(m_1, m_2) = 1$. この fiber の正則近傍 N は Montesinos' Twin $[M_0]$ に他ならない. 定理 3.1 により monodromy は自明である. よって $M = N \cup T^2 \times D^2$ と分解される. $[M_0 \text{ Cor. 5.6}]$ と同様の議論によって, $M \cong S^4$ が示される. ($S^4 = N \cup T^2 \times D^2$ に現われる attaching diffeo. と N の分解に現われる attaching の差 $\partial N \rightarrow \partial N$ が, N の diffeo. に拡張可能な事をするのである.)

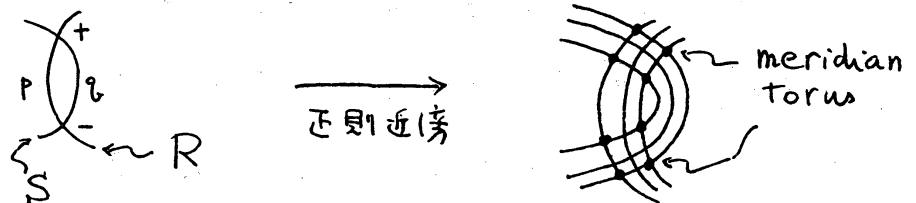
後者の場合. 前者の場合もそうであるが, $H_1(M; \mathbb{Z}) = 0$ であるから $B = S^2$ でなくてはならない. 2 つの特異ファイバー $-I_1^{\varepsilon_1}, I_1^{\varepsilon_2}$ の singular loci は S^2 の北半球 D_+^2 に属する

と仮定してよい. 南半球 D_-^2 では自明な T^2 -バンドルだから
 D_+^2 をまわる monodromy は自明である. $SL(2, \mathbb{Z})$ の
 abel 化 $\cong \mathbb{Z}/12$ であること, 及び $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ が $\mathbb{Z}/12$ の生
 成元になる事を考えあわせると, $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ でなくてはなら
 ない. すなわち特異ファイバーは I_1^+ と I_1^- とから成る. こ
 の両方を 11 回回す monodromy が自明なことから, 両
 者の位置関係は下図のようになってくる. "Deformation" によ



り互いの距離を接近させて行くと, 遂に両者は重なり合っ
 て 1 本の Twin になる. (上図). 従って議論は前者の場合に
 帰着された. Q.E.D.

§5. 特異ファイバーの貼り替え. はじめに Twin の貼り替
 えを考えよう. Twin は $\tilde{A}$ 型の特別な場合で, その一般型は
 下図のように p, q により表わされる. multiplicity p (or q)



を持つ 2 sphere を R (or S) と書く. 正則近傍は $R \times D^2 \cup D^2 \times S$

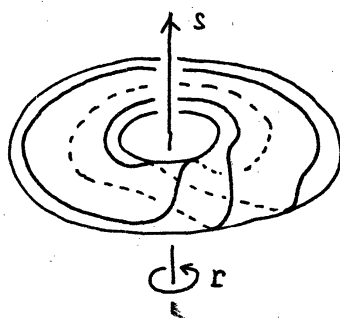
の形の plumbing である. $x \times \partial D^2$ ($x \in R$) または $\partial D^2 \times y$ ($y \in S$) をそれぞれ R または S の meridian とよび, r, s で表わす. 2交点 $R \cap S$ のまわりに, meridian torus がひとつずつあり, その H_1 の生成元は r, s である. meridian torus を τ, τ' で表わす.

正則近傍は D^2 上の NTF であり, その境界は S^1 上の T^2 -バンドルである. 定理 3.1 によれば, monodromy は p, q に依らず自明である. よって, 与えられた Twin singular fiber をひきぬいて, 別の multiplicity (例えば m, n) を持つ Twin singular fiber で置きかえる操作が考えられる. この操作で, Torus Fibration の構造は変るが, 全体の diffeomorphism class は, どう変るか (又は変らないか) が問題である. (なお, $\gcd(p, q) = \gcd(m, n) = 1$ を仮定する.)

multiplicity (p, q) または (m, n) を持つ Twin の正則近傍を $N(p, q)$ または $N(m, n)$ で表わす. Fiber preserving diffeo. $\varphi: \partial N(p, q) \rightarrow \partial N(m, n)$ を次のように構成する.

まず次の事に注意しよう. 自明な T^2 -bundle $\partial N(p, q) \rightarrow S^1$ の任意の fiber T^2 と, $\partial N(p, q)$ 内の meridian torus τ とは transverse に交わり, その交線は τ 上の torus knot である. (次頁上図). また, その torus knot の type は $K(p, -q)$ である. (すなわち, left-handed!)

meridian torus
(+の交点の付近)



r は心棒

$p=2, q=3$ の場合

このことは次のようにしてわかる。+の交点のまわりで、local に複素座標 z_1, z_2 を入れ、 $z_1=0$ が R に、 $z_2=0$ が S に対応してゐるとする。Torus Fibration $N(p, q) \rightarrow D^2$ の germ は $z_1^p z_2^q = 0$ である。meridian torus は、半径 ε の球面 $|z_1|^2 + |z_2|^2 = \varepsilon^2$ と $|z_1| = |z_2|$ の共通部分に同一視される。すなわち、パラメータ θ, φ ($0 \leq \theta, \varphi \leq 2\pi$) を用いて、 $\tau: z_1 = (\varepsilon/\sqrt{2}) e^{i\theta}, z_2 = (\varepsilon/\sqrt{2}) e^{i\varphi}$ と表わされる。 τ と fiber T^2 の交線は、 τ 上で $z_1^p z_2^q > 0$ なる式で表わされると考えられる。実際

$$z_1^p z_2^q = (\varepsilon/\sqrt{2})^p (\varepsilon/\sqrt{2})^q e^{i(p\theta + q\varphi)} > 0$$

を解くと $p\theta + q\varphi = 0$ を得る。これは $K(p, -q)$ に他ならない。

同様に-の所の meridian torus τ' 上では、fiber T^2 は right handed torus knot $K(p, q)$ になり、 $\tau \times [0, 1]$ と $\tau' \times [0, 1]$ の境界を ori. rev. な diffeo で同一視したもの (これが $\partial N(p, q)$ に他ならない) の中に fiber T^2 は、

$K(p, -q) \times [0, 1] \cup K(p, q) \times [0, 1]$ として入っている。以上の考察は $\partial N(m, n)$ についても全く同様である。いま、fiber pres. diffeom. $\varphi: \partial N(p, q) \rightarrow \partial N(m, n)$ が τ を τ' に、 τ' を τ に写し、しかも τ 中の $K(p, -q)$ を τ' 中の $K(m, -n)$ に写しているとき admissible と呼ぶ。

補題 5.1. (必ずしも fiber pres. ではない) diffeomorph. $\tilde{\varphi}: N(p, q) \rightarrow N(m, n)$ に拡張するような admissible diffeomorphism $\varphi: \partial N(p, q) \rightarrow \partial N(m, n)$ が存在するための必要十分条件は $m+n \equiv p+q \pmod{2}$ である。

(証明) $\partial N(p, q) = T^3 = \partial N(m, n)$ の標準的 basis として、前述の meridians r, s 及び longitude l がとれる。 l は, meridian tori τ, τ' に 1 回ずつ transverse に交わる loop である。この basis (l, r, s) に関して, φ は 3×3 行列で表わせる。(φ は任意の admissible diffeom.)

$$(5.1) \quad \begin{bmatrix} \varphi(l) \\ \varphi(r) \\ \varphi(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ r \\ s \end{bmatrix}, \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

このとき、次の Montesinos の定理 [Mo, Thm 5.3] がある。

定理 5.2 (Montesinos). (5.1) で表わされる diffeom. φ が

ある diffeom. $\tilde{\varphi} : N(p, q) \rightarrow N(m, n)$ に拡張するための
 必要十分条件は $\alpha + \beta + \gamma + \delta \equiv 0 \pmod{2}$ である. (た
 だ, $N(p, q)$ と $N(m, n)$ とは Torus Fib. の構造が違うだけ
 で, 両者とも同じ mfd と考えられる. 補題 5.1 に合わせる
 ため, この記号を使ったが, 定理 5.2 の主張の中では, 本質
 的でない.)

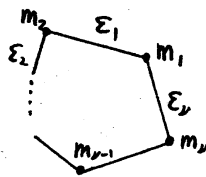
補題 5.1 の証明を, まず $p = q = 1$ の場合に行う. この中
 の Torus knots $K(1, -1)$, $K(m, -n)$ の表わすホモロジ-
 類はそれぞれ $r - s$, $nr - ms$ である. (5.1) で表わされ
 る diffeomorphism が admissible のためには, $\varphi(r - s) =$
 $nr - ms$ が必要十分. これを係数で書くと, $\alpha - \gamma = n$,
 $\beta - \delta = -m$ となる. $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ の条件より, $(\gamma + n)\delta$
 $-(\delta - m)\gamma = 1$, すなわち $n\delta + m\gamma = 1$. $\gcd(m, n) = 1$
 であるから, このような δ, γ は存在する. このとき, $\alpha +$
 $\beta + \gamma + \delta = (\gamma + n) + (\delta - m) + \gamma + \delta \equiv n + m \pmod{2}$. よ
 って, admissible diffeom. が $\tilde{\varphi}$ に拡張する必要十分条件は
 定理 5.2 により $n + m \equiv 0$.

次に $p = 1$, $q = 2$ の場合を考える. admissible のための必
 要十分条件は $\varphi(2r - s) = nr - ms$. これから, $\delta = 2\alpha - n$,
 $\delta = 2\beta + m$ を得る. また $\det = 1$ の条件より $\alpha m + \beta n = 1$.

以上から $\alpha + \beta + \delta + \delta \equiv \alpha + \beta + m + n \pmod{2}$ となる。もし m, n とともに odd (従って $m+n \equiv 1+2$) なら, $\det = 1$ の条件より $\alpha + \beta \equiv 1$. よって $\alpha + \beta + \delta + \delta \equiv 1$ となり, 定理 5.2 により, φ は $\tilde{\varphi}$ に拡張する。もし, m, n の一方が odd, 他方が even (すなわち $m+n \equiv 1+2$) とすると, $\alpha + \beta \equiv 1$ なら拡張するが, α, β とともに odd のときは, $\alpha' = \alpha - n$, $\beta' = \beta + m$ と取り直すことにより, $\alpha' + \beta' + m + n \equiv 0$ であるような admissible diffeo. が得られ, ^{やはり} 拡張する。一般の (p, q) の場合には, $p + q \equiv 0, 1$ に従って, (1, 1) 又は (1, 2) に写しておいて議論すればよい。Q.E.D.

補題 5.1 によれば, mfd 全体の diffeom. class を変える事なく, Twin singular fiber の multiplicity を (1, 1) 又は (1, 2) に変えることができる。

次に, (multiple fiber でないような) 一般の $\tilde{A}$ 型特異ファイバーを考える。



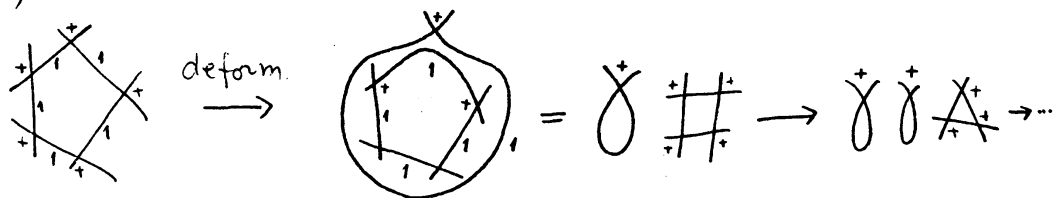
補題 5.3. $\tilde{A}$ 型ファイバーにおいて $\gcd(m_i, m_{i+1}) = 1$ とする。このとき次の (i), (ii), (iii) のどれか ^{少くも} ひとつが成り立つ。

(i) self-int. $\# = 0$ の球面を含む。 (ii) self-int. $\# = \pm 1$ の球面を含む。 (iii) $m_1 = m_2 = \dots = m_{\nu} = 1$ かつ $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = \epsilon_{\nu}$.

(補題 5.3 は, 笹野-洋氏による Computer 実験の結果から
 気がついた. ここで同氏に感謝します.)

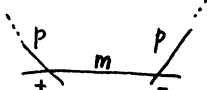
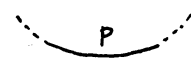
(証明) $\nu \leq 2$ の時は容易であるから, $\nu \geq 3$ とする. i 番
 目の球面の self-int.# は (注意 2.1 により) $-(\varepsilon_{i-1}m_{i-1} + \varepsilon_i m_{i+1})$
 $/m_i$ に等しい. すべての i について $|(\varepsilon_{i-1}m_{i-1} + \varepsilon_i m_{i+1})/m_i|$
 ≥ 2 のとき, (iii) が成立つことを言う. この不等式から, m_{i-1}
 $+ m_{i+1} \geq 2m_i$ を得る. もし $m_1 = \dots = m_\nu$ なら $\gcd = 1$ より,
 共通の値は 1. よって (iii) がなりたつ. (ε_i が変化すれば
 は" (i) が成立."). もし $m_1 < m_2$ なら, ($m_1 + m_3 \geq 2m_2$ より)
 $m_2 < m_3$ を得る. 同様に $m_2 < m_3$ から $m_3 < m_4$ を
 得て, $m_1 < m_2 < \dots < m_\nu < m_1$ となり矛盾. Q.E.D.

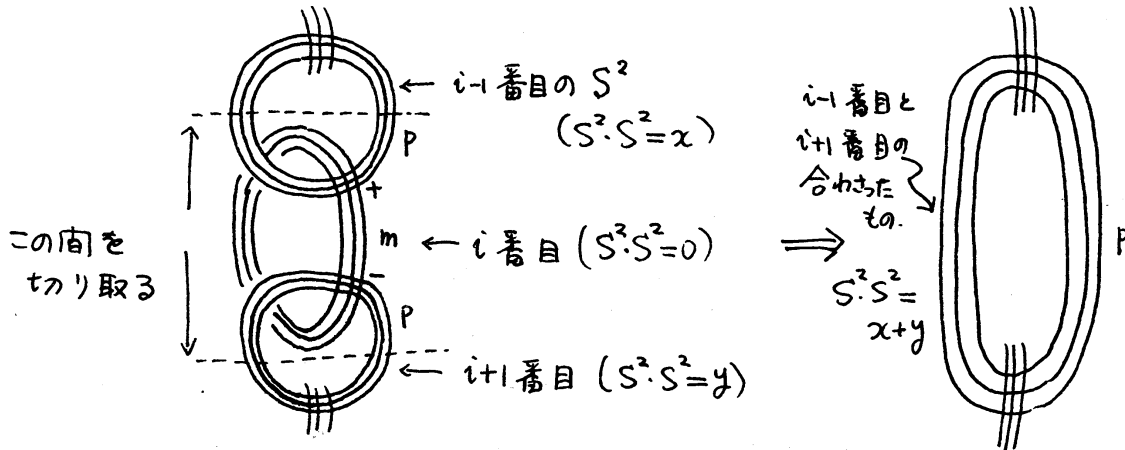
補題 5.3 (ii) の場合は mfd 全体を blow down できる. ま
 た (iii) の場合 ($\varepsilon_i = +1, -1$ に従って $\pm$ Kodaira 型とよぶ)
 は, ν 個の I_1^+ 又は I_1^- に deformation によって split する
 (下図.)



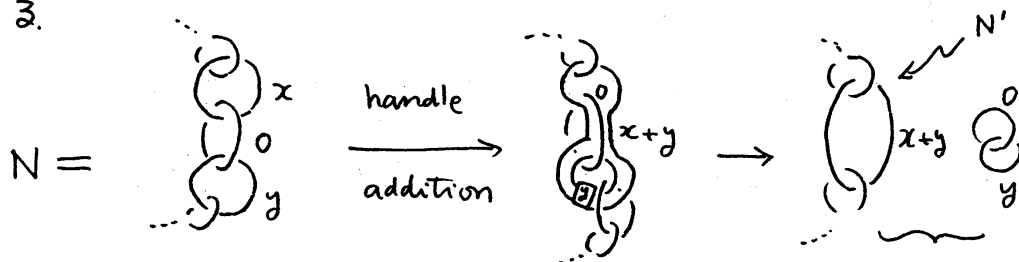
(i) の場合は, 以下に述べる貼り替え操作で簡単化できる.

i 番目の S^2 の self-int. = 0 であるとするれば, 注意 2.1 の公
 式から, $m_{i-1} = m_{i+1}$, $\varepsilon_{i-1} = -\varepsilon_i$ である. よって, $m_i = m$,

$m_{i-1} = m_{i+1} = p$ とおけば、 という形をしてい
る。これを  で貼り替えた。その様子を詳しく
見ると、下図のようである。



上図のように切り取るとき、 $i-1$ 番目の切り口には $(p, -m)$ 型の torus knot が現われ、 $i+1$ 番目の切り口には (p, m) 型の torus knot が現われる。両者を Ori. rev. diffeo で同一視したものが右図である。この操作により monodromy は不変である。(例えば、定理 3.1 よりわかる。) 左及び右の特異ファイバーの正則近傍をそれぞれ N, N' とおくと、mfds として、 N と N' はどんな関係にあるだろうか。Kirby calculus で調べてみる。下の左は N を表わす。これは右図のように変形できる。



従って、 $i+1$ 番目の S^2 の self-int. = y が even 又は odd に
 応じて、 $N \cong N' \# S^2 \times S^2$ 又は $N \cong N' \# S^2 \tilde{\times} S^2$ である。

補題 5.1 と 5.3, 及び この貼り替え操作を含わせて, 次の
 命題を得る. ($S^2 \tilde{\times} S^2 \cong \mathbb{C}P_2 \# \overline{\mathbb{C}P}_2$ に注意)

命題 5.4. $\tilde{A}$ 型 (multiple でないもの) の特異ファイバーを持
つ NTF から, 適当に $\mathbb{C}P_2, \overline{\mathbb{C}P}_2, S^2 \times S^2$ を (連結和の逆の操
作で) 取り除くことにより, $\tilde{A}$ 型は, $I_1^+, I_1^-, (2,1)$ Twin
の 3 種のうちどれか (ひとつとは限らない) としてよい.

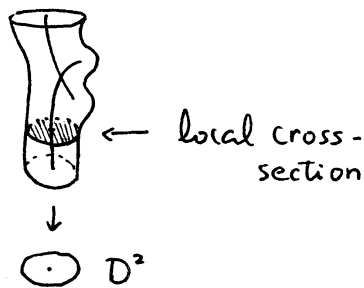
§ 6. Positive definite intersection forms. 次の定理を示
 そう. 以下 NTF は multiple fiber を持たない と仮定する.

定理 6.1. M は closed ^{connected} 4-mfd で $H_1(M; \mathbb{Z}) = 0$ とする, M
が NTF で, M の intersection form が positive definite
なら, M は $\mathbb{C}P_2 \# \dots \# \mathbb{C}P_2$ に diffeomorphic である.

(証明) M から, $S^2 \times S^2, \mathbb{C}P_2, \overline{\mathbb{C}P}_2$ 等を取り除くことにより,
 M の特異ファイバーは RLB を含まないとしてよい. (なお,
 M は positive def. と仮定したから, この時取り除かれるの
 は, 有限個の $\mathbb{C}P_2$ のみである.) まず次の補題を示そう.

補題 6.2. M が positive def. なら, $\tilde{D}, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$ 型の
特異ファイバーは含まない. ($M: \text{conn.}$ かつ $H_1(M)=0$.)

(証明) これ等の特異ファイバーはどれも単連結である.
 また, (適当な線形枝の端点) として, multiplicity 1 の S^2 を
 含んでいる. よって local cross section がある. $\tilde{A}$ 型の特



異ファイバーにも local
 cross-section はある. (2
 つの S^2 の交点のまわりの
 meridian torus 上の, ト

ーラス knot の cone. この場合の local cross-section は smooth
 ではない.) M は, $H_1(M)=0$ より, S^2 上の NTF であって,
 特異ファイバーを除いた所では自明な T^2 -バンドル. よって,
 ここでは global cross-section がある. 従って特異ファイ
 バーを適当に貼り替えると global cross-section を持つ M' を得
 る. (この場合の貼り替えは, 5.5 のように特異ファイバー自
 身を変化させるものではなく, 単に貼り合わせの fiber pres.
 diffeom. を変えるだけ.) この貼り替えにより, M' の euler
 数と符号数はもとの M と変わらない. $e(M')=e(M)$. $\sigma(M')
 =\sigma(M)$. もし, M が $\tilde{D}, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$ 型のような単連結の
特異ファイバーを含めば, ($\pi_1(M')$ の生成元は $\pi_1(T^2)$ から来る
 から), M' も単連結である. よって $e(M')=e(M)$ から,

$b_2(M') = b_2(M)$ が従かう. M' は global cross-section があり, それによる底空間 S^2 の像を再び S^2 と書けば, fiber T^2 との間には $[S^2] \cdot [T^2] = 1$, $[T^2] \cdot [T^2] = 0$ のように交わる. よって M' は positive def. でない. よって $b_2(M') > |\sigma(M')|$. これから $b_2(M) > |\sigma(M)|$ がわかり, M が posi. def. であった事に反する. ゆえに $\tilde{D} \sim \tilde{E}_g$ 型のファイバーは含まない. QED

(定理 6.1 の証明の続き.) M の含む特異ファイバーは $\tilde{A}$ 型のみである. 命題 5.4 により, M から $\mathbb{CP}_2, \overline{\mathbb{CP}_2}, S^2 \times S^2$ 等を取り除くことにより, M の特異ファイバーは I_1^+ 及び Twin のみであるとしてよい. この際も, M の posi. def 性より, 切り取られるのは実は $\mathbb{CP}_2$ のみである. Harer の index 定理を次のように少し拡張したものを利用する.

定理 6.3. (cf. Harer [H, Thm 3.14]) M は NTF とし, その特異ファイバーは a 本の I_1^+ , b 本の I_1^- , c 本の Twin からなるとする. そのとき M の符号数 $\sigma(M)$ は $\sigma(M) = (2/3)(a-b)$ で与えられる. しかも $a-b \equiv 0 \pmod{12}$ である.

さて, M の euler 数は $e(M) = a + b + 2c$ であり, も

し, $H_1(M)=0$, $M: \text{conn.}$ ならば $b_2(M) = a+b+2c-2$ である. 従って, M が positive def. ならば $a+b+2c-2 = (2/3)(a-b)$ でなければならぬ. この式と $a-b \equiv 0 \pmod{3}$ から, $(a, b, c) = (0, 0, 1)$ 或 $(1, 1, 0)$ を得る. いずれの場合も, M はホモロジー 4 球面であり, 定理 4.1 から, $M \cong S^4$ である. 有限個の $\mathbb{CP}_2$ を取り除いて S^4 を得たわけだから, もとの M は $\cong \mathbb{CP}_2 \# \cdots \# \mathbb{CP}_2$ である. Q.E.D.

§ 7. Kas-Moishezon の定理の拡張. 次の定理は初め証明を与える予定だったが, 原稿用紙が尽きてしまったので主張を述べるに止める.

定理 7.1. 特異ファイバーとして I_1^+, I_1^- のみを許す S^2 上の NTF の diffeomorphism class は, $\sigma(M) \neq 0$ のとき, 符号数 $\sigma(M)$ と euler 数 $e(M)$ で決まる.

証明のポイントは Moisezon の本 [Mz] Appendix II にある R. Livne の定理を少し拡張することである. 幾何的な議論は [Mz] pp 180-191 と平行に進む.

§ 8. 付記. 定理 3.1 より, monodromy の $|\text{trace}| \leq 2$. よして, $T_r = 2 \Leftrightarrow m_0 I_0$ 或 $\tilde{A}$, $T_r = 1 \Leftrightarrow \tilde{E}_8$, $T_r = 0 \Leftrightarrow \tilde{E}_9$, $T_r = -1 \Leftrightarrow \tilde{E}_6$, $T_r = -2 \Leftrightarrow \tilde{D}$.

References

- [H] J. Harer, Pencils of curves on 4-manifolds, Thesis (1979)UCB
- [K] A. Kas, On the deformation types of Regular elliptic surfaces, Complex Analysis and Alg. Geo, Camb U.P (1977), 107-112.
- [Mt1] Y. Matsumoto, On 4-manifolds fibered by tori, To appear in Proc. Japan Acad (1982)
- [Mt2] Y. Matsumoto, A topological study of 4-dim.T.F., I, (in prep.)
- [M2] B. Moishezon, Complex Surfaces and Conn. Sum..., Springer LNM[#] 603
- [Mo] J.M. Montesinos, On Twins in the four-sphere (to appear)

- [N] W.D. Neumann, A calculus for plumbing..., Trans. AMS 268, (1981) 299-344
- [NW] W.D. Neumann-S.H. Weintraub, Four-manifolds constructed via plumbing, Math. Ann, 238 (1978), 71-78
- [SF] K. Sakamoto-S. Fukuhara, Classification of T^2 -bundle over T^2 (本講究録)
- [Sch] A. Scharf, Zur Faserung von Graphenmannigfaltigkeiten, Math. Ann. 215, 35-45 (1975).
- [Th] M.C. Thornton, Singularly fibered manifolds, Illinois J. Math. 11, 189-201 (1967)
- [Z] H. Zieschang, On Toric fiberings over surfaces, Math. Zametki 5 (1969) = Math. Notes 5 (1965), 341-345.